东莞中学、广州二中、惠州一中、深圳实验、珠海一中、中山纪念中学

# 2024 届高三第二次六校联考试题标准答案及评分标准

一、单项选择题 二、多项选择题

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | A | A | D | D | A | C | C | AB | BCD | ABD | ACD |

三、填空题：（每小题 5 分，共 20 分）

13. $f(x)=|x|,x\in[-1,1]$ 或者 $f(x)=\cos\frac{\pi x}{2},x\in[-1,1]$ 或者 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 或者...

14. $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$　　15. 2, $\frac{5\sqrt{3}}{14}$　　16. $(-\infty,0)\cup\left[\frac{2}{e},+\infty\right)$

四、解答题

17.【解析】（1）**解法一：** $c\cos B+b\cos C=3a\cos C$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 得 $\sin C\cos B+\sin B\cos C=3\sin A\cos C$，　　....2 分

所以 $\sin(B+C)=3\sin A\cos C$，　　..........3 分

由于 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$，则 $\sin A=3\sin A\cos C$.

因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A\neq0$，$\cos C=\frac{1}{3}$.　　.... ......4 分

因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.　　.... ......5 分

**解法二：** 因为 $c\cos B+b\cos C=3a\cos C$.

所以由余弦定理得 $c\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=(3a-b)\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，化简得 $a^2+b^2-c^2=\frac{2}{3}ab$，

所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\frac{2}{3}ab}{2ab}=\frac{1}{3}$.

因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

（2）由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，　　.......7 分

及 $a=b+\sqrt{2},c=3\sqrt{2}$，$\cos C=\frac{1}{3}$，得 $a^2+b^2-\frac{2}{3}ab=18$，

即 $(a-b)^2+\frac{4}{3}ab=18$. 所以 $ab=12$.　　......8 分

所以$\Delta ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times12\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$.　　.......10 分

18.【解析】（1）当 $\alpha=60^\circ$ 时，$DE//AC$，$DF//AB$

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 为平行四边形，则 $\Delta BDE$ 和 $\Delta CDF$ 均为边长为 $1km$ 的等边三角形

又 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin60^\circ=\sqrt{3}\left(km^2\right)$，$S_{\Delta BDE}=S_{\Delta CDF}=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(km^2\right)$

$\therefore$绿化面积为：$\sqrt{3}-2\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(km^2\right)$ ……………3 分

（2）方法一：由题意知：$30^\circ<\alpha<90^\circ$,BD=CD=1

$\therefore S(\alpha)=S_{\Delta ABC}-S_{\Delta BDE}-S_{\Delta CDF}=\sqrt{3}-\frac{1}{2}(BE+CF)\sin 60^\circ=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}(BE+CF)$ ……4 分

在$\Delta BDE$中，$\angle BED=120^\circ-\alpha$，由正弦定理得：$BE=\frac{\sin\alpha}{\sin\left(120^\circ-\alpha\right)}$ …………5 分

在$\Delta CDF$中，$\angle CDF=120°-\alpha$，$\angle CFD=\alpha$

由正弦定理得：$CF=\frac{\sin\left(120^\circ-\alpha\right)}{\sin\alpha}$ …………6 分

$\therefore BE+CF=\frac{\sin\alpha}{\sin\left(120^\circ-\alpha\right)}+\frac{\sin\left(120^\circ-\alpha\right)}{\sin\alpha}$ ……………7 分

令$t=\frac{\sin(120°-\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\tan\alpha}+\frac{1}{2}$

$\because 30^\circ<\alpha<90^\circ\ \therefore \tan\alpha\in(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)\ \therefore t\in\left(\frac{1}{2},2\right)$ ……………10 分

$BE+CF=\frac{1}{t}+t=f(t)$

$\because f'(t)=1-\frac{1}{t^2}\ \therefore f(t)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上单调递减；$f(t)$在$(1,2)$上单调递增.

$\therefore f(t)\in[2,\frac{5}{2})$即$BE+CF\in\left[2,\frac{5}{2}\right)$ $\quad\therefore S(\alpha)=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}(BE+CF)\in\left(\frac{3\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

即花草地块面积$S(\alpha)$的取值范围为$\left(\frac{3\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ ……………12 分

方法二：由已知得$\alpha+\angle BED+\angle B=\pi,\alpha+\angle EDF+\angle FDC=\pi$,

又 $\angle B=\angle EDF=\frac{\pi}{3}$,所以$\therefore\angle BED=\angle FDC$，

在$\Delta BED$和$\Delta CDF$中有：$\angle B=\angle C=60^\circ,\angle BED=\angle FDC$，$\therefore\Delta BED\sim\Delta CDF$，得$\frac{BE}{DC}=\frac{BD}{CF}$

又 D 是 BC 的中点，$\therefore DC=BD=1\therefore BE\cdot FC=1$,且当 E 在点 A 时，$CF=\frac{1}{2}$，

所以$\frac{1}{2}<CF<2$，所以$S=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times BE-\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times CF=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}(BE+CF)$，

设$CF=x$，$BE=\frac{1}{x}$，且$\frac{1}{2}<x<2$，令$y=x+\frac{1}{x}$，则$y'=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$，

$\therefore\frac{1}{2}<x<1$时，$y'<0,y=x+\frac{1}{x}$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$单调递减，$1<x<2$时，$y'>0,y=x+\frac{1}{x}$在$(1,2)$上单调递增，$\therefore x=1$时，$y=x+\frac{1}{x}$有最小值 2，当$x=\frac{1}{2}$或$x=2$时，$y=x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$，

所以面积 S 的取值范围是$\left(\frac{3\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

19.【解析】（1） $f(x)=\cos(\frac{3\pi}{2}+x)\cdot\sin(A-x)=\sin x(\sin A\cos x-\cos A\sin x)$. ………2 分

$=\sin x\cos x\sin A-\cos A\sin^2 x$

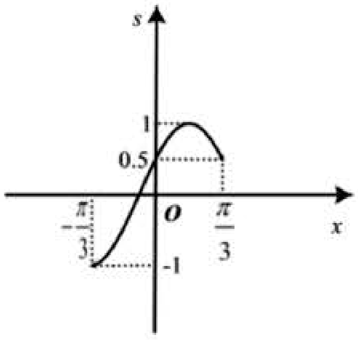
$=\sin A\times\frac{\sin 2x}{2}-\cos A\times\frac{1-\cos 2x}{2}=-\frac{1}{2}\cos A+\frac{1}{2}\cos(2x-A)$， ……………4 分

故 $f(x)_{\max}=-\frac{1}{2}\cos A+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，故 $\cos A=\frac{1}{2}$.

因为 $A\in(0,\pi)$，故 $A=\frac{\pi}{3}$. ……………5 分

（2） $f(x)=-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{4}$，

故 $g(x)=2(f(x)+\frac{1}{4})=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，




令 $s=g(x)$，$x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$，则 $g(x)$ 的图象如图所示：可得 $s\in[-1,1]$，

……………6 分

方程 $4[g(x)]^2-m[g(x)]+1=0$ 在 $x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$ 内有两个不同的解

又 $s\in[-1,1]$，下面考虑 $4s^2-ms+1=0$ 在 $[-1,1]$ 上的解的情况.

若 $\Delta=m^2-16=0$，则 $m=-4$ 或 $m=4$（舍）

当 $m=-4$ 时，方程的解为 $s=-\frac{1}{2}$，此时 $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ 仅有一解，

故方程 $4[g(x)]^2-m[g(x)]+1=0$ 在 $x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$ 内有一个解，舍. ……………8 分

若 $\Delta=m^2-16>0$，则 $m<-4$ 或 $m>4$，

此时 $4s^2-ms+1=0$ 在 $R$ 有两个不同的实数根 $s_1,s_2(s_1<s_2)$，

当 $m<-4$ 时，则 $s_1<0,s_2<0$，

要使得方程 $4[g(x)]^2-m[g(x)]+1=0$ 在 $x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$ 内有两个不同的解，

则 $-1\le s_1<0,-1\le s_2<0$.

令 $h(s)=4s^2-ms+1$，则 $\begin{cases}m<-4\\h(-1)\ge 0\\-1<\frac{m}{8}<0\\h(0)>0\end{cases}$，解得 $-5\le m<-4$. ……………12 分

综上，$m$ 的取值范围为：$[-5,-4)$.

20. 【解析】（1） $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=2e^{2x}-\frac{a}{x}(x>0)$. ……1 分

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f'(x)$ 没有零点； ………2 分.

当 $a>0$ 时，因为 $e^{2x}$ 单调递增，$-\frac{a}{x}$ 单调递增，所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，…3 分

当 $b$ 满足 $0<b<\frac{a}{4}$ 且 $b<\frac{1}{4}$ 时，即

若 $a\ge 1,b<\frac{1}{4}$ 时，$f'(b)<f'(\frac{1}{4})=2\sqrt{e}-4a\le 2\sqrt{e}-4<0$；

若$0<a<1,b<\frac{a}{4}<\frac{1}{4}$时，$f'(b)<f'(\frac{a}{4})=2e^{\frac{a}{2}}-4<2\sqrt{e}-4<0$；则$f'(b)<0$，..5 分

**另法：** $x\to 0$时$2e^{2x}\to 0$，$-\frac{a}{x}\to -\infty(a>0)$，所以$x\to 0,f'(x)\to -\infty$

且$f'(x)$在$(0,+\infty)$上是连续的，所以必存在$b$使得$f'(b)<0$，

又$f'(a)>0$ 即有$f'(a)f'(b)<0$ ，故当$a>0$时$f'(x)$存在唯一零点. ……6 分

（2）当$a>0$时由（1），可设$f'(x)$在$(0,+\infty)$的唯一零点为$x_0$，

当$x\in(0，x_0)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(x_0,+\infty)$时，$f'(x)>0$. ..........7 分

故$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，在$(x_0,+\infty)$单调递增，

所以$x=x_0$时，$f(x)$取得最小值，最小值为$f(x_0)$. .....8 分

由于$f'(x_0)=2e^{2x_0}-\frac{a}{x_0}=0$， ............9 分

所以$f(x_0)=\frac{a}{2x_0}+2ax_0+a\ln\frac{2}{a}\geq 2a+a\ln\frac{2}{a}$. .....11 分

故当$a>0$时，$f(x)\geq 2a+a\ln\frac{2}{a}$. ……12 分

21.【解析】（1）因为$f(x)=e^x\ln(1+x)$，所以$f(0)=0$，即切点坐标为$(0,0)$，..1 分

又$f'(x)=e^x[\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}]$，∴切线斜率$k=f'(0)=1$ ∴切线方程为$y=x$ .....3 分

（2）令$g(x)=f'(x)=e^x[\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}]$

则$g'(x)=e^x[\ln(1+x)+\frac{2}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}]$ .......................4 分

令$h(x)=\ln(1+x)+\frac{2}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}$，则$h'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{2}{(1+x)^2}+\frac{2}{(1+x)^3}=\frac{x^2+1}{(x+1)^3}>0$，

∴$h(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增， .........6 分

∴$h(x)\geq h(0)=1>0$ ∴$g'(x)>0$在$[0,+\infty)$上恒成立 ∴$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增..7 分

（3）解：待证不等式等价于$f(s+t)-f(s)>f(t)-f(0)$，

令$m(x)=f(x+t)-f(x)(x,t>0)$，只需证$m(x)>m(0)$ ..........8 分

∵$m(x)=f(x+t)-f(x)=e^{x+t}\ln(1+x+t)-e^x\ln(1+x)$

$m'(x)=e^{x+t}\ln(1+x+t)+\frac{e^{x+t}}{1+x+t}-e^x\ln(1+x)-\frac{e^x}{1+x}=g(x+t)-g(x)$.........10 分

由（2）知$g(x)=f'(x)=e^x[\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}]$在$[0,+\infty)$上单调递增，

∴$g(x+t)>g(x)$ ...........11 分

∴$m'(x)>0$ ∴$m(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

又因为$x,t>0$ ∴$m(x)>m(0)$，所以命题得证. .... 12 分

22.【解析】(1) $f'(x)=\left(xe^{ax}\right)'=(1+ax)e^{ax}$，　　　　…………1 分

当 $a\ge 0$ 时，则 $1+ax\ge 0$ 对任意 $x\in[0,2]$ 恒成立，即 $f'(x)\ge 0$ 恒成立.

所以 $f(x)$ 在 $x\in[0,2]$ 单调递增. 则 $f(x)$ 的最大值为 $f(x)_{\max}=f(2)=2e^{2a}$；　…………2 分

当 $a<0$ 时，令 $1+ax=0$，即 $x=-\frac{1}{a}$

当 $-\frac{1}{a}\in(0,2)$，即 $a<-\frac{1}{2}$ 时，当 $x\in\left[0,-\frac{1}{a}\right)$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\left[0,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增.

当 $x\in\left(-\frac{1}{a},2\right]$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{a},2\right]$ 上单调递减，$\therefore f(x)_{\max}=f\left(-\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{ea}$.　3 分

当 $-\frac{1}{a}\in[2,+\infty)$ 即 $-\frac{1}{2}\le a<0$ 时，$1+ax\ge 0$ 对任意 $x\in[0,2]$ 恒成立，即 $f'(x)\ge 0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $x\in[0,2]$ 单调递增. 则 $f(x)$ 的最大值为 $f(x)_{\max}=f(2)=2e^{2a}$；　…………4 分

综上所述：当 $a\ge-\frac{1}{2}$ 时 $f(x)_{\max}=f(2)=2e^{2a}$；当 $a<-\frac{1}{2}$ 时 $f(x)_{\max}=f\left(-\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{ea}$ …5 分

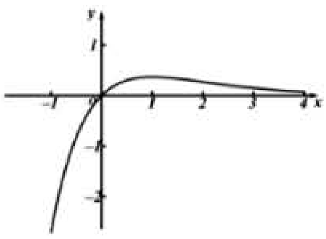
(2) 因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与 $x$ 轴平行，

所以 $f'(1)=(1+a)e^{a}=0$，则 $a=-1$，即 $f'(x)=(1-x)e^{-x}$.

当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增

当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

又因为 $x<0$ 时有 $f(x)<0$；$x>0$ 时有 $f(x)>0$，




根据图象可知，

若 $f(x_1)=f(x_2)$，则有 $0<x_1<1<x_2$；　……7 分

要证 $x_1e^{x_2}>e$，只需证 $x_2>1-\ln x_1$；　……………8 分

又因为 $0<x_1<1$，所以 $1-\ln x_1>1$；

因为 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，从而只需证明 $f(x_1)=f(x_2)<f(1-\ln x_1)$，

只需证 $x_1e^{-x_1}<(1-\ln x_1)e^{\ln x_1-1}=\frac{(1-\ln x_1)}{e}e^{\ln x_1}=\frac{x_1}{e}(1-\ln x)$.

只需证 $e^{1-x_1}+\ln x_1<1,(0<x_1<1)$　……………………10 分

设 $h(t)=e^{1-t}+\ln t,(t\in(0,1))$，则 $h'(t)=\frac{1-te^{1-t}}{t}$.

由 $f(x)$ 的单调性可知，$f(t)\le f(1)=\frac{1}{e}$. 则 $te^{-t}\le\frac{1}{e}$，即 $1-te^{1-t}\ge 0$.

所以 $h'(t)>0$，即 $h(t)$ 在 $t\in(0,1)$ 上单调递增. 所以 $h(t)<h(1)=1$.

从而不等式 $x_1e^{x_2}>e$ 得证.　…………12 分