北京工业大学附属中学
HIGH SCHOOLATTACHED TO BEIJING UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

2023-2024 学年度第一学期期中考试

高一年级数学试卷

命题人：尘福真　　审核人：叶欣

（考试时间 120 分钟，总分 150 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的）

1．已知集合 $A=\{x|x^2<9\}$，$B=\{-1，0，1，2，3\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．{0，1，2}　　B．{0，1}

C．{－1，0，1, 2}　　D．{－2，－1，0，1，2}

2．命题"$\exists x\in R$，使得 $x^2\geq 1$"的否定是（　　）

A．$\forall x\in R$，都有 $x^2<1$　　B．$\exists x\in R$，使得 $x^2<1$

C．$\forall x\in R$，都有 $x^2\geqslant 1$　　D．$\exists x\in R$，使得 $x^2\leqslant 1$

3．下列每组函数是同一函数的是　　（　　）

A．$f(x)=x-1$，$g(x)=(\sqrt{x-1})^2$　　B．$f(x)=|x-3|$，$g(x)=\sqrt{(x-3)^2}$

C．$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，$g(x)=x+2$　　D．$f(x)=\sqrt{(x-1)(x-3)}$，$g(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-3}$

4．下列函数中，值域为 R 且为奇函数的是（　）

A．$y=x^2$　　B．$y=2x-1$　　C　$y=x^3$.　　D．$y=\dfrac{1}{x}$

5．如果 $a>b$，那么下列不等式中正确的是（　）

A．$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　B．$a^2>b^2$　　C．$a|c|>b|c|$　　D．$\dfrac{a}{c^2+1}>\dfrac{b}{c^2+1}$

6．已知 $a=2^{-\frac{1}{3}}$，$b=\log_2\dfrac{1}{3}$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}$，则下列关系式中正确的（　）.

A．$c>a>b$　　B．$a>c>b$　　C．$a>b>c$　　D．$c>b>a$

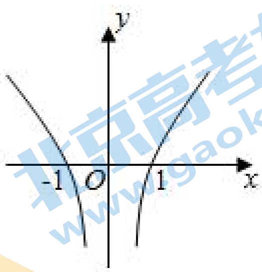
7. 函数 $f(x)=2^{|x|}$ 的单调递减区间是（　）

A. $(0,+\infty)$　　B. $(-\infty,0)$　　C. $(-\infty,1)$　　D. $(1,+\infty)$

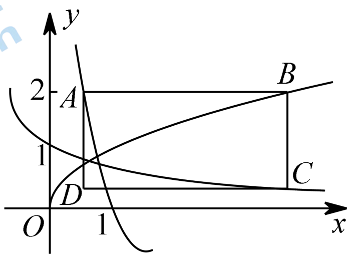
8．已知函数 $f(x)$ 的图象如下图（左）所示，则不等式 $\dfrac{f(x)}{x}>0$ 的解集是（　　）

A．$(-\infty,-1)\cup(0,1)$　　　　B．$(-1,0)\cup(1,+\infty)$

C．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　　　D．$(-1,0)\cup(0,1)$



第 8 题图



第 9 题图

9. 如上图(右)，矩形 $ABCD$ 的三个顶点 A，B，C 分别在函数 $y=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}x$，$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$，的图像上，且矩形的边分别平行于两坐标轴，若点 A 的纵坐标为 2，则点 D 的坐标为（　　）.

A. $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$　　B. $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4}\right)$　　C. $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$　　D. $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$

10. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是定义在同一区间 $[a,b]$ 上的两个函数，若对任意的 $x\in[a,b]$ 都有 $|f(x)-g(x)|\le 1$，则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是“依函数”，区间 $[a,b]$ 为“依区间”，设 $f(x)=x^2-3x+4$ 与 $g(x)=2x-3$ 在区间 $[a,b]$ 上是“依函数”，则它的“依区间”可以是（ ）

A. $[1,4]$　B. $[2,3]$　　C. $[2,4]$　　D. $[3,4]$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分，将答案填写在答案卷上）

11．函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x}$ 的定义域是_______.

12．已知 $a>0$，则 $a-1+\dfrac{4}{a}$ 的最小值为_______

13．已知函数 $f(x-1)=x^2+1$，那么 $f(2)$ 等于____.

14 $1.1^0+\sqrt[3]{216}-0.5^{-2}+\lg 25+2\lg 2=$___.

15. 若函数 $f(x)=\begin{cases}-2x^2+ax-2, x\le 1,\\ x-1, x>1\end{cases}$ 的值域为 R，则实数 a 的取值范围是__________.

三、解答题（本大题共 6 个小题，共 75 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16.（**本大题 12 分**）设全集 $U=R$，$A=\{x\in R|3a<x<2a+5\}$，$B=\{x\in R|x^2+x-2\le 0\}$.

（1）求 $\complement_U B$；

（2）若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围

17.（**本大题 12 分**）求下列关于 x 的不等式的解集：

（1）$\dfrac{x+1}{2x-1}\ge 0$；　　（2）$x^2-2ax-3a^2<0$.

18.（**本大题 12 分**）已知 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，

当 $x\ge 0$ 时，$f(x)=x^2-2x$

（1）求 $f(1), f(-2)$ 的值；

（2）求 $f(x)$ 的解析式；

（3）画出 $y=f(x)$ 简图；写出 $y=f(x)$ 的单调递增区间(只需写出结果，不要解答过程).

19（**本大题 13 分**）已知函数 $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$.

（Ⅰ）判断函数 $f(x)$ 是否具有奇偶性？并说明理由；

（Ⅱ）试用函数单调性的定义证明：$f(x)$ 在 $(-1，+\infty)$ 上是增函数；

（Ⅲ）求函数 $f(x)$ 在区间[1，4]上的值域.

20.（**本大题 13 分**）已知函数 $f(x)=2x|x-a|+x$.

（1）若 $f(x)$ 为奇函数，求 a 的值；

（2）当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 在区间[0，4]上的最大值；

（3）若 $\forall x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，函数 $f(x)$ 的图象恒在 $g(x)=2x$ 图象下方，求实数 a 的取值范围.

21.（**本大题 13 分**）对定义在 $[0，1]$ 上，并且同时满足以下两个条件的函数 $f(x)$ 称为 G 函数，

①对任意的 $x\in[0，1]$，总有 $f(x)\geqslant 0$；

②当 $x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$，$x_1+x_2\leqslant 1$ 时，总有 $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)$ 成立.

已知函数 $g(x)=x^2$ 与 $h(x)=2^x-b$ 是定义在 $[0，1]$ 上的函数.

（1）试问函数 $g(x)$ 是否为 G 函数？并说明理由；

（2）若函数 $h(x)$ 是 G 函数，求实数 b 的所有取值组成的集合.

北京工业大学附属中学
HIGH SCHOOLATTACHED TO BEIJING UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

2023-2024 学年度第一学期期中考试

高一年级 数学答题纸

学号________ 姓名________ 班级________

二 填空题

11. ______________ 12. ______________ 13 ______________

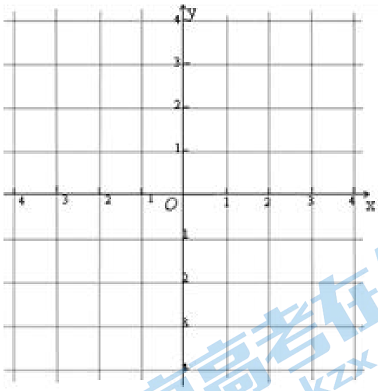
14. ______________ 15. ______________

三 解答题

16.（**本大题 12 分**）

17（本大题 **12** 分）

18.（本大题 12 分）



19（本大题 13 分）

20.（本大题 14 分）

班级________ 姓名________ 学号________

21.（本大题 15 分）

2023-2024 学年度第一学期期中考试

高一年级 数学参考答案

一 选择 1 C　2 A　3 B　4 C　5 D　6 A　7　B　8 B　9 C　10 B

二 填空题

11. ｛x｜x≥-3 且 x≠0｝　12. 3　　13　10

14. 5　15. $(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$

三 解答题

16。（本大题 2 分）

【解答】解：（1）全集 $U=R$，$A=\{x\in\mathbf{R}|3a<x<2a+5\}$，

$B=\{x\in\mathbf{R}|x^2+x-2\leqslant 0\}=\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$，　　········· 2′

$\therefore \complement_U B=\{x|x<-2$ 或 $x>1\}$.　　········· 4′

（2）$\because A\cap B=\varnothing$，，

$\therefore A=\varnothing$时，$3a\geqslant 2a+5$，解得 $a\geqslant 5$.　　········· 6′

$A\neq\varnothing$时，$\begin{cases}3a<2a+5\\2a+5\le -2\end{cases}$或$\begin{cases}3a<2a+5\\3a\ge 1\end{cases}$，　　········· 8′

解得 $a\leq -\frac{7}{2}$或$\frac{1}{3}\le a<5$，　　········· 11′

综上，实数 a 的取值范围是（$-\infty$，$-\frac{7}{2}$）$\cup[\frac{1}{3}$，$+\infty$）　········· 12′

17.（本大题 12 分）

【解答】解：（1）原不等式等价于$\begin{cases}(x+1)(2x-1)\ge 0\\2x-1\ne 0\end{cases}$，　········· 2′

所以 $x\leqslant -1$ 或 $x>\frac{1}{2}$，　　········· 4′

故不等式的解集为$\{x|x\leqslant -1$ 或 $x>\frac{1}{2}\}$.　　········· 5′

（2）原不等式可化为（$x-3a$）（$x+a$）<0，　　········· 6′

学号＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿

当 $a=0$ 时，不等式为 $x^2<0$，显然不成立，所以无解；·········7′

当 $a>0$ 时，$3a>-a$，所以 $-a<x<3a$；·········9′

当 $a<0$ 时，$3a<-a$，所以 $3a<x<-a$，·········11′

综上所述，

当 $a=0$ 时，不等式的解集为 $\varnothing$；

当 $a>0$ 时，不等式的解集为 $\{x|-a<x<3a\}$；

当 $a<0$ 时，不等式的解集为 $\{x|3a<x<-a\}$．·········12′

18.（本大题 **12** 分）

解：(1) f(1)=-1 ·········1′

f（-2）=f(2)=0 ·········2′

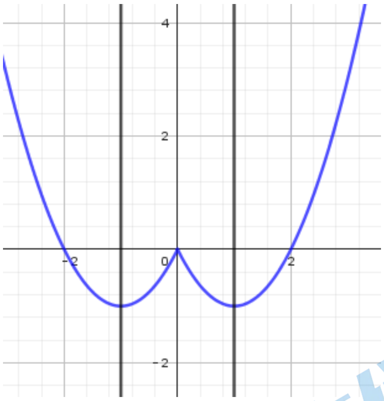
（1）设 $x<0$，则 $-x>0$ ·········3′

$f(-x)=(-x)^2-2(-x)=x^2+2x$ ·········4′

$\because y=f(x)$ 是偶函数

$\therefore f(x)=f(-x)=x^2+2x$ ·········6′

$\therefore f(x)=\begin{cases} x^2-2x, & x\geq 0 \\ x^2+2x, & x<0 \end{cases}$ ·········7′



$\cdots\cdots\cdots$ 10′

单调增区间：$[-1,0]$，$[1.+\infty)$ $\cdots\cdots\cdots$ 12′

19（本大题 13 分）

解：（I）函数 $f(x)$ 不具有奇偶性， $\cdots\cdots\cdots$ 1′

理由如下：

定义域：$\{x|x\neq-1\}$，因为定义域不关于原点对称， $\cdots\cdots\cdots$ 3′

（或者因为 $f(2)=\frac{1}{3}$，$f(-2)=7$，

所以 $f(-2)\neq f(2)$，且 $f(-2)\neq -f(2)$） $\cdots\cdots\cdots$ 3′

所以函数 $f(x)$ 不具有奇偶性； $\cdots\cdots\cdots$ 4′

（II）证明：$f(x)=\frac{2x-3}{x+1}=\frac{2(x+1)-5}{x+1}=2-\frac{5}{x+1}$，

任取 x_1，$x_2\in(-1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$ $\cdots\cdots\cdots$ 5′

$f(x_1)-f(x_2)=(2-\frac{5}{x_1+1})-(2-\frac{5}{x_2+1})$

$=\frac{5}{x_2+1}-\frac{5}{x_1+1}=\frac{5(x_1+1)-5(x_2+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$

$=\frac{5(x_1-x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}$， $\cdots\cdots\cdots$ 7′

又由 $-1<x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0$，$x_1+1>0$，$x_2+1>0$，

故 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$， $\cdots\cdots\cdots$ 8′

所以 $f(x)$ 在（-1，+∞）是增函数；　　　　　　　　　　　　　· · · · · · · · · 9′

（III）由（Ⅱ）知，$f(x)$ 在[1，4]单调递增，　　　　　　· · · · · · · · · 10′

所以 $f(x)_{min}=f(1)=-\frac{1}{2}$，$f(x)_{max}=f(4)=1$，　　　　　　· · · · · · · · · 12′

故 $f(x)$ 在[1，4]上的值域是$[-\frac{1}{2}，1]$.　　　　　　　　　　　· · · · · · · · · 13′

20.（本大题 13 分）

【解答】解：(1) 由于 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(1)=-f(-1)$，

∴$2|1-a|+1=-(-2|-1-a|-1)$，解得 $a=0$，　　　　　　· · · · · · · · · 2′

经检验，$a=0$ 符合题意，故实数 a 的值为 0；　　　　　　· · · · · · · · · 3′

（2）当 $a=1$ 时，　，

当 $x\in[0，1)$ 时，$f(x)=-2x^2+3x$，此时的最大值为$f(\frac{3}{4})=\frac{9}{8}$，　　　· · · · · · · · · 4′

当 $x\in[1，4]$时，$f(x)=2x^2-x$ 在[1，4]上单调递增，

此时的最大值为 $f(4)=2\times4^2-4=28$，　　　　　　　　　　· · · · · · · · · 6′

综上，函数 $f(x)$ 在区间[0，4]上的最大值为 28；　　　　　　　　· · · · · · · · · 7′

（3）依题意，对 $\forall x\in[\frac{1}{2}，1]$，$2x|x-a|+x<2x$ 恒成立，即 $|x-a|<\frac{1}{2}$恒成立，　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　· · · · · · · · · 9′

由$|x-a|<$得$a-\frac{1}{2}<x<a+\frac{1}{2}$，　　　　　　　　　　　· · · · · · · · · 10′

∴$\begin{cases}a-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\\a+\frac{1}{2}>1\end{cases}$，解得$\frac{1}{2}<a<1$，　　　　　　　　　　　　· · · · · · · · · 12′

∴实数 a 的取值范围为$(\frac{1}{2}，1)$.　　　　　　　　　　　　　　· · · · · · · · · 13′

21.（本大题 13 分）

【解析】(1) 当 $x\in[0，1]$ 时，总有 $g(x)=x^2\geqslant0$，满足①　　　· · · · · · · · · 2′

当 $x_1 \geqslant 0$， $x_2 \geqslant 0$， $x_1 + x_2 \leqslant 1$时，

$g(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \geqslant x_1^2 + x_2^2 = g(x_1) + g(x_2)$，满足②，

所以函数 $g(x)$ 为 G 函数. ……… 5′

（2） $h(x) = 2^x - b$ （ $x \in [0，1]$ ）为增函数， $h(x) \geqslant h(0) = 1 - b \geqslant 0$，

$\therefore b \leqslant 1$. ……… 7′

由 $h(x_1 + x_2) \geqslant h(x_1) + h(x_2)$，得 $2^{x_1 + x_2} - b \geqslant 2^{x_1} - b + 2^{x_2} - b$. ……… 8′

即 $b \geqslant 1 - (2^{x_1} - 1)(2^{x_2} - 1)$，因为 $x_1 \geqslant 0$， $x_2 \geqslant 0$， $x_1 + x_2 \leqslant 1$.

所以 $0 \leqslant (2^{x_1} - 1)(2^{x_1} - 1) < 1$； ……… 10′

$\therefore 0 < 1 - (2^{x_1} - 1)(2^{x_1} - 1) \leqslant 1$.

当 $x_1 = x_2 = 0$ 时， $(1 - (2^{x_1} - 1)(2^{x_1} - 1))_{max} = 1$； $\therefore b \geqslant 1$. … 12′

综合上述： $b \in \{1\}$. ……… 13 ′

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！