

高三数学参考答案

1. C 因为 $A = \{x | x > 4 \text{ 或 } x < 2\}$, $B = \{x | x < 3\}$, 所以 $A \cap B = \{x | x < 2\}$.
2. D 因为 $z = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1+i$, 所以 $\bar{z} = 1-i$, 故 $z - \bar{z} = 2i$.
3. B 因为 $a \parallel b$, 所以 $3(2m+1) = 5(m-1)$, 所以 $m = -8$.
4. A 因为 $a = \log_{0.3} 2 < \log_{0.3} 1 = 0$, $b = 3^{0.2} > 3^0 = 1$, $c = 0.2^{0.3} \in (0, 1)$, 所以 $b > c > a$.
5. B 因为 $\triangle OFM$ 的外接圆与抛物线 C 的准线相切, 所以 $\triangle OFM$ 的外接圆的圆心到准线的距离等于圆的半径. 因为圆的面积为 36π , 所以圆的半径为 6, 又因为圆心在 OF 的垂直平分线上, $|OF| = \frac{p}{2}$, 所以 $\frac{p}{2} + \frac{p}{4} = 6$, $p = 8$.
6. D $f(x) = 2\sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} + x) \cos(\frac{\pi}{4} - x) = \sqrt{2} \cos 2x$, $g(x) = \sin 2x - 2\cos^2 x + 1 = \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos(2x - \frac{3\pi}{4})$, 故将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度可得到 $g(x)$ 的图象.
7. C 在三棱锥 $C-ABD$ 中, 底面 ABD 是以 AB 为斜边的直角三角形. 设底面 ABD 外接圆的圆心为 O' , 则其半径 $r = 4$, 设三棱锥 $C-ABD$ 外接球的球心为 O , 半径为 R , 因为二面角 $A-BD-C$ 为 $\frac{\pi}{3}$, 所以点 C 到底面的距离为 $2\sqrt{3}$, 且点 C 在底面的射影为 AD 的中点 E , 所以 $O'E = 2\sqrt{3}$. 设球心 O 到底面 ABD 的距离为 d , 则 $r^2 + d^2 = R^2$, 且 $O'E^2 + (2\sqrt{3} - d)^2 = R^2$, 解得 $R^2 = \frac{52}{3}$, 所以 $S = 4\pi R^2 = \frac{208}{3}\pi$.
8. A 因为 $a_n a_{n+1} = n$, $a_1 = 1$, 所以 $a_2 = 1$, 且当 $n \geq 2$ 时, $a_{n-1} a_n = n-1$, 所以 $a_n a_{n+1} - a_{n-1} a_n = 1$, 所以 $\frac{1}{a_n} = a_{n+1} - a_{n-1}$, 所以 $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} = a_3 - a_1 + a_4 - a_2 + a_5 - a_3 + \dots + a_{n+1} - a_{n-1} = -a_1 - a_2 + a_n + a_{n+1} = a_n + a_{n+1} - 2$. 因为 $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq a_n + a_{n+1} - 2^\lambda$, 所以 $a_n + a_{n+1} - 2 \leq a_n + a_{n+1} - 2^\lambda$, 所以 $2^\lambda \leq 2$, 故 $\lambda \leq 1$.
9. BD 因为早睡群体的睡眠指数不一定比晚睡群体的睡眠指数高, 所以 A 错误; 因为早睡群体的睡眠指数的 10 个样本数据中 85 出现次数最多, 所以 B 正确; 因为晚睡群体的睡眠指数的第 60 百分位数为 $\frac{66+68}{2} = 67$, 所以 C 错误; 由样本数据可知, 早睡群体的睡眠指数相对比较稳定, 所以方差小, 故 D 正确.
10. AD 因为 $a^2 - ab = a(a-b) > 0$, 所以 $a^2 > ab$, 因为 $ab - b^2 = b(a-b) > 0$, 所以 $ab > b^2$, 所以 $a^2 > ab > b^2$, 故 A 正确; 因为 $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2 + 2} \geq 2$ 的等号成立条件 $x^2 + 2 = \frac{1}{x^2 + 2}$ 不成立, 所以 B 错误; 因为 $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq (\frac{a+b}{2})^2 = 1$, 所以 $a^2 + b^2 \geq 2$, 故 C 错误;

因为 $\frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}(x+2-x)(\frac{1}{x} + \frac{1}{2-x}) = \frac{1}{2}(2 + \frac{2-x}{x} + \frac{x}{2-x}) \geq \frac{1}{2}(2+2) = 2$,

当且仅当 $\frac{1}{x} = \frac{1}{2-x}$, 即 $x=1$ 时, 等号成立, 所以 D 正确.

11. BCD 对于 A, 因为 $A(0,5), B(-5,0)$, 所以直线 AB 的方程为 $x-y+5=0$, 圆心 $C(-3, 4)$ 到直线 AB 的距离为 $\frac{|-3-4+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{2}$, 又因为圆 C 的半径 $r=2\sqrt{2}$, 所以直线 AB 截圆 C 所得的弦长为 $2 \times \sqrt{8 - (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{6}$, A 错误.

对于 B, 易知 $|AB|=5\sqrt{2}$, 要想 $\triangle PAB$ 的面积最大, 只需点 P 到直线 AB 的距离最大, 而点 P 到直线 AB 的距离的最大值为 $2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, 所以 $\triangle PAB$ 的面积的最大值为 $\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 15$, B 正确.

对于 C, 当点 P 在直线 AB 上方时, 点 P 到直线 AB 的距离的范围是 $(0, r + \sqrt{2})$, 即 $(0, 3\sqrt{2})$, 由对称性可知, 此时满足到直线 AB 的距离为 $\sqrt{2}$ 的 P 点位置有 2 个. 当点 P 在直线 AB 下方时, 点 P 到直线 AB 的距离的范围是 $(0, r - \sqrt{2}]$, 即 $(0, \sqrt{2}]$, 此时满足到直线 AB 的距离为 $\sqrt{2}$ 的 P 点位置只有 1 个. 故满足到直线 AB 的距离为 $\sqrt{2}$ 的 P 点位置共有 3 个, C 正确.

对于 D, 由题意知 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CA}) \cdot (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{PC}^2 + \overrightarrow{PC} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$. 又因为 $A(0,5), B(-5,0), C(-3,4)$, 所以 $\overrightarrow{CA} = (3,1), \overrightarrow{CB} = (-2,-4)$, 故 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 3 \times (-2) + 1 \times (-4) = -10, \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = (1,-3)$. 设点 $D(x_0, y_0)$ 满足 $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD}$, 则 $\overrightarrow{CD} = (x_0+3, y_0-4)$, 故 $\begin{cases} x_0+3=1, \\ y_0-4=-3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_0=-2, \\ y_0=1, \end{cases}$ 即 $D(-2,1), |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{10}$, 所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC}^2 + \overrightarrow{PC} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 8 + |\overrightarrow{PC}| \cdot |\overrightarrow{CD}| \cdot \cos \langle \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CD} \rangle - 10 = -2 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{10} \cos \langle \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CD} \rangle = -2 + 4\sqrt{5} \cos \langle \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CD} \rangle$. 又因为 $4\sqrt{5} \cos \langle \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CD} \rangle \in [-4\sqrt{5}, 4\sqrt{5}]$, 所以 $-2 + 4\sqrt{5} \cos \langle \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CD} \rangle \in [-2 - 4\sqrt{5}, -2 + 4\sqrt{5}]$, 即 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围为 $[-2 - 4\sqrt{5}, -2 + 4\sqrt{5}]$, D 正确.

12. ACD 因为 $f(x+2) + f(x) = f(2026)$, 所以 $f(x+4) + f(x+2) = f(2026)$, 两式相减得 $f(x+4) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 的周期为 4. 因为 $f(x+1) - 1$ 是奇函数, 所以 $f(-x+1) - 1 = -f(x+1) + 1$, 所以 $f(-x+1) + f(x+1) = 2$, 即 $f(-x) + f(x+2) = 2$, 所以 $f(1) = 1$. 因为 $f(x+2) + f(x) = f(2026) = f(2)$, 所以 $f(4) = 0$, 即 $f(0) = 0$. 因为 $f(-x) + f(x+2) = 2$, 所以 $f(0) + f(2) = 2$, 所以 $f(2) = 2$, 所以 $f(x+2) + f(x) = 2$, 所以 $f(3) + f(1) = 2$, 故 A 正确.

因为 $f(-x) + f(x+2) = 2$, 所以 $f(-1) + f(3) = 2$, 即 $f(3) + f(3) = 2$, 所以 $f(3) = 1$. 因为 $f(2023) + f(2025) = f(3) + f(1) = 2, f(2024) = f(0) = 0$, 所以 B 错误.

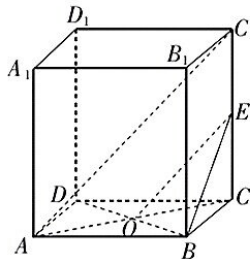
因为 $f(2022) + f(2024) = f(2) + f(0) = 2, f(2023) = f(3) = 1$, 所以 C 正确.

因为 $\sum_{i=1}^{2024} f(i) = 506[f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] = 506 \times 4 = 2024$, 所以 D 正确.

13. -2 $f'(x) = x - 2 - ae^x$, 由 $f'(0) = -2 - a = 0$, 得 $a = -2$.

14. 60 由题意可知凉菜选择方案共有 $C_4^2 = 6$ 种, 饮品选择方案共有 $C_3^2 + C_1^1 = 10$ 种, 因此该套餐的供餐方案共有 $6 \times 10 = 60$ 种.

15. $2\sqrt{3}$ 连接 AC , 交 DB 于点 O , 取 CC_1 的中点 E , 连接 OE, BE . 因为 $AC_1 \parallel OE$, 所以 BD 与 AC_1 所成的角为 $\angle BOE$ (或其补角). 令 $EC = x$, 在 $\triangle BEO$ 中, 由 $AB = 8, AD = 6$, 得 $OB = 5$. 又 $OE = \sqrt{x^2 + 25}, BE = \sqrt{x^2 + 36}$, $\cos \angle BOE = \frac{\sqrt{7}}{10}$, 由余弦定理得 $\frac{OE^2 + OB^2 - BE^2}{2OE \cdot OB} = \frac{\sqrt{7}}{10}$, 解得 $x = \sqrt{3}$, 所以 $CC_1 = 2\sqrt{3}$.



16. $\frac{1}{2}$ 由题意可知点 (a, b) 一定在其蒙日圆上, 所以 $a^2 + b^2 = \frac{7}{3}b^2$, 所以 $(\frac{b}{a})^2 = \frac{3}{4}$, 故椭圆 C 的离心率为 $\sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2} = \frac{1}{2}$.

17. 解: (1) 因为 $2S_n + a_n - 1 = 0$,

所以当 $n=1$ 时, $a_1 = \frac{1}{3}$, 1 分

当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} + a_{n-1} - 1 = 0$, 两式相减得 $3a_n = a_{n-1}$, 2 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{1}{3}$ 为首项, $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列, 4 分

则 $a_n = \frac{1}{3} \times (\frac{1}{3})^{n-1} = (\frac{1}{3})^n$ 5 分

(2) 因为 $b_n = \log_{27} a_n = -\frac{n}{3}$, 6 分

所以 $\frac{1}{b_n b_{n+1}} = \frac{9}{n(n+1)} = 9(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$, 8 分

所以 $T_n = 9(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 9(1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{9n}{n+1}$ 10 分

18. 解: (1) 因为 $P(M < 248) = 0.1$, 所以 $P(M \geq 248) = 1 - 0.1 = 0.9$, 1 分

则这 3 包中恰有 2 包质量不小于 248 g 的概率为 $C_3^2 \times 0.9^2 \times 0.1 = 0.243$ 5 分

(2) 因为 $P(M < 248) = 0.1$, 所以 $P(248 < M < 252) = (0.5 - 0.1) \times 2 = 0.8$ 7 分

依题意可得 $X \sim B(K, 0.8)$, 8 分

所以 $D(X) = K \times 0.8 \times (1 - 0.8) = 0.16K$, 10 分

因为 $D(X) > 320$, 所以 $K > 2000$, 11 分

又 K 为正整数, 所以 K 的最小值为 2001. 12 分

19. 解: (1) 因为 $a \sin B = b \sin(A + \frac{\pi}{3})$, 所以 $\sin B (\frac{1}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A) - \sin A \sin B = 0$,

所以 $\sin B(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A - \frac{1}{2}\sin A) = 0$ 2分

因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B \neq 0$, 所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A = \frac{1}{2}\sin A$, 所以 $\tan A = \sqrt{3}$, 4分

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 5分

(2)解法 1: 因为 AD 为角平分线, 所以 $S_{\triangle DAB} + S_{\triangle DAC} = S_{\triangle ABC}$, 6分

所以 $\frac{1}{2}AB \cdot AD \sin \angle DAB + \frac{1}{2}AC \cdot AD \sin \angle DAC = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin \angle BAC$.

因为 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, $\angle DAB = \angle DAC = \frac{\pi}{6}$, $AD = \sqrt{3}$,

所以 $\frac{\sqrt{3}}{4}AB + \frac{\sqrt{3}}{4}AC = \frac{\sqrt{3}}{4}AB \cdot AC$,

所以 $AB + AC = AB \cdot AC$, 即 $c + b = bc$ 8分

因为 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{3} = (b+c)^2 - 3bc$, $a = 3\sqrt{2}$,

所以 $(b+c)^2 - 3(b+c) - 18 = 0$, 10分

所以 $b+c = 6$ 或 $b+c = -3$ (舍去), 所以 $b+c = 6$ 12分

解法 2: 由点 D 分别向 AB, AC 作垂足 E, F , 因为 AD 为角平分线,

所以 $DE = DF = \frac{AD}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $BD = \frac{\sqrt{3}}{2\sin B}$, $CD = \frac{\sqrt{3}}{2\sin C}$, 6分

又因为 $BD + CD = BC = 3\sqrt{2}$, 所以 $\frac{\sqrt{3}}{2\sin B} + \frac{\sqrt{3}}{2\sin C} = 3\sqrt{2}$. ①

由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = 2\sqrt{6}$,

所以 $\frac{1}{\sin B} = \frac{2\sqrt{6}}{b}$, $\frac{1}{\sin C} = \frac{2\sqrt{6}}{c}$, 代入①式得 $\frac{b+c}{bc} = 1$, 即 $b+c = bc$ 8分

如下同解法 1 参考答案解答过程.

20. (1)证明: 取 CD 的中点 F , 连接 EF, PF, OF , 因为 E 为 PC 的中点, 所以 $EF \parallel PD$.

又 $EF \not\subset$ 平面 PAD , $PD \subset$ 平面 PAD , 所以 $EF \parallel$ 平面 APD

..... 1分

因为 $OE \parallel$ 平面 PAD , $OE \cap EF = E$, 所以平面 $OEF \parallel$ 平面 PAD .

..... 2分

因为平面 $ABCD \cap$ 平面 $OEF = OF$, 平面 $ABCD \cap$ 平面 $PAD = AD$,

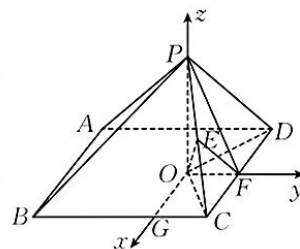
所以 $OF \parallel AD$ 3分

因为 $AD \perp CD$, 所以 $OF \perp CD$ 4分

由 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 可得 $PO \perp CD$. 又 $PO \cap OF = O$, 所以 $CD \perp$ 平面 POF , 从而 $PF \perp CD$.

..... 5分

因为 PF 是 CD 的中垂线, 所以 $PC = PD$ 6分



(2)解:因为 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 PC 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle PCO = 60^\circ$,
 又 $OC \perp OD, AB = CD = 2, OF = \frac{1}{2}CD = 1, OC = \sqrt{2}OF = \sqrt{2}$, 所以 $PO = \sqrt{3}CO = \sqrt{6}$. ……

…………… 7分
 作 $OG \perp BC$, 垂足为 G , 分别以 $\vec{OG}, \vec{OF}, \vec{OP}$ 的方向为 x, y, z 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $D(-1, 1, 0), B(1, -3, 0), C(1, 1, 0), P(0, 0, \sqrt{6})$,

$\vec{BC} = (0, 4, 0), \vec{PC} = (1, 1, -\sqrt{6}), \vec{DC} = (2, 0, 0)$. …… 8分
 设平面 PBC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \vec{BC} = 4y_1 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \vec{PC} = x_1 + y_1 - \sqrt{6}z_1 = 0, \end{cases}$ 令 $z_1 = 1$, 得 $\mathbf{m} = (\sqrt{6}, 0, 1)$. …… 9分

设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{DC} = 2x_2 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{PC} = x_2 + y_2 - \sqrt{6}z_2 = 0, \end{cases}$ 令 $y_2 = \sqrt{6}$, 得 $\mathbf{n} = (0, \sqrt{6}, 1)$. …… 10分

所以 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{1}{7}$, 即平面 PBC 与平面 PCD 夹角的余弦值为 $\frac{1}{7}$. …

…………… 12分

21. (1)解: 设右焦点为 $F(c, 0)$, 一条渐近线方程为 $bx - ay = 0$, …… 1分

所以该焦点到渐近线的距离为 $\frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b = 1$. …… 2分

因为 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{42}}{6}$, 所以 $a = \sqrt{6}, c = \sqrt{7}$. …… 3分

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{6} - y^2 = 1$. …… 4分

(2)证明: 当直线 l 的斜率不存在时, l 的方程为 $x = \pm\sqrt{6}$, 此时 $|PQ| = 2, S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{6} = \sqrt{6}$. …… 5分

当直线 l 的斜率存在时, 不妨设 $l: y = kx + m$, 且 $k \neq \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$.

联立方程组 $\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{6} - y^2 = 1, \end{cases}$ 得 $(1 - 6k^2)x^2 - 12mkx - 6m^2 - 6 = 0$. …… 6分

由 $\Delta = 144m^2k^2 + 4(1 - 6k^2)(6m^2 + 6) = 0$, 得 $6k^2 = m^2 + 1$. …… 7分

联立方程组 $\begin{cases} y = kx + m, \\ y = \frac{\sqrt{6}}{6}x, \end{cases}$ 得 $x = \frac{\sqrt{6}m}{1 - \sqrt{6}k}$. …… 8分

不妨设 l 与 $y = \frac{\sqrt{6}}{6}x, y = -\frac{\sqrt{6}}{6}x$ 的交点分别为 P, Q , 则 $x_P = \frac{\sqrt{6}m}{1 - \sqrt{6}k}$. 同理可得 $x_Q =$

$-\frac{\sqrt{6}m}{1+\sqrt{6}k}$, 所以 $|PQ| = \sqrt{1+k^2} |x_P - x_Q| = \frac{2\sqrt{6}|m| \cdot \sqrt{k^2+1}}{|1-6k^2|}$ 9分

因为坐标原点 O 到 l 的距离 $d = \frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$, 所以 $S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} |PQ| \cdot d = \frac{\sqrt{6}m^2}{|1-6k^2|}$ 10分

因为 $6k^2 = m^2 + 1$, 所以 $S_{\triangle OPQ} = \sqrt{6}$. 故 $\triangle OPQ$ 的面积为定值, 定值为 $\sqrt{6}$ 12分

22. 解: (1) $f'(x) = \frac{1-a-\ln x}{x^2}$, 1分

当 $a \geq 1$ 时, $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减. 2分

当 $a < 1$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = e^{1-a}$ 3分

$x \in [1, e^{1-a})$, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[1, e^{1-a})$ 上单调递增, 4分

$x \in (e^{1-a}, +\infty)$, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(e^{1-a}, +\infty)$ 上单调递减. 5分

(2) 由(1)知, 令 $a = 0$, 得 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在 $[1, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 则 $f(x) \leq$

$f(e) = \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$ 6分

因为 $x_1 > x_2 \geq 1$, 所以 $(x_1 - x_2)^{x_1 x_2} = x_1^{x_2} x_2^{x_1}$, 即 $x_1 x_2 \ln(x_1 - x_2) = x_2 \ln x_1 + x_1 \ln x_2$, 即 $\ln(x_1 - x_2) = \frac{\ln x_1}{x_1} + \frac{\ln x_2}{x_2}$, 7分

因为 x_1, x_2 为正整数, 所以 $x_1 - x_2 \geq 1$.

当 $x_1 - x_2 = 1$ 时, $x_1^{x_2} x_2^{x_1} = 1$,

因为 $x_2 \geq 1, x_1 \geq 2$, 所以 $x_1^{x_2} x_2^{x_1} > 1$, 这与 $x_1^{x_2} x_2^{x_1} = 1$ 矛盾, 不符合题意. 8分

当 $x_1 - x_2 > 1$ 时, 因为 $\frac{\ln x_1}{x_1} < \frac{1}{2}, \frac{\ln x_2}{x_2} < \frac{1}{2}$, 所以 $\ln(x_1 - x_2) = \frac{\ln x_1}{x_1} + \frac{\ln x_2}{x_2} < 1$, 9分

所以 $x_1 - x_2 < e$, 得 $x_1 - x_2 = 2$, 即 $\ln 2 = \frac{\ln x_1}{x_1} + \frac{\ln x_2}{x_2}$ 10分

经检验, 当 $x_2 = 1, x_1 = 3$ 时, 不符合题意,

当 $x_2 = 2, x_1 = 4$ 时, 符合题意,

当 $x_2 = 3, x_1 = 5$ 时, 因为 $3^5 \times 5^3 < 2^{15}$, 所以 $\frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 5}{5} < \ln 2$, 11分

当 $x_2 \geq 4$ 时, $\frac{\ln x_1}{x_1} \leq \frac{\ln 6}{6} < \frac{\ln 5}{5}, \frac{\ln x_2}{x_2} \leq \frac{\ln 4}{4} < \frac{\ln 3}{3}$,

所以 $\frac{\ln x_1}{x_1} + \frac{\ln x_2}{x_2} < \frac{\ln 5}{5} + \frac{\ln 3}{3} < \ln 2$.

综上, 仅存在 $x_1 = 4, x_2 = 2$ 满足条件. 12分