2024 北京延庆高二（上）期末

数　　学

本试卷共 4 页，150 分，考试时长 120 分钟.

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2\le 4\}$，集合 $B=\{x|x>0\}$，则 $A\cup B=$（　）

A. $(-\infty,-2]$　　B. $[-2,0)$　　C. $[-2,+\infty)$　　D. $(0,2]$

2. 已知双曲线的一个焦点是 $(5,0)$，渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{4}x$，则双曲线的离心率为（　）

A. $\frac{5}{3}$　　B. $\frac{5}{4}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

3. 复数 $z=\mathrm{i}(2+3\mathrm{i})$，则 z 的虚部为（　）

A. 2　　B. -3　　C. $2\mathrm{i}$　　D. $3\mathrm{i}$

4. 已知 P 是椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的动点，则 P 到椭圆的两个焦点的距离之和为（　）

A. 3　　B. 4　　C. $2\sqrt{5}$　　D. 6

5. 到定点 $F(1,0)$ 的距离比到 y 轴的距离大 1 的动点且动点不在 x 轴的负半轴的轨迹方程是（　）

A. $y^2=8x$　　B. $y^2=4x$　　C. $y^2=2x$　　D. $y^2=x$

6. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则点 C_1 到平面 A_1BD_1 的距离为（　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

7. 已知圆 $x^2+y^2=4$ 上一点 A 和圆 $x^2+y^2-4x-4y=0$ 上一点 B，则 $|AB|$ 的最大值为（　）

A. $2+4\sqrt{2}$　　B. $2+2\sqrt{2}$　　C. $4\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

8. “$1<m<2$”是“方程 $\frac{x^2}{2-m}+\frac{y^2}{m-1}=1$ 表示椭圆”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 若不论 k 为何值，直线 $y=k(x-2)+b$ 与曲线 $x^2+y^2=9$ 总有公共点，则 b 的取值范围是（　）.

A. $(-\sqrt{5},\sqrt{5})$　　B. $[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$　　C. $(-2,2)$　　D. $[-2,2]$

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(1,1)$，$B(2,1)$，$C(2,2)$，P 是圆 $M:x^2+(y-4)^2=2$ 上一点，Q 是

$\triangle ABC$ 边上一点，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的最大值是（　）

A. $8+2\sqrt{2}$　　B. 12

C. $8+4\sqrt{2}$　　D. 16

第二部分 （非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 椭圆 $3x^2+4y^2=12$ 的长轴长为________.

12. 双曲线 $\frac{y^2}{4}-x^2=1$ 的渐近线方程是_________.

13. 已知圆 $x^2+y^2=2$，求经过点 $(1,1)$ 的圆的切线方程________.

14. 已知方程 $2x^2-x|y|+4=0$，求 y 的取值范围________.

15. 若曲线 $F(x,y)=0$ 上的两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 满足 $x_1\leqslant x_2, y_1\geqslant y_2$，则称这两点为曲线 $F(x,y)=0$ 上的一对“双胞点”.下列曲线中：① $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(y<0)$；② $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1(xy>0)$；③ $y^2=4x(y>0)$；④ $|x|+|y|=1$.存在“双胞点”的曲线序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16. 根据下列条件，分别求出曲线的标准方程：

（1）焦距是 6，过点 $(0,5)$，焦点在 y 轴上的椭圆；

（2）一个焦点是 $(5,0)$，一条渐近线方程为 $3x-4y=0$ 的双曲线；

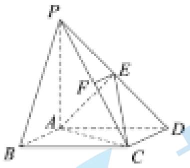
（3）焦点到准线的距离是 4，而且焦点在 y 轴上的抛物线.

17. 已知过点 $P(0,5)$ 的直线 l 被圆 $C: x^2+y^2+4x-12y+24=0$ 所截得的弦长为 $4\sqrt{3}$.

（1）写出圆 C 的标准方程及圆心坐标、半径；

（2）求直线 l 的方程.

18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，侧棱 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，点 E 为棱 PD 的中点，$AB=1$，$AD=AP=2$.



（1）求平面 ACE 与平面 PAB 夹角的余弦值；

（2）若 F 为棱 PC 的中点，则棱 PA 上是否存在一点 G，使得 $PC\perp$ 平面 EFG.若存在，求线段 AG 的长；若不存在，请说明理由.

19. 已知抛物线 C：$y^2=4x$，过焦点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A，B 两点，定点 M（5，0）.

（1）若直线 l 的斜率为 1，求△ABM 的面积；

（2）若△AMB 是以 M 为直角顶点的直角三角形，求直线 l 的方程.

20. 已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的短半轴长为 1，焦距为 $2\sqrt{3}$.

（1）求椭圆 E 的离心率；

（2）设椭圆 E 的右顶点为 A，过点 $P(4,0)$ 且斜率为 $k(k\neq 0)$ 的直线交椭圆 E 于不同的两点 B,C，直线 AB,AC 分别与直线 $x=4$ 交于点 M,N. 求 $|PM|+|PN|$ 的取值范围.

21. 给定正整数 $n\geq 2$，设集合 $M=\{\alpha|\alpha=(t_1,t_2,\cdots,t_n),t_k\in\{0,1\},k=1,2,\cdots,n\}$. 对于集合 M 中的任意元素 $\beta=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\gamma=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，记 $\beta\cdot\gamma=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$. 设 $A\subseteq M$，且集合 $A=\{\alpha_i|\alpha_i=(t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{in}),i=1,2,\cdots,n\}$，对于 A 中任意元素 α_i,α_j，若 $\alpha_i\cdot\alpha_j=\begin{cases}p, & i=j,\\ 1, & i\neq j,\end{cases}$ 则称 A 具有性质 $T(n,p)$.

（1）判断集合 $A=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ 是否具有性质 $T(3,2)$？说明理由；

（2）判断是否存在具有性质 $T(4,p)$ 的集合 A，并加以证明.

参考答案

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】C

【解析】

【分析】化简 $A=\{x\,|-2\le x\le 2\}$，再由集合并集的运算即可得解.

【详解】由题意 $A=\{x\,|\,x^2\le 4\}=\{x\,|-2\le x\le 2\}$，$B=\{x|x>0\}$，

所以 $A\cup B=\{x\,|-2\le x\le 2\}\cup\{x|x>0\}=\{x\,|\,x\ge -2\}=[-2,+\infty)$.

故选：C.

2.【答案】B

【解析】

【分析】根据题意求出 a,c，再根据离心率公式即可得解.

【详解】设双曲线的实轴长为 $2a$，虚轴长为 $2b$，焦距为 $2c$，

由题意可得双曲线的焦点在 x 轴上，且 $c=5$，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{4}$，

所以 $b=\dfrac{3}{4}a$，

又 $a^2+b^2=c^2$，所以 $\dfrac{25}{16}a^2=25$，解得 $a^2=16$，所以 $a=4$，

所以双曲线的离心率 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{4}$.

故选：B.

3.【答案】A

【解析】

【分析】先根据复数的乘法运算求解出 z，则复数的虚部可知.

【详解】因为 $z=\mathrm{i}(2+3\mathrm{i})=2\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2=-3+2\mathrm{i}$，所以 z 的虚部为 2，

故选：A.

4.【答案】D

【解析】

【分析】根据椭圆方程求解出 a 的值，再由椭圆定义可知结果.

【详解】由椭圆方程可知：$a=3$，

由椭圆定义可知：P 到椭圆的两个焦点的距离之和为 $2a=6$，

故选：D.

5.【答案】B

【解析】

【分析】根据抛物线的定义即可得解.

【详解】因为动点到定点 $F(1,0)$ 的距离比到 y 轴的距离大 1，

所以动点到定点 $F(1,0)$ 的距离等于到 $x=-1$ 的距离，

所以动点的轨迹是以 $F(1,0)$ 为焦点， $x=-1$ 为准线的抛物线，

所以动点的轨迹方程是 $y^2=4x$.

故选：B.

6.【答案】B

【解析】

【分析】根据等体积法可知 $V_{C_1-A_1BD_1}=V_{B-A_1C_1D_1}$，然后计算出 $S_{\triangle A_1BD_1}, S_{\triangle A_1C_1D_1}$，结合三棱锥体积公式则点 C_1 到平面 A_1BD_1 的距离可求.

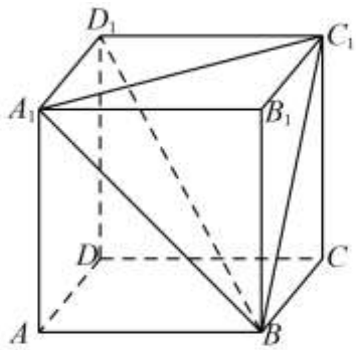
【详解】设点 C_1 到平面 A_1BD_1 的距离为 d，

因为 $V_{C_1-A_1BD_1}=V_{B-A_1C_1D_1}$，所以 $\frac{1}{3}\times S_{\triangle A_1BD_1}\times d=\frac{1}{3}\times S_{\triangle A_1C_1D_1}\times BB_1$，

又因为 $S_{\triangle A_1BD_1}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$， $S_{\triangle A_1C_1D_1}=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$，

所以 $\frac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\times d=\frac{1}{3}\times 2\times 2$，所以 $d=\sqrt{2}$，

故选：B.



7.【答案】A

【解析】

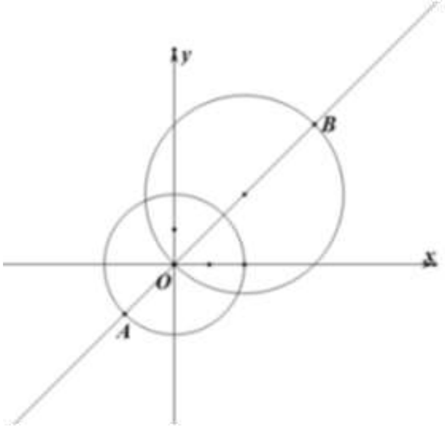
【分析】利用两圆的位置关系数形结合计算即可.

【详解】易知圆 $x^2+y^2=4$ 的圆心为原点 $(0,0)$，半径 $r_1=2$，

由圆 $x^2+y^2-4x-4y=0\Rightarrow(x-2)^2+(y-2)^2=8$，故其圆心为 $(2,2)$，半径 $r_2=2\sqrt{2}$，

两圆圆心距为 $d=\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2}\in\left(2\sqrt{2}-2,2\sqrt{2}+2\right)$，所以两圆相交，

则$|AB|_{\max}=d+r_1+r_2=4\sqrt{2}+2$，如图所示.



故选：A

8.【答案】B

【解析】

【分析】根据“$1<m<2$”与“方程$\frac{x^2}{2-m}+\frac{y^2}{m-1}=1$表示椭圆”的互相推出关系判断出属于何种条件.

【详解】当$1<m<2$时，取$m=\frac{3}{2}$，此时$\frac{x^2}{2-m}+\frac{y^2}{m-1}=1\Leftrightarrow x^2+y^2=2$，故方程表示圆；

当方程$\frac{x^2}{2-m}+\frac{y^2}{m-1}=1$表示椭圆时，则$\begin{cases}2-m>0\\m-1>0\\2-m\neq m-1\end{cases}$，

解得$\left\{m\middle|1<m<\frac{3}{2}\text{或}\frac{3}{2}<m<2\right\}$，

此时$\left\{m\middle|1<m<\frac{3}{2}\text{或}\frac{3}{2}<m<2\right\}$是$\{m|1<m<2\}$的真子集，

所以$\left\{m\middle|1<m<\frac{3}{2}\text{或}\frac{3}{2}<m<2\right\}$可推出$\{m|1<m<2\}$；

综上可知，“$1<m<2$”是“方程$\frac{x^2}{2-m}+\frac{y^2}{m-1}=1$表示椭圆”的必要而不充分条件，

故选：B.

9.【答案】B

【解析】

【分析】由题知直线恒过定点$(2,b)$，进而将问题转化为点$(2,b)$在圆内或圆上问题求解即可.

【详解】解：由直线方程可知直线恒过定点$(2,b)$，

要使直线$y=k(x-2)+b$与曲线$x^2+y^2=9$总有公共点，则点$(2,b)$在圆内或圆上，

所以$2^2+b^2\leq 9$，解得：$-\sqrt{5}\leq b\leq\sqrt{5}$.

所以，b 的取值范围是：$\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right]$.

故选：B .

10.【答案】B

【解析】

【分析】设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2$，因为 $x_2\in[1,2],y_2\in[1,2]$，所以当 $x_2=2,y_2=2$，即 Q 点与 C 点重合时，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2$ 有最大值 $2(x_1+y_1)$，问题转化为 $P(x_1,y_1)$ 在圆 $M:x^2+(y-4)^2=2$ 上，求 x_1+y_1 的最大值，

【详解】解：设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{OP}=(x_1,y_1),\overrightarrow{OQ}=(x_2,y_2)$，

所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2$，

因为 $x_2\in[1,2],y_2\in[1,2]$，

所以当 $x_2=2,y_2=2$，即 Q 点与 C 点重合时，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2$ 有最大值 $2(x_1+y_1)$，

所以问题转化为 $P(x_1,y_1)$ 在圆 $M:x^2+(y-4)^2=2$ 上，求 x_1+y_1 的最大值，

因为点 $P(x,y)$ 在圆 M 上，设点 $P(x,y)$ 所在的直线 l 为 $x+y=t$，

因为直线 l 与圆 M 有公共点，

所以圆心到直线的距离不大于半径，即 $\dfrac{|0+4-t|}{\sqrt{2}}\le\sqrt{2}$，

所以 $|t-4|\le 2$，解得 $2\le t\le 6$，即 $2\le x_1+y_1\le 6$，

所以 $4\le 2(x_1+y_1)\le 12$，

所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的最大值是 12，

故选：B

【点睛】关键点点睛：此题考查向量数量积的运算律，考查直线与圆的位置关系，解题的关键是当 $x_2=2,y_2=2$，即 Q 点与 C 点重合时，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2$ 有最大值 $2(x_1+y_1)$，问题转化为 $P(x_1,y_1)$ 在圆 $M:x^2+(y-4)^2=2$ 上，求 x_1+y_1 的最大值，然后利用直线与圆的位置关系求解即可，考查数形结合的思想，属于中档题

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】4

【解析】

【分析】将椭圆方程化为标准方程，根据椭圆的性质计算即可.

【详解】由 $3x^2+4y^2=12\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，

显然椭圆的焦点在横轴上，其实轴长为$2\times\sqrt{4}=4$.

故答案为：4

12.【答案】$y=\pm 2x$

【解析】

【详解】根据双曲线的渐近线公式得到$y=\pm\frac{a}{b}x, y=\pm 2x$

故答案为$y=\pm 2x$.

13.【答案】$x+y-2=0$

【解析】

【分析】由题可知切线的斜率存在，设出切线方程利用圆心到切线的距离为半径可求斜率，从而得到切线方程.

【详解】由题可知切线的斜率存在，设切线方程为$y-1=k\left(x-1\right)$，即$kx-y+1-k=0$，

$\therefore \frac{\left|1-k\right|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{2}$，解得$k=-1$，所以切线方程为$x+y-2=0$.

故答案为：$x+y-2=0$.

14.【答案】$(-\infty,-4\sqrt{2}]\cup[4\sqrt{2},+\infty)$

【解析】

【分析】分离出$|y|$，得$|y|=2x+\frac{4}{x}$，求出对应的$f(x)=2x+\frac{4}{x}$的值域即可求解.

【详解】当$x=0$时，原式化为$4=0$，无解，故$x\neq 0$，

则$|y|=2x+\frac{4}{x}$，由$|y|\geq 0$得$x>0$，

设$f(x)=2x+\frac{4}{x}$，由对勾函数知，

函数$f(x)$在$(0,\sqrt{2})$单调递减，$(\sqrt{2},+\infty)$单调递增，

故$\boldsymbol{f(x)_{\min}=f(\sqrt{2})=4\sqrt{2}}$，则$f(x)$的值域为$[4\sqrt{2},+\infty)$，

即$\boldsymbol{|y|\geq 4\sqrt{2}}$，则$\boldsymbol{y\geq 4\sqrt{2}}$或$\boldsymbol{y\leq -4\sqrt{2}}$.

故答案为：$(-\infty,-4\sqrt{2}]\cup[4\sqrt{2},+\infty)$

15.【答案】①④

【解析】

【分析】根据定义结合椭圆、双曲线、抛物线的性质与图象一一判定即可.

【详解】对于①$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\left(y<0\right)$，如$P_1\left(-1,-\frac{3}{2}\right),P_2\left(0,-\sqrt{3}\right)$显然符合“双胞点”定义；

对于② $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1(xy>0)$，易知其图象为双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 的图象在第一、三象限的部分，

显然该部分图象单调递增，没有符合“双胞点”定义的点；

对于③ $y^2=4x(y>0)$，易知其图象为抛物线 $y^2=4x$ 的图象在第一象限的部分，

显然该部分图象单调递增，没有符合“双胞点”定义的点；

对于④ $|x|+|y|=1$，如 $P_1(-1,0), P_2\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 显然符合“双胞点”定义；

综上①④有“双胞点”.

故答案为：①④

【点睛】思路点睛：根据“双胞点”的定义结合椭圆、双曲线、抛物线的图象与性质一一判定选项即可.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16.【答案】（1）$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$；

（2）$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$；

（3）$x^2=\pm 8y$.

【解析】

【分析】（1）根据椭圆的焦距与顶点及焦点在 y 轴上写出椭圆标准方程即可；

（2）根据双曲线的焦点及渐近线方程写出双曲线标准方程即可；

（3）根据抛物线的性质及焦点在 y 轴上写出抛物线标准方程即可.

【小问 1 详解】

由题意可设 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

可知 $\begin{cases} a^2-b^2=\left(\frac{6}{2}\right)^2 \\ a=5 \end{cases} \Rightarrow a^2=25, b^2=16$，

则椭圆的标准方程为：$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$；

【小问 2 详解】

易知双曲线的焦点在横轴上，

可设标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，

则 $a^2+b^2=5^2$，且 $bx-ay=0$ 是其一条渐近线，

即 $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$，故 $a^2=16, b^2=9$，所以双曲线的标准方程为：$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$；

【小问 3 详解】

若焦点在纵轴正半轴，可设抛物线标准方程为：$x^2=2py\left(p>0\right)$，

因为焦点到准线的距离是4，则有$p=4$，所以$x^2=8y$，

若焦点在纵轴负半轴上，可设抛物线标准方程为：$x^2=-2py\left(p>0\right)$，

因为焦点到准线的距离是4，则有$p=4$，所以$x^2=-8y$，

综上抛物线的标准方程为：$x^2=\pm 8y$.

17.【答案】（1）$\left(x+2\right)^2+\left(y-6\right)^2=16$，圆心坐标为$\left(-2,6\right)$，半径为$4$.

（2）$3x-4y+20=0$或$x=0$.

【解析】

【分析】（1）根据圆的一般方程与圆的标准方程的关系，即可求解；（2）根据直线与圆的位置关系，当直线斜率存在时，结合勾股定理和点到直线的距离公式即可求解，当直线斜率不存在时，特殊情形验证下即可.

【小问 1 详解】

由题意整理圆的方程得，标准方程为$\left(x+2\right)^2+\left(y-6\right)^2=16$，故圆心坐标为$\left(-2,6\right)$，半径为$4$.

【小问 2 详解】

由（1），又直线被圆截得的弦长为$4\sqrt{3}$，

故弦心距为$\sqrt{4^2-\left(\frac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2}=2$，

当直线斜率存在时，设直线的斜率为k,则过$P(0,5)$的直线，可设为$y=kx+5$，即$kx-y+5=0$，

$\because$直线与圆C的圆心相距为2，

$\therefore d=\frac{\left|-2k-6+5\right|}{\sqrt{k^2+\left(-1\right)^2}}=2$，解得$k=\frac{3}{4}$，

此时直线的方程为$3x-4y+20=0$，

当直线的斜率不存在时，直线的方程为$x=0$，也符合题意.

故所求直线的方程为$3x-4y+20=0$或$x=0$.

18.【答案】（1）$\frac{\sqrt{6}}{6}$；

（2）不存在，因为PC,EF不垂直.

【解析】

【分析】（1）建立合适的空间直角坐标系，利用空间向量计算面面夹角即可；

（2）设存在点G满足条件，利用线面垂直的向量关系判定即可.

【小问 1 详解】

因为底面 $ABCD$ 是矩形，侧棱 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，可知 PA,AB,AD 三线两两垂直，

如图示建立空间直角坐标系，由题意可知 $C(1,2,0),P(0,0,2),D(0,2,0)$，所以 $E(0,1,1)$，

则 $\overrightarrow{AE}=(0,1,1),\overrightarrow{AC}=(1,2,0)$，

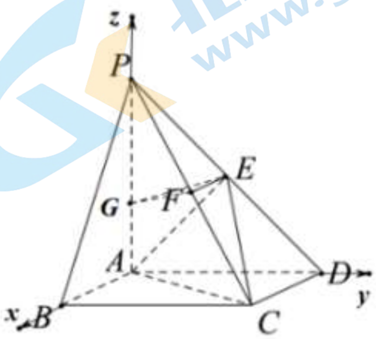
设平面 ACE 的一个法向量为 $\vec{m}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=b+c=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=a+2b=0\end{cases}$，

令 $b=-1$，则 $a=2,c=1$，即 $\vec{m}=(2,-1,1)$，

易知平面 PAB 的一个法向量为 $\vec{n}=(0,1,0)$，

设平面 ACE 与平面 PAB 的夹角为 α，

则 $\cos\alpha=\left|\cos\vec{m},\vec{n}\right|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$；



【小问 2 详解】

假设存在点 G，使得 $PC\perp$ 平面 EFG，且 $G(0,0,t)$，

根据（1）可知 $F\left(\dfrac{1}{2},1,1\right),\overrightarrow{PC}=(1,2,-2)$，则 $\overrightarrow{EF}=\left(\dfrac{1}{2},0,0\right),\overrightarrow{EG}=(0,-1,t-1)$，

若 $PC\perp$ 平面 EFG，又 $EF\subset$ 平面 EFG，所以 $PC\perp EF$，

而 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}\neq0$，则 $PC\perp EF$ 不成立，所以 $PC\perp$ 平面 EFG 不成立.

19.【答案】（1）$8\sqrt{2}$

（2）$y=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{3}(x-1)$

【解析】

【分析】（1）AB 的斜率为 1 时，$l:y=x-1$，代入抛物线方程得 $x^2-6x+1=0$，求出 $|AB|$，点 M 到直线 AB 的距离，即可求 $\triangle ABM$ 的面积；

（2）设出过焦点弦的直线方程，与抛物线方程联立消去 y，根据韦达定理表示出 $x_1+x_2=2+\dfrac{4}{k^2}$，

$x_1x_2=1$，$y_1y_2=-4$，由 $MA\perp MB$，求得 k 值，进而得出结论.

【小问 1 详解】

解：由题意 $F(1,0)$，当 AB 的斜率为 1 时，$l:y=x-1$

代入抛物线方程得 $x^2-6x+1=0$

设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$x_1+x_2=6$，$|AB|=x_1+x_2+2=8$，

点 M 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|5-1|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

$\therefore\triangle ABM$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times 8\times 2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$；

【小问 2 详解】

解：易知直线 $l\perp x$ 时不符合题意．可设焦点弦方程为 $y=k(x-1)$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

代入抛物线方程得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，则

$x_1+x_2=2+\frac{4}{k^2}$，$x_1x_2=1$，$y_1y_2=-4$

$\because MA\perp MB$，$\overrightarrow{MA}=(x_1-5,\ y_1)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2-5,\ y_2)$，

$\therefore\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=x_1x_2-5(x_1+x_2)+25+y_1y_2=22-5\times(2+\frac{4}{k^2})=0$，$\therefore k=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$.

故 L 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}(x-1)$

20.【答案】（1）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

（2）$\left(2\sqrt{3},+\infty\right)$

【解析】

【分析】（1）由短半轴，焦距及 $a^2=b^2+c^2$ 求解出 a,b,c，再根据离心率公式即可得解；

（2）设出直线方程，联立椭圆方程，利用韦达定理表达出 $|PM|+|PN|=\frac{1}{|k|}$，结合 $k^2<\frac{1}{12}$ 求得答案.

【小问 1 详解】

依题意知 $\begin{cases}b=1\\2c=2\sqrt{3}\\a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $a=2,b=1,c=\sqrt{3}$，

所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

【小问 2 详解】

由（2）得，椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，则 $A(2,0)$，

设直线 BC 的方程为 $y=k(x-4)(k\neq 0)$，

联立 $\begin{cases} y=k(x-4) \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2-32k^2x+64k^2-4=0$，

$\Delta=(32k^2)^2-4(1+4k^2)(64k^2-4)=16(1-12k^2)>0$，得 $k^2<\frac{1}{12}$，且 $k^2\neq 0$.，

设 $B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，$x_1<2,x_2<2$，

则 $x_1+x_2=\frac{32k^2}{1+4k^2},x_1x_2=\frac{64k^2-4}{1+4k^2}$，

设 $M(4,m),N(4,n)$，依题意有: $\frac{m}{2}=\frac{y_1}{x_1-2}$，$\frac{n}{2}=\frac{y_2}{x_2-2}$，

因为 $y_1y_2=k^2(x_1-4)(x_2-4)>0$，

所以 $mn=\frac{4y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}>0$，

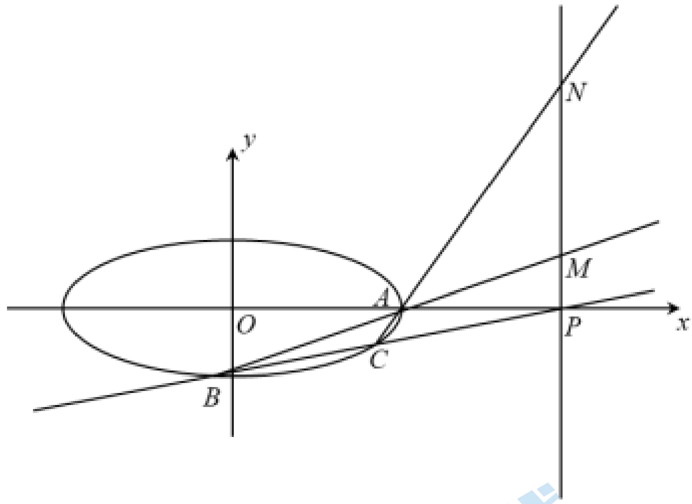
所以 $|PM|+|PN|=|m|+|n|=|m+n|=\left|\frac{2y_1}{x_1-2}+\frac{2y_2}{x_2-2}\right|$

$=\left|\frac{2k(x_1-4)}{x_1-2}+\frac{2k(x_2-4)}{x_2-2}\right|=\left|4k\left[1-\frac{x_1+x_2-4}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}\right]\right|$

$=\left|4k\left[1-\frac{\frac{32k^2}{1+4k^2}-4}{\frac{64k^2-4}{1+4k^2}-2\times\frac{32k^2}{1+4k^2}+4}\right]\right|=\frac{1}{|k|}$，

因为 $k^2<\frac{1}{12}$，且 $k^2\neq 0$，所以 $\frac{1}{|k|}>2\sqrt{3}$，

所以 $|PM|+|PN|$ 的取值范围是 $(2\sqrt{3},+\infty)$.



【点睛】方法点睛：圆锥曲线中取值范围问题的五种求解策略：

（1）利用圆锥曲线的几何性质或判别式构造不等关系，从而确定参数的取值范围；

（2）利用已知参数的范围，求新的参数的范围，解这类问题的核心是建立两个参数之间的等量关系；

（3）利用隐含的不等关系建立不等式，从而求出参数的取值范围；

（4）利用已知的不等关系建立不等式，从而求出参数的取值范围；

（5）利用求函数值域的方法将待求量表示为其他变量的函数，求其值域，从而确定参数的取值范围.

21.【答案】（1） A 具有性质 $T\left(3,2\right)$，理由见解析；

（2）不存在，证明见解析.

【解析】

【分析】（1）根据定义计算即可判定；

（2）根据定义对 P 进行讨论，一一计算即可证明.

【小问 1 详解】

对于集合 $A=\left\{\left(1,1,0\right),\left(1,0,1\right),\left(0,1,1\right)\right\}$，

根据定义可知 $\begin{cases}\left(1,1,0\right)\cdot\left(1,1,0\right)=2\\\left(1,0,1\right)\cdot\left(1,0,1\right)=2\\\left(0,1,1\right)\cdot\left(0,1,1\right)=2\end{cases}$，且 $\begin{cases}\left(1,1,0\right)\cdot\left(1,0,1\right)=1\\\left(1,0,1\right)\cdot\left(0,1,1\right)=1\\\left(0,1,1\right)\cdot\left(1,1,0\right)=1\end{cases}$ 符合定义，

所以 A 具有性质 $T\left(3,2\right)$；

【小问 2 详解】

假设存在 A 具有性质 $T\left(4,p\right)$，根据定义易知 A 中有 4 个元素且 $p\in\left\{0,1,2,3,4\right\}$，

①若 $p=0$，则 $A=\left\{\left(0,0,0,0\right)\right\}$，没有 4 个元素，不符题意舍去；

②若 $p=1$，则 $A\subseteq\left\{\left(1,0,0,0\right),\left(0,1,0,0\right),\left(0,0,1,0\right),\left(0,0,0,1\right)\right\}$，

而 $\left(1,0,0,0\right)\cdot\left(0,1,0,0\right)=0$，不符题意舍去；

③若 $p=2$，则 $A\subseteq\left\{\left(1,1,0,0\right),\left(0,1,1,0\right),\left(0,0,1,1\right),\left(1,0,0,1\right),\left(1,0,1,0\right),\left(0,1,0,1\right)\right\}$，

而 $(1,1,0,0)\cdot(0,0,1,1)=(1,0,1,0)\cdot(0,1,0,1)=(1,0,0,1)\cdot(0,1,1,0)=0$，

故 A 中至多包含 3 个元素，不符题意舍去；

④若 $p=3$，则 $A\subseteq\{(1,1,1,0),(0,1,1,1),(1,0,1,1),(1,1,0,1)\}$，

而 $(1,1,1,0)\cdot(1,1,0,1)=2$，不符题意舍去；

⑤若 $p=4$，则 $A\subseteq\{(1,1,1,1)\}$，没有 4 个元素，不符题意舍去；

综上可知：不存在具有性质 $T(4,p)$ 的集合 A．

【点睛】思路点睛：第二问需要根据定义得出 $p\in\{0,1,2,3,4\}$，从而分五种情况进行讨论，讨论时依次得出集合 A 的可能情况结合定义验证判定即可.