2021年全国高中数学联赛（四川预赛）试题

（考试时间：2021年5月23日 14:30~16:30）

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，满分64分.

1. 过抛物线 $y=x^2$ 上两点 $A(1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 分别作抛物线的切线 l_1,l_2，l_1 与 l_2 交于点 C. 若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，则 $x_2=$ ________.

2. 已知在凸五边形 $ABCDE$ 中，$DE\,//\,AC$，$\angle ADC=90^\circ, AC=12, CD=6$，$AC$ 平分 $\angle DAB$，$\angle BCE=60^\circ$. 则 $\triangle BCE$ 面积的最小值为________.

3. 已知在三棱锥 $D-ABC$ 中，$\angle ACB=\angle ABD=90^\circ$，$CA=CB$，$\angle BAD=30^\circ$. 若点 C 在平面 ABD 上的射影恰好在 AD 上，则二面角 $C-AB-D$ 的平面角的正弦值大小为________.

4. 设 x,y,z 为正实数，$M=\max\{xy+\frac{2}{z},z+\frac{2}{y},y+z+\frac{1}{x}\}$. 则 M 的最小值为________.

5. 设函数 $f(x)=x-\ln(ax+2a+1)+2$. 若对于任意 $x\geq-2$，均有 $f(x)\geq0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为________.

6. $\sum\limits_{k=0}^{2022}C_{2022}^{k}\cos\frac{(1011-k)\pi}{2}$ 的值为________.

7. 设集合 $T=\{(a,b,c)\,|\,a,b,c\in\mathbf{N}^*$, 且 a,b,c 可构成某个三角形的三边长$\}$.

则 $\sum\limits_{(a,b,c)\in T}\frac{2^a}{3^b\cdot5^c}$ 的值为________.

8. 在一个 3×3 的方格表中，若9个小方格中的每一个均被染成红、黄、蓝、紫四种颜色之一，任意两个有公共边的小方格的染色均不相同，且该方格表中恰有2个小方格染蓝色，则符合条件的染色方法种数为________.（用具体数字作答）

二、解答题：本大题共3小题，满分56分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（**本题满分16分**）已知椭圆 Γ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的两顶点为 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，离心率为 $\frac{1}{2}$. 点 P（不同于 A、B）在椭圆 Γ 上，点 D 的坐标为 $(-4,0)$，$\overrightarrow{DE}=\frac{3}{5}\overrightarrow{DP}$，直线 AP 与 BE 交于点 Q. 求点 Q 的轨迹方程.

10. （**本题满分 20 分**）给定正整数 a，b，其中 $a<b$. 数列 $\{F_n\}$ 满足：$F_1=a, F_2=b$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n(n\in\mathbf{N}^*)$. 若不存在无穷多个正整数 k，使得 $1+mF_kF_{k+2}$ 为完全平方数，则称 m 具有性质 P. 求证：存在无穷多个正整数 m 具有性质 P.

11. （**本题满分 20 分**）求最大的正整数 n，使得对满足 $\prod\limits_{i=1}^{n}a_i=1$ 的任意正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，均有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_{i+1}}+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}}{a_i}\geq2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 恒成立，其中 $a_{n+1}=a_1$.

2021年全国高中数学联赛（四川预赛）试题

参考答案及评分标准

说明：

1、本试卷满分 120，其中填空题 64 分，解答题 56 分.

2、评阅试卷时，请依据评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；第 9 题 4 分一个档次、第 10 题和第 11 题均为 5 分一个档次. 请严格按照评分标准规定的评分档次给分，不要再增加其它中间档次.

3、如果考生的解答题方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评阅时可参考本评分标准评分.

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，满分64分.

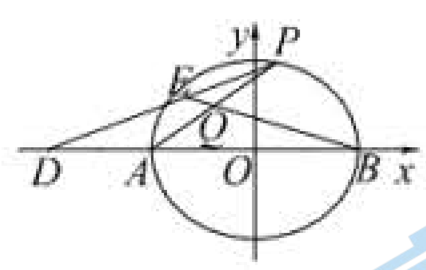
1、$-\frac{1}{4}$　2、27　3、$\frac{\sqrt{6}}{3}$　4、3　5、$[0,1]$　6、2^{1011}　7、$\frac{17}{21}$　8、3816.

二、解答题：本大题共3小题，满分56分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分 16 分）已知椭圆Γ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的两顶点为$A(-2,0)$，$B(2,0)$，离心率为$\frac{1}{2}$. 点$P$（不同于$A$、$B$）在椭圆$\Gamma$上，点$D$的坐标为$(-4,0)$，$\overline{DE}=\frac{3}{5}\overline{DP}$，直线$AP$与$BE$交于点$Q$. 求点$Q$的轨迹方程.

解法一：易求得椭圆Γ的方程是$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.　　……4 分

设$P(2\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta)$，由$\overline{DE}=\frac{3}{5}\overline{DP}$得



$(x_E+4,y_E)=\frac{3}{5}(2\cos\theta+4,\sqrt{3}\sin\theta)$，

所以，点E的坐标是$(\frac{6\cos\theta-8}{5},\frac{3\sqrt{3}\sin\theta}{5})$.　　……8 分

所以直线AP的方程是$y=\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{2\cos\theta+2}(x+2)$，

直线BE的方程是$y=\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{2\cos\theta-6}(x-2)$，

联立AP，BE的方程，解得交点Q的坐标为$(\cos\theta-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta)$.　　……12 分

所以，点Q的轨迹方程为$(x+1)^2+\frac{4}{3}y^2=1$（$y\neq 0$）.　　……16 分

解法二：易求得椭圆Γ的方程是$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.　　……4 分

因为直线BQE截$\triangle ADP$，由梅涅劳斯定理，得$\frac{AB}{BD}\cdot\frac{DE}{EP}\cdot\frac{PQ}{QA}=1$.

因为$\frac{AB}{BD}=\frac{2}{3}$，$\frac{DE}{EP}=\frac{3}{2}$，

所以Q是PA的中点.　　……8 分

设 $P(x_0, y_0)$，$Q(x, y)$，

则 $x=\dfrac{x_0-2}{2}$，$y=\dfrac{y_0}{2}$.

解得 $x_0=2x+2$，$y_0=2y$.　　　　　　　　　　　　　　　　……12 分

由 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 Γ 上，可得 $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$，

所以，点 Q 的轨迹方程为 $(x+1)^2+\dfrac{4}{3}y^2=1$（$y\neq 0$）.　　　　……16 分

10. （本题满分 20 分）

给定正整数 a,b，其中 $a<b$. 数列 $\{F_n\}$ 满足：$F_1=a,\ F_2=b,\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n(n\in \mathbf{N}^*)$，若不存在无穷多个正整数 k，使得 $1+mF_kF_{k+2}$ 为完全平方数，则称 m 具有性质 P.

求证：存在无穷多个正整数 m 具有性质 P.

证明：先证两个引理：

引理 1：设 $T=a^2+ab-b^2$，则对任意的正整数 n，都有 $F_nF_{n+2}+(-1)^nT=F_{n+1}^2$.

引理 1 的证明：下面用数学归纳法证明.

由条件知 $F_3=a+b$，从而 $F_1F_3+(-1)^1T=a(a+b)-(a^2+ab-b^2)=b^2=F_2^2$，

故结论对 $n=1$ 成立.

结论成立；

假设 $n=k(k\geq 1)$ 时，结论成立，即 $F_kF_{k+2}+(-1)^kT=F_{k+1}^2$，

当 $n=k+1$ 时，

$F_{k+1}F_{k+3}+(-1)^{k+1}T=F_{k+1}(F_{k+1}+F_{k+2})+F_kF_{k+2}-F_{k+1}^2=F_{k+1}F_{k+2}+F_kF_{k+2}=F_{k+2}^2$

故当 $n=k+1$ 时，结论也成立.

由归纳原理知，对任意的正整数 n，都有 $F_nF_{n+2}+(-1)^nT=F_{n+1}^2$.　　　　……5 分

引理 2：对任意给定的整数 D，关于 x,y 的方程 $x^2-y^2=D$ 至多有有限多组整数解 (x,y).

引理 2 的证明：由 $x^2-y^2=D$ 知 $(x+y)(x-y)=D$，

从而$\begin{cases} x+y=d \\ x-y=\dfrac{D}{d} \end{cases}$，其中$d$为$D$的约数.

对每一个d，方程组至多有一组整数(x,y).

由于D是给定的整数，从而d的个数是有限的，

所以，方程$x^2-y^2=D$至多有有限多组整数解(x,y). ……10 分

回到原题：

取$m=t^2(t\in \mathbf{N}^*,t\geq 2)$，记$S_k=1+mF_kF_{k+2}$，

由引理 1 知，$S_k=1+m(F_{k+1}^2-(-1)^kT)=(tF_{k+1})^2+1+(-1)^{k+1}t^2T$，

若S_k为完全平方数，记$S_k=x^2,tF_{k+1}=y^2,D=1+(-1)^{k+1}t^2T$，

从而有$x^2-y^2=D$，其中$D=1\pm t^2T$为整数. ……15 分

由引理 2 知，方程$x^2-y^2=D$仅有有限多组整数解(x,y).

因此，当$m=t^2(t\in \mathbf{N}^*,t\geq 2)$时，正整数$m$都具有性质$P$.

综上所述，结论成立. ……20 分

11.（本题满分 20 分）求最大的正整数n，使得对满足$\prod_{i=1}^{n}a_i=1$的任意正实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$，都有$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{a_{i+1}}+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{a_{i+1}}{a_i}\geq 2\sum_{i=1}^{n}a_i$恒成立，其中$a_{n+1}=a_1$.

解：一方面，先证：$n\leq 4$.

事实上， 若$n=5$，取$a_1=\dfrac{1}{16},a_2=\dfrac{1}{32},a_3=2,a_4=128,a_5=2$，

则$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{a_{i+1}}=2+\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{64}+64+32=98+\dfrac{1}{32}<99$，

$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{a_{i+1}}{a_i}=\dfrac{1}{2}+64+64+\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{32}<129$，

而$\sum_{i=1}^{n}a_i>130$，从而$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{a_{i+1}}+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{a_{i+1}}{a_i}-2\sum_{i=1}^{n}a_i<99+129-130\times 2<0$，

故$n=5$不满足条件. ……5 分

若 $n\ge 6$，取 $a_1=\frac{1}{16},a_2=\frac{1}{32},a_3=2,a_4=128,a_5=2,a_6=\cdots=a_n=1$，

则 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_{i+1}}=2+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+64+2+(n-6)+16=78+n+\frac{1}{32}<79+n$，

及 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}}{a_i}=\frac{1}{2}+64+64+\frac{1}{64}+\frac{1}{2}+(n-6)+\frac{1}{16}<124+n$，

而 $\sum_{i=1}^{n}a_i>127+n$，从而 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_{i+1}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}}{a_i}-2\sum_{i=1}^{n}a_i<79+124-127\times 2<0$.

故 $n\ge 6$ 均不满足条件. ……10 分

所以，$n\le 4$.

另一方面，再证：$n=4$ 满足条件.

将 a_1,a_2,a_3,a_4 分别记为 a,b,c,d，则 $abcd=1$，即证 $\sum_{cyc}\frac{b}{a}+\sum_{cyc}\frac{a}{b}\ge 2\sum_{cyc}a$.

注意到由均值不等式，

$$\frac{2b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{a}{d}\ge 4\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{a}{d}\right)^{\frac{1}{4}}=4b,$$

$$\frac{2b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{d}\ge 4\left(\frac{b}{c}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{4}}=4b,$$

上两式相加得：$3\cdot\frac{b}{c}+3\cdot\frac{b}{a}+\frac{c}{d}+\frac{a}{d}\ge 8b$. （*） ……15 分

对（*）轮换求和即得：

$$3\sum_{cyc}\frac{b}{c}+3\sum_{cyc}\frac{b}{a}+\sum_{cyc}\frac{c}{d}+\sum_{cyc}\frac{a}{d}\ge 8\sum_{cyc}b$$

注意到 $\sum_{cyc}\frac{b}{c}=\sum_{cyc}\frac{a}{b}$，$\sum_{cyc}\frac{c}{d}=\sum_{cyc}\frac{a}{b}$，$\sum_{cyc}\frac{a}{d}=\sum_{cyc}\frac{b}{a}$

所以，$\sum_{cyc}\frac{b}{a}+\sum_{cyc}\frac{a}{b}\ge 2\sum_{cyc}b$.

综上所述，所求正整数 n 的最大值为 4. ……20 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。