

2023 年北京市石景山区高三一模数学试卷

本试卷共 9 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$ ， $B = \{x | x^2 + x - 2 \leq 0\}$ ，则 $A \cup B =$

- A. $[-2, 2]$ B. $[-2, 1]$ C. $[0, 1]$ D. $[0, 2]$

2. 在复平面内，复数 z 对应的点的坐标为 $(-2, -1)$ ，则 $\frac{z}{i} =$

- A. $-1 - 2i$ B. $-2 - i$ C. $-1 + 2i$ D. $2 - i$

3. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的离心率是 2，则 $b =$

- A. 12 B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 下列函数中，是奇函数且在定义域内单调递减的是

- A. $f(x) = \sin x$ B. $f(x) = 2^{|x|}$
C. $f(x) = x^3 + x$ D. $f(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x)$

5. 设 $x > 0$ ， $y > 0$ ，则“ $x + y = 2$ ”是“ $xy \leq 1$ ”的

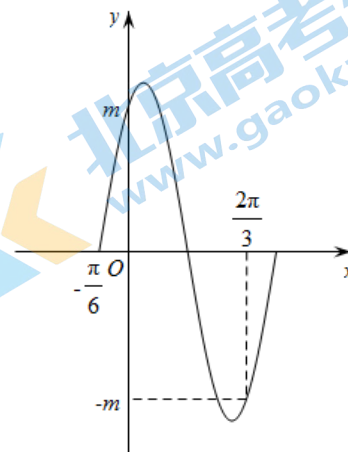
- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：对任意的 $m, n \in \mathbf{N}^*$ ，都有 $a_m a_n = a_{m+n}$ ，且 $a_2 = 3$ ，则 $a_{10} =$

- A. 3^4 B. 3^5 C. 3^6 D. 3^{10}

7. 若函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图像如图所示, 则 φ 的值是

- A. $\frac{\pi}{3}$
- B. $\frac{\pi}{6}$
- C. $\frac{\pi}{4}$
- D. $\frac{\pi}{12}$



8. 在不考虑空气阻力的条件下, 火箭的最大速度 v (单位: km/s) 与燃料的质量 M (单位: kg), 火箭 (除燃料外) 的质量 m (单位: kg) 的函数关系是 $v = 2000 \ln(1 + \frac{M}{m})$. 当燃料质量与火箭质量的比值为 t_0 时, 火箭的最大速度可达到 $v_0 \text{ km/s}$. 若要使火箭的最大速度达到 $2v_0 \text{ km/s}$, 则燃料质量与火箭质量的比值应为

- A. $2t_0^2$
- B. $t_0^2 + t_0$
- C. $2t_0$
- D. $t_0^2 + 2t_0$

9. 已知直线 $l: kx - y - 2k + 2 = 0$ 被圆 $C: x^2 + (y+1)^2 = 25$ 所截得的弦长为整数, 则满足条件的直线 l 有

- A. 6 条
- B. 7 条
- C. 8 条
- D. 9 条

10. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 点 P 为正方形 $ABCD$ 所在平面内一动点, 给出下列三个命题:

- ①若点 P 总满足 $PD_1 \perp DC_1$, 则动点 P 的轨迹是一条直线;
- ②若点 P 到直线 BB_1 与到平面 CDD_1C_1 的距离相等, 则动点 P 的轨迹是抛物线;
- ③若点 P 到直线 DD_1 的距离与到点 C 的距离之和为 2, 则动点 P 的轨迹是椭圆.

其中正确的命题个数是

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

11. 向量 $\mathbf{a} = (2\sin\theta, \cos\theta)$, $\mathbf{b} = (1, 1)$, 若 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$, 则 $\tan\theta =$ _____.

12. 抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点坐标为 _____, 若抛物线 C 上一点 M 的纵坐标为 2, 则点 M 到抛物线焦点的距离为 _____.

13. 若 $(x + \frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中含有常数项, 则正整数 n 的一个取值为 _____.

14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & x \leq a \\ -x, & x > a \end{cases}$

①若 $a = 0$, 则 $f(x)$ 的最大值为 _____;

②若 $f(x)$ 无最大值, 则实数 a 的取值范围是 _____.

15. 项数为 k ($k \in \mathbf{N}^*, k \geq 2$) 的有限数列 $\{a_n\}$ 的各项均不小于 -1 的整数,

满足 $a_1 \cdot 2^{k-1} + a_2 \cdot 2^{k-2} + a_3 \cdot 2^{k-3} + \cdots + a_{k-1} \cdot 2 + a_k = 0$, 其中 $a_1 \neq 0$. 给出下列四个结论:

①若 $k = 2$, 则 $a_2 = 2$;

②若 $k = 3$, 则满足条件的数列 $\{a_n\}$ 有 4 个;

③存在 $a_1 = 1$ 的数列 $\{a_n\}$;

④所有满足条件的数列 $\{a_n\}$ 中, 首项相同.

其中所有正确结论的序号是 _____.

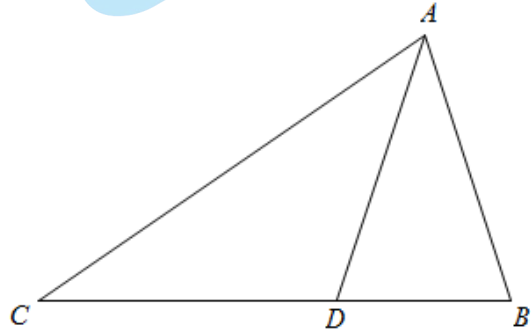
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. (本小题 13 分)

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC = 4\sqrt{2}$ ， $C = \frac{\pi}{6}$ ，点 D 在 BC 边上， $\cos \angle ADB = \frac{1}{3}$ 。

(I) 求 AD 的长；

(II) 若 $\triangle ABD$ 的面积为 $2\sqrt{2}$ ，求 AB 的长。



17. (本小题 13 分)

某高校“植物营养学专业”学生将鸡冠花的株高增量作为研究对象，观察长效肥和缓释肥对农作物影响情况. 其中长效肥、缓释肥、未施肥三种处理下的鸡冠花分别对应1,2,3三组. 观察一段时间后，分别从1,2,3三组随机抽取 40 株鸡冠花作为样本，得到相应的株高增量数据整理如下表.

株高增量 (单位: 厘米)	(4,7]	(7,10]	(10,13]	(13,16]
第 1 组鸡冠花株数	9	20	9	2
第 2 组鸡冠花株数	4	16	16	4
第 3 组鸡冠花株数	13	12	13	2

假设用频率估计概率，且所有鸡冠花生长情况相互独立.

(I) 从第 1 组所有鸡冠花中各随机选取 1 株，估计株高增量为 (7,10] 厘米的概率；

(II) 分别从第 1 组，第 2 组，第 3 组的所有鸡冠花中各随机选取 1 株，记这 3 株鸡冠花中恰有 X 株的株高增量为 (7,10] 厘米，求 X 的分布列和数学期望 EX ；

(III) 用“ $\xi_k = 1$ ”表示第 k 组鸡冠花的株高增量为 (4,10]，“ $\xi_k = 0$ ”表示第 k 组鸡冠花的株高增量为 (10,16] 厘米， $k=1,2,3$ ，直接写出方差 $D_{\xi_1}, D_{\xi_2}, D_{\xi_3}$ 的大小关系. (结论不要求证明)

18. (本小题 14 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 侧面 PAD 为等腰直角三角形, 且 $\angle PAD = \frac{\pi}{2}$, 点 F 为棱 PC 上的点, 平面 ADF 与棱 PB 交于点 E .

(I) 求证: $EF \parallel AD$;

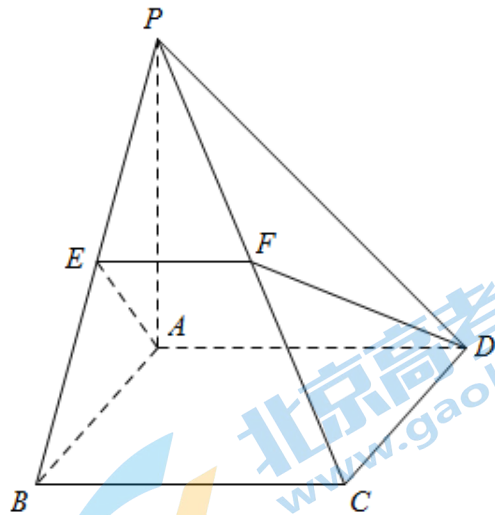
(II) 从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知, 求平面 PCD 与平面 $ADFE$ 所成锐二面角的大小.

条件①: $AE = \sqrt{2}$;

条件②: 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$;

条件③: $PB \perp FD$.

注: 如果选择的条件不符合要求, 第 (II) 问得 0 分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.



19. (本小题 15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, \sqrt{3})$, 且离心率为 $\frac{1}{2}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 过点 $P(-1, 1)$ 且互相垂直的直线 l_1, l_2 分别交椭圆 C 于 M, N 两点及 S, T 两点.

求 $\frac{|PM| \cdot |PN|}{|PS| \cdot |PT|}$ 的取值范围.

20. (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = e^x - 1 - m \sin x$ ($m \in \mathbf{R}$).

(I) 当 $m=1$ 时,

(i) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(ii) 求证: $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $f(x) > 0$.

(II) 若 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上恰有一个极值点, 求 m 的取值范围.

21. (本小题 15 分)

若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足以下两个条件, 则称该数列为 τ 数列.

① $a_1 = 1$, 当 $n \geq 2$ 时, $|a_n - 2| = |a_{n-1} + 2|$;

② 若存在某一项 $a_m \leq -5$, 则存在 $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, 使得 $a_k = a_m + 4$ ($m \geq 2$ 且 $m \in \mathbf{N}^*$).

(I) 若 $a_2 < 0$, 写出所有 τ 数列的前四项;

(II) 若 $a_2 > 0$, 判断 τ 数列是否为等差数列, 请说明理由;

(III) 在所有的 τ 数列中, 求满足 $a_m = -2021$ 的 m 的最小值.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯