肇庆市 2022 届高中毕业班第三次教学质量检测

数学参考答案及评分标准

2022.3

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.【答案】C

【解析】因为集合 $U=\{x\in\mathbf{N}\mid -1<x<4\}=\{0,1,2,3\}$，集合 $A=\{0,1\}$，所以 $\complement_U A=\{2,3\}$，故选 C.

2.【答案】B

【解析】因为 $z=\dfrac{5i}{1+3i}=\dfrac{5i(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\dfrac{5(3+i)}{10}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$，所以 z 的虚部是 $\dfrac{1}{2}$，故选 B.

3.【答案】B

【解析】由 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，得 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，

所以 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$，故选 B.

4.【答案】A

【解析】因为 $-f(-x)=-\dfrac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}=f(x)$，所以函数 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ 为奇函数；

因为 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}=1-\dfrac{2}{2^x+1}$，又 $2^x>0$，所以 $-1<1-\dfrac{2}{2^x+1}<1$，故 A 正确；

函数 $f(x)=-x^2+x$ 非奇非偶，故 B 错误；

函数 $f(x)=|\sin x|$ 为偶函数，故 C 错误；

因为 $f(8)=8^{\frac{1}{3}}+8^{-\frac{1}{3}}=2+\dfrac{1}{2}>1$，故 D 错误，故选 A.

5.【答案】D

【解析】因为正三棱锥的底面边长为 1，所以其内切圆半径为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，由三棱锥体积与圆柱体积公式可得 $V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin60^\circ\times2+\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^2\times0.6\approx0.45(\text{cm}^3)$，故选 D.

6.【答案】D

【解析】4 名教师分为 3 组，有 C_4^2 种方法，然后再分别派到甲、乙、丙三地，共有 $C_4^2A_3^3$ 种方案，所以共有 36 种选派方案. 故选 D.

7.【答案】C

【解析】由 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，得 $a_{2022}=a_{2021}+a_{2020}=a_{2021}+a_{2019}+a_{2018}=\cdots=a_{2021}+a_{2019}+\cdots+a_3+a_2=a_{2021}+a_{2019}+\cdots+a_3+a_1=t$. 故选 C.

8.【答案】A

【解析】由题设，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$k=\dfrac{2x}{e^x(2x+1)}$，令 $h(x)=\dfrac{2x}{e^x(2x+1)}$，则 $h'(x)=-\dfrac{2(2x-1)(x+1)}{e^x(2x+1)^2}$，所以当 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 时，$h'(x)>0$，则 $h(x)$ 单调递增；当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 单调递减. 又 $h(x)>0$，$h(x)\leqslant h(\dfrac{1}{2})=\dfrac{\sqrt{e}}{2e}$，所以当 $0<k<\dfrac{\sqrt{e}}{2e}$ 时，直线 $y=k$ 与 $h(x)$ 的图象有两个交点，即函数 $f(x)=ke^x$ 的图象与函数 $g(x)=\dfrac{2x}{2x+1}$ 的图象有且只有两个交点. 故选 A.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9.【答案】AB

【解析】对于 A 选项，因为 $a>b$，所以 $a-b>0$，故 A 正确；

对于 B 选项，因为函数 $f(x)=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $2^a>2^b$，故 B 正确；

对于 C 选项，当 $c\leqslant 0$ 时，$ac>bc$ 不成立，故 C 不正确；

对于 D 选项，当 $a=1,b=-2$ 时，$a^2=1<b^2=4$，故 D 不正确. 故选 AB.

10.【答案】ACD

【解析】补充完整列联表如下：

PM2.5 \ SO_2	[0,150]	(150,475]	合计
[0,75]	64	16	80
(75,115]	10	10	20
合计	74	26	100

对于 A 选项，该市一天中，空气中 PM2.5 浓度不超过 75 $\mu g/m^3$，且 SO_2 浓度不超过 150 $\mu g/m^3$ 的概率估计值为 $\dfrac{64}{100}=0.64$，故 A 正确；

对于 B 选项，$k=\dfrac{1000\times(640\times100-160\times100)^2}{800\times200\times740\times260}\approx74.844\neq7.4844$，故 B 不正确；

因为 $7.4844>6.635$，根据临界值表可知，在犯错的概率不超过 1% 的条件下，即有超过 99% 的把握认为该市一天空气中 PM2.5 浓度与 SO_2 浓度有关，故 C，D 均正确. 故选 ACD.

11.【答案】ABD

【解析】对于 A 选项，因为平面 PBC_1 即为平面 ABC_1D_1，又因为 $C_1D_1 // CD$，且 $C_1D_1 \subset$ 平面 ABC_1D_1，$CD \not\subset$ 平面 ABC_1D_1，所以 $CD //$ 平面 PBC_1，故 A 正确；

对于 B 选项，该球面与侧面 DCC_1D_1 的交线长为 $\frac{\pi}{2}$，故 B 正确；

对于 C，D 选项，将 $\triangle DBD_1$ 沿 BD_1 翻折到与 $\triangle A_1BD_1$ 在同一平面且点 A_1，D 在直线 BD_1 的异侧，作 $EG \perp BD$ 于点 G，此时 $|EG| = \frac{2}{3}$，则 $|EP| + |PF|$ 的最小值是 $\frac{2}{3}$，故 C 不正确，D 正确. 故选 ABD.

12.【答案】BCD

【解析】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$E(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，$M(x_M,y_M)$，$N(x_N,y_N)$，直线 l_1 的方程为 $x=my+2$，则直线 l_2 的方程为 $x=-\frac{1}{m}y+2$.

将直线 l_1 的方程 $x=my+2$ 代入 $y^2=8x$，化简整理得 $y^2-8my-16=0$，

则 $y_1+y_2=8m$，$y_1y_2=-16$，

故 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)+4=8m^2+4$. 所以 $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=4m^2+2$，$y_M=\frac{y_1+y_2}{2}=4m$.

因为点 A 到直线 l 的距离 $d_1=x_1+2$，点 B 到直线 l 的距离 $d_2=x_2+2$，点 M 到直线 l 的距离 $d_M=x_M+2$，

又 $x_M=4m^2+2$，所以 $d_M=4m^2+4$，故 A 错误；

因为 $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+4=8m^2+8=2d_M$，所以以 $|AB|$ 为直径的圆的圆心 M 到 l 的距离为 $\frac{|AB|}{2}$，即以 $|AB|$ 为直径的圆与 l 相切，故 B 正确；

同理，$x_3+x_4=-\frac{1}{m}(y_3+y_4)+4=8\frac{1}{m^2}+4$，所以 $x_N=\frac{4}{m^2}+2$，$y_N=-\frac{4}{m}$，$|ED|=|EF|+|DF|=x_3+x_4+4=8\frac{1}{m^2}+8$，

则 $|AB|+|ED|=8m^2+8\frac{1}{m^2}+16 \geqslant 32$，当且仅当 $m=\pm1$ 时等号成立，故 C 正确；

$|MN|=\sqrt{(x_M-x_N)^2+(y_M-y_N)^2}=\sqrt{\left(4m^2-\frac{4}{m^2}\right)^2+\left(4m+\frac{4}{m}\right)^2}=4\sqrt{m^4+\frac{1}{m^4}+m^2+\frac{1}{m^2}}$.

设 $m^2+\frac{1}{m^2}=t$，则 $m^2+\frac{1}{m^2}=t \geqslant 2$，$m^4+\frac{1}{m^4}=t^2-2$，$|MN|=4\sqrt{t^2+t-2}$.

当 $t=2$ 时，即 $m=\pm1$ 时，$|MN|$ 最小，这时 $x_N=x_M$，故 D 正确. 故选 BCD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.【答案】$-\frac{3}{2}$

【解析】因为 $\boldsymbol{a} // \boldsymbol{b}$，所以 $2x=-3$，解得 $x=-\frac{3}{2}$，故填 $-\frac{3}{2}$.

14.【答案】$\left(-\frac{3}{2},-\sqrt{2}\right)$

【解析】若 $h(x)$ 恰有 3 个零点，则函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上存在两个零点，

故 $\begin{cases}0<-\frac{a}{2}<1,\\ f(1)=1+a+\frac{1}{2}>0,\\ \Delta=a^2-4\times\frac{1}{2}>0,\end{cases}$

解得 $-\frac{3}{2}<a<-\sqrt{2}$. 故填 $\left(-\frac{3}{2},-\sqrt{2}\right)$.

15.【答案】$\sqrt{3}-1$

【解析】设右焦点为 F'，连接 AF'，BF'. 因为 $2|OF|=|AB|=2c$，即 $|FF'|=|AB|$，可得四边形 $AFBF'$ 为矩形. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中，$|AF|=2c\cdot\cos\angle BAF=\sqrt{3}c$，$|BF|=2c\cdot\sin\angle BAF=c$.

由椭圆的定义可得 $|AF|+|AF'|=2a$，所以 $2a=(\sqrt{3}+1)c$，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$，故填 $\sqrt{3}-1$.

16.【答案】$\frac{33}{4}$

【解析】由题意知，$\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_1\pi,\\ \frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2},\end{cases}$ $k_1,k_2\in\mathbf{Z}$，则 $\begin{cases}\omega=\frac{3(2k+1)}{4},\\ \varphi=\frac{k'\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\end{cases}$ $k,k'\in\mathbf{Z}$，其中 $k=k_2-k_1$，

$k'=k_2+k_1=2k_2-k$. 当 $k'=-1$ 时，$\varphi=-\frac{\pi}{4}$，$k=2k_2+1$，$k_2\in\mathbf{Z}$；当 $k'=0$ 时，$\varphi=\frac{\pi}{4}$，$k=2k_2$，$k_2\in\mathbf{Z}$. 又 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{2}\right)$ 上有且只有一个极大值点，所以 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}=\frac{2\pi}{5}\leqslant 2T=\frac{4\pi}{\omega}$，得 $0<\omega\leqslant 10$，即 $0<\frac{3(2k+1)}{4}\leqslant 10$，所以 $-\frac{1}{2}<k\leqslant\frac{37}{6}$.

当 $k=6$ 时，$\omega=\frac{39}{4}$，$\varphi=\frac{\pi}{4}$，此时 $\frac{39}{4}x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{49}{40}\pi,\frac{41}{8}\pi\right)$，此时有 2 个极大值点，舍去；

当 $k=5$ 时，$\omega=\frac{33}{4}$，$\varphi=-\frac{\pi}{4}$，此时 $\frac{33}{4}x-\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{23}{40}\pi,\frac{31}{8}\pi\right)$，此时有 1 个极大值点，成立，

所以 ω 的最大值为 $\frac{33}{4}$，故填 $\frac{33}{4}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (1)解：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比是 q，首项是 a_1.

由 $8a_3=a_6$，可得 $q=2$. ………………………………………………………… 2 分

由 $a_2+a_5=36$，可得 $a_1q(1+q^3)=36$，所以 $a_1=2$， ………………………… 3 分

所以 $a_n=2^n$. ……………………………………………………………………… 4 分

(2)证明：因为 $b_n=\frac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}=\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$，…………………………………… 6 分

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\left(\frac{1}{2^1+1}-\frac{1}{2^2+1}\right)+\left(\frac{1}{2^2+1}-\frac{1}{2^3+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)$

$=\frac{1}{2^1+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$. …………………………………… 8 分

又 $\frac{1}{2^{n+1}+1}>0$，所以 $T_n<\frac{1}{3}$. …………………………………… 10 分

18. 解：(1)由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得 $b^2+c^2+bc=a^2$. …………………… 2 分

由余弦定理得，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$. …………………………………… 4 分

又 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$. …………………………………… 5 分

(2)由 $a=\sqrt{3}$ 和(1)可知 $b^2+c^2+bc=3$，…………………………………… 6 分

则 $3=(b+c)^2-bc\geqslant(b+c)^2-\frac{(b+c)^2}{4}=\frac{3(b+c)^2}{4}$，…………………………………… 8 分

得 $4\geqslant(b+c)^2$，即 $b+c\leqslant 2$，…………………………………… 10 分

所以 $a+b+c\leqslant 2+\sqrt{3}$（当且仅当 $b=c=1$ 时，取得等号），

所以 $\triangle ABC$ 周长的最大值为 $2+\sqrt{3}$. …………………………………… 12 分

19. (1)证明：因为四边形 ACC_1A_1 是菱形，$\angle A_1AC=60^\circ$，所以 $A_1O\perp AC$. ………………… 1 分

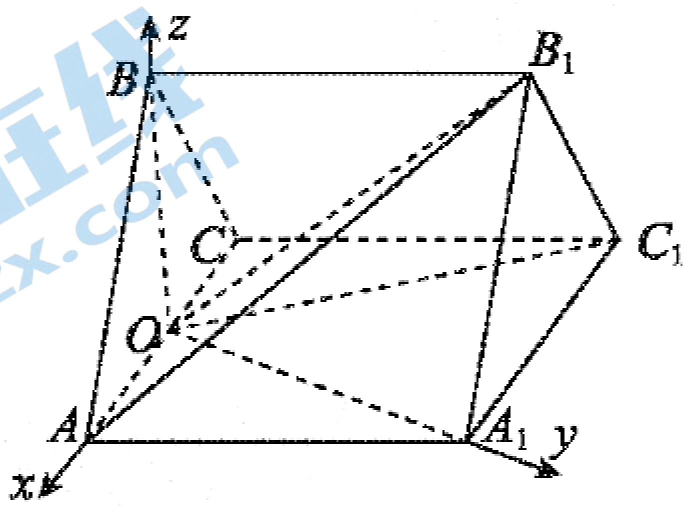
因为平面 $ABC\perp$ 平面 ACC_1A_1，平面 $A_1ACC_1\cap$ 平面 $ABC=AC$，所以 $A_1O\perp$ 平面 ABC，所以 $A_1O\perp BC$. …………………………………… 2 分

因为 $B_1C_1/\!/BC$，所以 $B_1C_1\perp A_1O$. …………………………………… 3 分

又 $B_1C_1\perp B_1A_1$，且 $OA_1\cap B_1A_1=A_1$，所以 $B_1C_1\perp$ 平面 B_1OA_1，…………………… 4 分

所以 $BC\perp$ 平面 B_1OA_1. …………………………………… 5 分

(2)解：如图，连接 BO.



因为 $\angle ABC=90^\circ$，$AB=BC$，O 是 AC 的中点，所以 $BO\perp AC$. 又因为平面 $ABC\perp$ 平面 ACC_1A_1，平面 $ABC\cap$ 平面 $ACC_1A_1=AC$，所以 $BO\perp$ 平面 ACC_1A_1. …………………………………… 6 分

设 $AC=2$,建立空间直角坐标系,则 $O(0,0,0)$,$A(1,0,0)$,$B_1(-1,\sqrt{3},1)$,$C_1(-2,\sqrt{3},0)$, …………………………………………………………………………………………… 7 分

$\overrightarrow{OA}=(1,0,0)$,$\overrightarrow{OB_1}=(-1,\sqrt{3},1)$,$\overrightarrow{OC_1}=(-2,\sqrt{3},0)$.

设平面 AOB_1 的法向量是 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OA}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OB_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=0,\\ -x_1+\sqrt{3}y_1+z_1=0,\end{cases}$

取 $z_1=\sqrt{3}$,可得 $\boldsymbol{m}=(0,-1,\sqrt{3})$. …………………………………………………… 9 分

设平面 C_1OB_1 的法向量是 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OC_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OB_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x_2+\sqrt{3}y_2=0,\\ -x_2+\sqrt{3}y_2+z_2=0,\end{cases}$

取 $x_2=\sqrt{3}$,可得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},2,-\sqrt{3})$. ……………………………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-5}{2\sqrt{10}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{4}$. ……………………………………… 11 分

所以二面角 $A\text{-}OB_1\text{-}C_1$ 的余弦值是 $-\dfrac{\sqrt{10}}{4}$. ……………………………………………… 12 分

20. 解:(1)依题意有,$P(C)=C_3^1\times\dfrac{13}{15}\times\left(1-\dfrac{13}{15}\right)^2=\dfrac{52}{1125}$, …………………………… 2 分

$P(D)=\dfrac{9}{10}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{10}\times C_2^1\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{32}$. ………………………………………… 4 分

又事件 C 与 D 相互独立,

则 $P(CD)=P(C)P(D)=\dfrac{52}{1125}\times\dfrac{3}{32}=\dfrac{13}{3000}$,

所以 $P(CD)=\dfrac{13}{3000}$. …………………………………………………………………………… 5 分

(2)设 A 组中服用甲种中药康复的人数为 X_1,则 $X_1\sim B(3,\dfrac{13}{15})$,

所以 $E(X_1)=3\times\dfrac{13}{15}=\dfrac{13}{5}$.

设 A 组的积分为 X_2,则 $X_2=2X_1$,

所以 $E(X_2)=2E(X_1)=\dfrac{26}{5}$. …………………………………………………………………… 7 分

设 B 组中服用乙种中药康复的人数为 Y_1,则

$P(Y_1=0)=\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{160}$,

$P(Y_1=1)=\dfrac{9}{10}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{10}\times C_2^1\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{15}{160}$,

$P(Y_1=2)=C_2^1\times\frac{9}{10}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{10}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{63}{160}$,

$P(Y_1=3)=\frac{9}{10}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{81}{160}$,

故 Y_1 的分布列为

Y_1	0	1	2	3
P	$\frac{1}{160}$	$\frac{15}{160}$	$\frac{63}{160}$	$\frac{81}{160}$

所以 $E(Y_1)=0\times\frac{1}{160}+1\times\frac{15}{160}+2\times\frac{63}{160}+3\times\frac{81}{160}=\frac{384}{160}=\frac{12}{5}$. …………………………… 10 分

设 B 组的积分为 Y_2，则 $Y_2=2Y_1$，

所以 $E(Y_2)=E(2Y_1)=2E(Y_1)=\frac{24}{5}$. …………………………………………………… 11 分

因为 $\frac{26}{5}>\frac{24}{5}$，

所以甲种中药药性更好. ……………………………………………………………………… 12 分

21.(1)解：依题意得，$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2},\\ 2a=8,\\ c^2=a^2+b^2,\end{cases}$ ……………………………………………………… 2 分

解得 $\begin{cases}a^2=16,\\ b^2=4,\end{cases}$ 所以双曲线 C 的方程是 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$. …………………………………………… 4 分

(2)证明：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$D(x_0,y_0)$，直线 l 的方程为 $y=kx+3$.

将直线方程 $y=kx+3$ 代入双曲线方程 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$，化简整理得 $(1-4k^2)x^2-24kx-52=0$，

$\Delta=(-24k)^2+4\times(1-4k^2)\times52=208-256k^2$，

则 $x_1+x_2=\frac{24k}{1-4k^2}$，$x_1x_2=-\frac{52}{1-4k^2}$. ……………………………………………………… 6 分

要使直线与双曲线的右支有两个不同的交点 A 和 B，则应满足

$\begin{cases}1-4k^2\neq0,\\ \Delta>0,\\ x_1+x_2>0,\\ x_1x_2>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}1-4k^2\neq0,\\ 208-256k^2>0,\\ \frac{24k}{1-4k^2}>0,\\ -\frac{52}{1-4k^2}>0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{\sqrt{13}}{4}<k<-\frac{1}{2}$.（无这个范围，也不扣分）

由 $|PA|\cdot|DB|=|PB|\cdot|DA|$，得 $\left|\frac{PA}{PB}\right|=\left|\frac{DA}{DB}\right|$，故 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_0-x_1}{x_2-x_0}$， ……………………… 8 分

所以 $x_0=\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}=\frac{\frac{-104}{1-4k^2}}{\frac{24k}{1-4k^2}}=-\frac{13}{3k}$. ………………………………………… 10 分

又 $y_0=kx_0+3=-\frac{13}{3}+3=-\frac{4}{3}$,

所以点 D 的纵坐标为定值 $-\frac{4}{3}$. ………………………………………… 12 分

22.(1)证明:当 $a=-b=1$ 时,$f(x)=xe^x$.

令 $h(x)=e^x-(x+1)(x>0)$,则 $h'(x)=e^x-1>0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,且 $h(0)=0$,

所以 $h(x)=e^x-(x+1)>0$,即 $e^x>x+1$. ………………………………………… 1 分

令 $\varphi(x)=x-\ln x(x>0)$,则 $\varphi'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$,所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,且 $\varphi(1)=1$,所以 $\varphi(x)=x-\ln x\geqslant1>0$,

所以 $x>\ln x$. ………………………………………… 2 分

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时,有 $xe^x>x(x+1)>(x+1)\ln x$,

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f(x)>g(x)$. ………………………………………… 4 分

(2)解:因为 $\exists b\in[-1,0]$,使 $f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立,令 $\psi(b)=axe^{ax}+(a+b)x$,

只需 $\psi(b)_{\max}\geqslant g(x)$,即 $axe^{ax}+ax\geqslant(1+x)\ln x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立,……………… 6 分

整理得 $ax(e^{ax}+1)\geqslant(x+1)\ln x=\ln x(e^{\ln x}+1)$.(*) ………………………………………… 7 分

设 $F(x)=x(e^x+1)$,则 $F'(x)=e^x(x+1)+1$. ………………………………………… 8 分

又 $F''(x)=(x+2)e^x$,可得 $x>-2$ 时,$F''(x)>0$,$F'(x)$ 单调递增;$x<-2$ 时,$F''(x)<0$,$F'(x)$ 单调递减,因此当 $x=-2$ 时,$F'(x)$ 有最小值 $F'(-2)=1-\frac{1}{e^2}>0$,

所以 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. ………………………………………… 10 分

所以(*)式即 $F(ax)\geqslant F(\ln x)$,所以 $ax\geqslant\ln x$,即 $a\geqslant\frac{\ln x}{x}$. ………………………………………… 11 分

设 $G(x)=\frac{\ln x}{x}$,$x>0$,则 $G'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,令 $G'(x)=0$,解得 $x=e$.

当 $0<x<e$ 时,$G'(x)>0$,函数 $G(x)$ 单调递增;当 $x>e$ 时,$G'(x)<0$,函数 $G(x)$ 单调递减.

所以 $G(x)_{\max}=G(e)=\frac{1}{e}$,所以 $a\geqslant\frac{1}{e}$.

所以实数 a 的取值范围为 $[\frac{1}{e},+\infty)$. ………………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〃 精益求精、专业严谨 〃 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。