湘豫名校联考
2023年12月高三一轮复习诊断考试(三)
数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	A	C	D	B	D	C	BCD	ABD	BC	AB

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. C　**【命题意图】**本题考查集合的并集、补集运算，解方程，考查数学运算的核心素养.

【解析】由题易得 $M=\{-2,4\}$，又 $\complement_N M=\{1,0\}$，所以 $M\subseteq N$，$N=\{-2,0,1,4\}$. 所以 $M\cup N=N$. 故选 C.

2. A　**【命题意图】**本题考查复数的除法运算、复数相等，考查数学运算的核心素养.

【解析】设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$. 因为 $1+\bar{z}=2z+3\mathrm{i}$，所以 $1+a-b\mathrm{i}=2a+(2b+3)\mathrm{i}$. 易得 $\begin{cases}a+1=2a,\\-b=2b+3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-1,\end{cases}$ 所以 $z=1-\mathrm{i}$. 所以 $\frac{2}{z}=\frac{2}{1-\mathrm{i}}=\frac{2(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=1+\mathrm{i}$. 故选 A.

3. A　**【命题意图】**本题考查线面位置关系，充分、必要条件，考查逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】若 $\alpha/\!/\beta$，$a/\!/\alpha$，$b\perp\beta$，则 $a\perp b$. 反之，若 $a\perp b$，$a/\!/\alpha$，$b\perp\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$ 或 $\alpha\cap\beta$. 所以 $\alpha/\!/\beta$ 是 $a\perp b$ 的充分不必要条件. 故选 A.

4. C　**【命题意图】**本题考查椭圆的方程及相关概念、直线的方程，考查了数学运算、直观想象的核心素养.

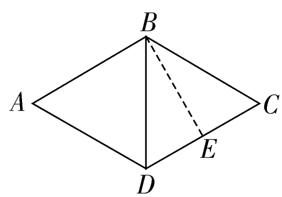
【解析】因为 $\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=e=\frac{1}{2}$，所以 $\sqrt{3}a=2b$. 由题意知直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，即 $bx+ay-ab=0$，所以 $\sqrt{3}x+2y-\sqrt{3}a=0$. 因为直线 l 经过点 $(4,-\sqrt{3})$，所以 $\sqrt{3}\times4+2\times(-\sqrt{3})-\sqrt{3}a=0$，解得 $a=2$. 所以 $\sqrt{3}\times2=2b$. 所以 $b=\sqrt{3}$，所以椭圆 C 的短轴长为 $2b=2\sqrt{3}$. 故选 C.

5. D　**【命题意图】**本题考查向量的模、数量积运算，考查数学运算的核心素养.

【解析】因为 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，等式两边平方得 $4|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+4|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=25$，又 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=3$，所以 $4\times9+9+4\times3\times3\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=25$，解得 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\frac{5}{9}$. 故选 D.

6. B　**【命题意图】**本题考查旋转几何体、圆柱的体积，考查直观想象、数学运算的核心素养.

【解析】如图，过点 B 作 CD 的垂线，交 CD 于点 E，将直角 $\triangle BCE$ 剪去，并补到点 A 处，使 BC 与 AD 重合，则组成边长分别为 $2,\sqrt{3}$ 的矩形. 旋转所得几何体为圆柱，其底面圆的半径为 $\sqrt{3}$，高为 2，所以该几何体的体积为 $\pi\times(\sqrt{3})^2\times2=6\pi$. 故选 B.



7. D　**【命题意图】**本题考查函数的求值、周期性，考查数学运算、数学建模的核心素养.

【解析】$f\left(\frac{17}{3}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{17}{3}-2\right)=\frac{1}{2^2}f\left(\frac{11}{3}-2\right)=\frac{1}{2^3}f\left(\frac{5}{3}-2\right)=\frac{1}{8}\times f\left(-\frac{1}{3}\right)$. 因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=-f\left(\frac{1}{3}\right)=-3$，所以 $f\left(\frac{17}{3}\right)=\frac{1}{8}\times(-3)=-\frac{3}{8}$. 故选 D.

8. C　**【命题意图】**本题考查恒成立问题、等差数列的通项公式及性质，考查数学抽象、数学运算的核心素养.

【解析】因为 $a_1:a_2:a_3=4:3:2$，所以 $a_2=\frac{3}{4}a_1,a_3=\frac{1}{2}a_1$. 因为 $\begin{cases}pa_2-qa_1=2,\\pa_3-qa_2=2,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}\frac{3}{4}pa_1-qa_1=2,\\\frac{1}{2}pa_1-\frac{3}{4}qa_1=2,\end{cases}$ 化简得 $p=q$，且 p,q 不为 0. 所以 $a_n-a_{n-1}=\frac{2}{p}$，所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列. 因为 $a_3=a_4-\frac{2}{p}=\frac{1}{2}-\frac{2}{p}$，所以 $a_1=2a_3=1-\frac{4}{p}$. 因为 $a_4=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{2}=1-\frac{4}{p}+3\times\frac{2}{p}$，解得 $p=-4$，即公差 $d=-\frac{1}{2}$. 所以 $a_1=1-\frac{4}{-4}=2$. 所以 $a_8=a_1+7d=2+7\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$，所以 $a_6+a_8+a_{10}=3a_8=3\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{2}$. 故选 C.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. BCD 【命题意图】本题考查三角函数的定义，正、余弦的和角公式，正切的倍角公式，考查数学运算的核心素养.

【解析】由题易知 $r=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{5}$，所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，A 错误；因为 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{10}}{5}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{10}-3\sqrt{5}}{10}$，B 正确；因为 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $\tan 2\alpha=\frac{2\times\frac{\sqrt{6}}{2}}{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=-2\sqrt{6}$，所以 $-2\sqrt{6}+\sqrt{6}a=0$，解得 $a=2$，C 正确；因为 α 属于第一象限角，所以 $2k\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $4k\pi<2\alpha<\pi+4k\pi,k\in\mathbf{Z}$，且 $\tan 2\alpha=-2\sqrt{6}<0$，即 2α 属于第二象限角，D 正确. 故选 BCD.

10. ABD 【命题意图】本题考查双曲线的方程及性质、直线与双曲线的位置关系，考查直观想象、数学运算的核心素养.

【解析】由题易得 $\frac{b}{a}=2$，所以 $e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$，A 错误；根据三角形的相似性，知顶点到渐近线的距离与焦点到渐近线的距离之比为 $\frac{a}{c}$，$\frac{a}{c}=\frac{1}{e}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，B 错误；因为直线 $y=2x+1$ 与渐近线 $y=2x$ 平行，所以直线 $y=2x+1$ 与双曲线 C 的左支仅有 1 个交点，与右支没有交点. 又直线 $y=x+1$ 与直线 $y=2x+1$ 都过点 $(0,1)$，且直线 $y=x+1$ 的倾斜角比直线 $y=2x+1$ 的倾斜角小，结合图形可知，直线 $y=x+1$ 与双曲线 C 有两个不同的交点，C 正确；因为 $\frac{c^2}{a^2}-\frac{3b^2}{b^2}=5-3=2>1$，所以点 $(c,\sqrt{3}b)$ 位于双曲线 C 右支的右侧位置，显然过点 $(c,\sqrt{3}b)$ 的直线不可能与双曲线 C 相切，D 错误. 故选 ABD.

11. BC 【命题意图】本题考查新概念、数学文化、函数的性质，考查逻辑推理、数学运算、数学抽象的核心素养.

【解析】$R\left(\frac{6}{8}\right)=R\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}$，A 错误. 因为 $p,q\in\mathbf{N}^*$，$\frac{p}{q}$ 是既约真分数，$x=\frac{p}{q}$，0，1 或 $(0,1)$ 上的无理数，所以黎曼函数的定义域为 $[0,1]$，B 正确. 又 $p,q\in\mathbf{N}^*$，$\frac{p}{q}$ 为既约真分数，所以 $\frac{1}{q}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$，C 正确. 因为 $f(1-x)=f(x)$，所以 $f(-x)=f(x+1)$. 所以 $f(-x-1)=f(x+2)$. 因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x-1)=-f(x+1)=-f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)=f(x+2)$，即 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，$f\left(\frac{86}{5}\right)=f\left(18-\frac{4}{5}\right)=$

$f\left(-\frac{4}{5}\right)=-f\left(\frac{4}{5}\right)=-\frac{1}{5}$，$f(\sqrt{32}+6)=f(4\sqrt{2})=f(4\sqrt{2}-6)=-f(6-4\sqrt{2})=0$，所以 $f\left(\frac{86}{5}\right)+f(\sqrt{32}+6)=-\frac{1}{5}$，D 错误．故选 BC.

12. AB 【命题意图】本题考查立体几何中的线面位置关系、二面角、轨迹问题、球体，考查直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】设△ABC 的外心为点 O，则 $OA=OB=OC$，所以 $\mathrm{Rt}\triangle SOA\cong\mathrm{Rt}\triangle SOB\cong\mathrm{Rt}\triangle SOC$，所以 $SA=SB=SC$，A 正确；过点 A 作 BC 的垂线 AT，交 BC 于点 T，连接 ST，则 $ST\perp BC$，所以 $\angle ATS$ 是平面 SBC 与平面 ABC 所成角的平面角，则 $\cos\angle ATS=\frac{AT}{ST}=\frac{\frac{1}{2}AT\cdot BC}{\frac{1}{2}ST\cdot BC}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle SBC}}$，B 正确；因为 $\angle BAC=90°$，H 是 BC 的中点，所以 $HC=HB=HA$，但 $HS=HA$ 不一定成立，C 错误；依题知点 S 的轨迹是以 $\frac{BC}{2}$ 为半径的圆，且不包括 B，C 两点，D 错误．故选 AB.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\frac{25}{4}$ 【命题意图】本题考查基本不等式，考查数学运算的核心素养.

【解析】$(a+2)(b-1)\leqslant\left[\frac{(a+2)+(b-1)}{2}\right]^2=\left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$，当且仅当 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{7}{2}$ 时等号成立.

14. 相交 【命题意图】本题考查圆与直线的方程、直线与圆的位置关系，考查数学运算的核心素养.

【解析】因为 $(x-a)^2+(y+2b)^2=a^2+4b^2-4$ 表示圆 C_1 的方程，所以 $a^2+4b^2-4>0$，即 $a^2+4b^2>4$. 因为 $\frac{|2|}{\sqrt{a^2+(2b)^2}}=\frac{2}{\sqrt{a^2+4b^2}}<\frac{2}{2}=1$，所以直线 $ax-2by+2=0$ 与圆 C_2：$x^2+y^2=1$ 相交.

15. $(3,5]$ 【命题意图】本题考查三角函数的图象与性质，考查直观想象、数学运算的核心素养.

【解析】依题知 $2\sin\left(\frac{\pi\omega}{2}+\varphi\right)=2$，所以 $\frac{\pi\omega}{2}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=-\frac{\pi\omega}{2}+\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi\omega}{2}+\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=2\cos\omega\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$. 因为 $\omega>0$，所以当 $x\in(0,\pi)$ 时，$\omega\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\in\left(-\frac{\pi\omega}{2},\frac{\pi\omega}{2}\right)$. 依题知 $\frac{3\pi}{2}<\frac{\pi\omega}{2}\leqslant\frac{5\pi}{2}$，解得 $3<\omega\leqslant 5$.

16. $-\frac{\sqrt{6}}{9}$ 【命题意图】本题考查三角恒等变换、导函数、极值，考查数学运算、数学抽象的核心素养.

【解析】$f(x)=\sin x(1-2\sin^2 x)=-2\sin^3 x+\sin x$，设 $t=\sin x$，因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $t\in[-1,1]$. 令 $g(t)=-2t^3+t$，$t\in[-1,1]$，所以 $g'(t)=-6t^2+1$. 令 $g'(t)=0$，则 $t=\frac{\sqrt{6}}{6}$ 或 $t=-\frac{\sqrt{6}}{6}$. 因为在 $\left(-1,-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 上 $g'(t)<0$，在 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 上 $g'(t)>0$，在 $\left(\frac{\sqrt{6}}{6},1\right)$ 上 $g'(t)<0$，所以 $g(t)$ 在 $\left(-1,-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\sqrt{6}}{6},1\right)$ 上单调递减，所以 $g(t)$ 的极小值为 $g\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=-2\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^3-\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{18}-\frac{\sqrt{6}}{6}=-\frac{\sqrt{6}}{9}$，即 $f(x)$ 的极小值为 $-\frac{\sqrt{6}}{9}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【命题意图】本题考查解三角形，考查数学运算、数学建模的核心素养.

【解析】(1)设 $CE=x$，则 $BE=\dfrac{x}{\sin\angle EBC}=\dfrac{x}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x$，

$DE=\dfrac{x-AD}{\sin 30^\circ}=2(x-100)$. …………………………………………………………………… 2 分

因为$\angle DBE=\angle BDE$，所以 $DE=BE$.

所以$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x=2(x-100)$，

解得 $x=150+50\sqrt{3}$，即 $CE=150+50\sqrt{3}$. …………………………………………………… 5 分

(2)由(1)设 $CE=x$，因为 $AD=\dfrac{CE}{2}$，$\angle ABD=45^\circ$，所以 $AD=AB=\dfrac{CE}{2}$.

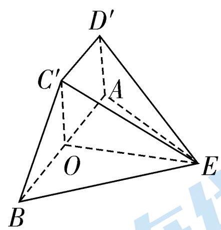
因为 $BC=\dfrac{x}{\tan\angle EBC}=\dfrac{x}{\tan 60^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，$AC=\dfrac{x}{2\tan 30^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$， ……………………………………… 8 分

所以由余弦定理得

$\cos\angle ACB=\dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\dfrac{\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^2}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}x\times\frac{\sqrt{3}}{3}x}=\dfrac{5}{6}$. ……………………………………………… 10 分

18.【命题意图】本题考查空间几何体的线面位置关系、平面与平面的夹角问题，考查直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)取 AB 的中点 O，连接 $C'O$，OE.



因为 $C'D'/\!/AB$，$2C'D'=BA$，所以 $C'D'=OA$，

所以四边形 $AOC'D'$ 是平行四边形.

所以 $C'O/\!/D'A$.

因为 $AD'\perp AO$，

所以 $C'O\perp AO$，即 $C'O\perp AB$. ……………………………………………………… 3 分

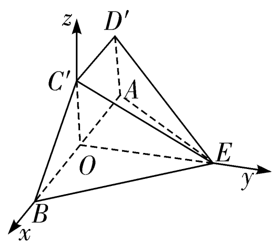
因为$\triangle ABE$ 是等边三角形，所以 $OE\perp AB$.

因为 $C'O\cap OE=O$，

所以 $AB\perp$平面 $C'OE$.

所以 $AB\perp C'E$. ………………………………………………………………………………… 6 分

(2)以点 O 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，



不妨设 $C'D'=1$，则 $AD'=OB=OA=1$，$OE=\sqrt{3}$.

所以 $A(-1,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C'(0,0,1)$，$D'(-1,0,1)$，$E(0,\sqrt{3},0)$.

所以$\overrightarrow{BC'}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{BE}=(-1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AD'}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{AE}=(1,\sqrt{3},0)$.

设平面 $BC'E$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC'}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-x_1+z_1=0,\\ -x_1+\sqrt{3}y_1=0.\end{cases}$

令 $x_1=\sqrt{3}$，则 $z_1=\sqrt{3}$，$y_1=1$，

所以平面 $BC'E$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$. ……………………………………………… 8 分

设平面 $AD'E$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD'}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}x_2+\sqrt{3}y_2=0,\\ z_2=0.\end{cases}$

令 $y_2=-1$，则 $x_2=\sqrt{3}$，$z_2=0$，

所以平面 $AD'E$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-1,0)$. ………………………………………………………… 10 分

设平面 $BC'E$ 与平面 $AD'E$ 的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{|\sqrt{3}\times\sqrt{3}+1\times(-1)+\sqrt{3}\times 0|}{\sqrt{7}\times 2}=\frac{\sqrt{7}}{7}.$$

故平面 $BC'E$ 与平面 $AD'E$ 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$. ………………………………………………………… 12 分

19.【命题意图】本题考查数列的前 n 项和与通项公式的关系、等比数列的定义、数列累乘求通项，考查数学运算、数学建模的核心素养.

【解析】(1)因为数列 $\{S_n\}$ 是等比数列，

所以 $S_3\cdot S_{11}=S_6\cdot S_8=16$.

因为 $S_6+S_8=10$，$S_6\cdot S_8=16$，

所以 S_6，S_8 是方程 $x^2-10x+16=0$ 的两个实数根，

所以 $\begin{cases}S_6=2,\\S_8=8,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}S_6=8,\\S_8=2.\end{cases}$

因为 $\{S_n\}$ 是递增的等比数列，所以 $\begin{cases}S_6=2,\\S_8=8.\end{cases}$

设 $\{S_n\}$ 的公比为 q，

则 $q^2=\frac{S_8}{S_6}=4$，

解得 $q=2$，或 $q=-2$(舍去). ………………………………………………………………………… 3 分

所以 $S_n=2\times 2^{n-6}=2^{n-5}$.

因为 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=2^{n-5}$，

所以 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=2^{n-6}(n\geqslant 2)$，

两式相减得 $na_n=2^{n-5}-2^{n-6}=2^{n-6}$，

所以 $a_n=\frac{2^{n-6}}{n}$，$n\geqslant 2$.

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2^{-4}$，

所以 $a_n=\begin{cases}\frac{1}{16},n=1,\\\frac{2^{n-6}}{n},n\geqslant 2.\end{cases}$ ………………………………………………………………… 6 分

(2)因为 $\frac{1}{a_n}=\frac{n}{2^{n-6}}(n\geqslant 2)$，

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$T_n=16+\frac{2}{2^{-4}}+\frac{3}{2^{-3}}+\frac{4}{2^{-2}}+\cdots+\frac{n}{2^{n-6}}$，

所以 $\frac{1}{2}T_n=8+\frac{2}{2^{-3}}+\frac{3}{2^{-2}}+\frac{4}{2^{-1}}+\cdots+\frac{n}{2^{n-5}}$. ………………………………………………… 9 分

两式相减得 $\frac{1}{2}T_n=8+\frac{2}{2^{-4}}+\frac{1}{2^{-3}}+\frac{1}{2^{-2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-6}}-\frac{n}{2^{n-5}}$

$=40+\frac{8\left(1-\frac{1}{2^{n-2}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n-5}}$

$=56-\frac{2+n}{2^{n-5}}$.

所以 $T_n=112-\frac{2+n}{2^{n-6}}$.

当 $n=1$ 时，满足上式，

故 $T_n=112-\frac{2+n}{2^{n-6}}$. …………………………………………………………………………………… 12 分

20.【命题意图】本题考查利用导数研究函数的单调性、从函数角度来证明不等式，考查数学运算、数学抽象、直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)由题易知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{a}{x}-2x=\frac{a-2x^2}{x}$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(8,+\infty)$ 上单调递减.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{\sqrt{2a}}{2}$.

因为 $f(x)$ 在 $(8,+\infty)$ 上单调递减，所以 $\frac{\sqrt{2a}}{2}\leqslant 8$.

所以 $a\leqslant 128$.

所以实数 a 的取值范围为 $0<a\leqslant 128$.

综上所述，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,128]$. …………………………………………………………… 6 分

(2)方法一：因为 $a=2$，所以 $f'(x)=\frac{2-2x^2}{x}$.

因为在 $(1,+\infty)$ 上 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减. …………………………………… 8 分

所以 $f(2)<f(1)$，$f(4)<f(3)$，$f(6)<f(5)$，…，$f(2n)<f(2n-1)$，

即 $2\ln 2-2^2<2\ln 1-1^2$，$2\ln 4-4^2<2\ln 3-3^2$，$2\ln 6-6^2<2\ln 5-5^2$，…，$2\ln(2n)-(2n)^2<2\ln(2n-1)-(2n-1)^2$，$n\in\mathbf{N}^*$.

所以 $2\ln\frac{2}{1}<2+1$，$2\ln\frac{4}{3}<4+3$，$2\ln\frac{6}{5}<6+5$，…，$2\ln\frac{2n}{2n-1}<2n+2n-1$，

所以 $2\left[\ln\frac{2\times4\times6\times\cdots\times2n}{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}\right]<1+2+3+4+\cdots+2n=\frac{2n(2n+1)}{2}=n(2n+1)$，

所以 $\ln\frac{2\times4\times6\times\cdots\times2n}{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}<\frac{n(2n+1)}{2}$. …………………………………………………… 12 分

方法二：当 $a=2$ 时，$f(x)=2\ln x-x^2$.

所以 $f'(x)=\frac{2-2x^2}{x}$.

因为在 $(1,+\infty)$ 上 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

所以当 $x>1$ 时，$f(x)<f(1)=-1$，

即 $x>1$ 时，$2\ln x<x^2-1$. ……………………………………………………………………………… 8 分

令 $x=\frac{2n}{2n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，则 $2\ln\frac{2n}{2n-1}<\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^2-1=\frac{4n-1}{(2n-1)^2}\leqslant 4n-1$.

所以 $2\left(\ln 2+\ln\frac{4}{3}+\ln\frac{6}{5}+\cdots+\ln\frac{2n}{2n-1}\right)<3+7+11+\cdots+4n-1$，

即 $\ln\frac{2\times4\times6\times\cdots\times2n}{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}<\frac{n(2n+1)}{2}$. …………………………………………………… 12 分

21.【命题意图】本题考查抛物线的方程与性质、利用导数研究切线问题、几何的对称性，考查直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)由 $x^2=2py$，得 $y=\frac{x^2}{2p}$，所以 $y'=\frac{x}{p}$.

设切点的坐标为 $\left(x_0,\frac{x_0^2}{2p}\right)$，则切线方程为 $y-\frac{x_0^2}{2p}=\frac{x_0}{p}(x-x_0)$. ………………………………………… 2 分

因为点 $D\left(1,-\frac{1}{4}\right)$ 在切线上，所以 $-\frac{1}{4}-\frac{x_0^2}{2p}=\frac{x_0}{p}(1-x_0)$，

化简得 $2x_0^2-4x_0-p=0$，所以 $x_1\cdot x_2=-\frac{p}{2}$.

因为 $AD\perp BD$，所以 $\frac{x_1}{p}\cdot\frac{x_2}{p}=-1$，即方程的两根 $x_1\cdot x_2=-p^2$，

所以 $-p^2=-\frac{p}{2}$.

因为 $p>0$，所以 $p=\frac{1}{2}$.

所以抛物线 C 的方程为 $x^2=y$. ……………………………………………………………………………… 4 分

(2)抛物线 C 的焦点为 $F\left(0,\frac{1}{4}\right)$，设经过焦点 F 的直线方程为 $y=kx+\frac{1}{4}$.

联立 $\begin{cases}y=kx+\frac{1}{4},\\ x^2=y,\end{cases}$ 得 $4x^2-4kx-1=0$.

设 $P(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$，

则 $\begin{cases}x_3+x_4=k,\\ x_3\cdot x_4=-\frac{1}{4}.\end{cases}$ ……………………………………………………………………………… 6 分

因为 $k_{l_3}+k_{l_4}=0$，所以直线 l_3，l_4 关于 y 轴对称.

不妨令 P，M 关于 y 轴对称，N，Q 关于 y 轴对称.

设 $M(x_5,y_5)$，$N(x_6,y_6)$，

因为 $x_3=-x_5$，所以 $x_4+x_5=x_4-x_3$.

所以 $|x_4-x_3|=\sqrt{(x_4+x_3)^2-4x_4\cdot x_3}=\sqrt{k^2+1}$，

$|y_4-y_3|=|x_4^2-x_3^2|=|x_4-x_3||x_4+x_3|=|k|\sqrt{k^2+1}$，

四边形 $PMQN$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times 2|x_4-x_3||y_4-y_3|=|k|(k^2+1)$.

不妨设 $k>0$，则依题得 $k(k^2+1)=2$，……………………………………………………………… 8 分

化简得 $(k^3-1)+(k-1)=0$，即 $(k-1)(k^2+k+2)=0$.

因为 $k^2+k+2=0$ 无实数解，

所以 $k-1=0$，解得 $k=1$. ……………………………………………………………………………… 10 分

若直线 l_4 的倾斜角为 $45°$，则直线 l_3 的倾斜角为 $135°$.

所以直线 l_3 与 l_4 的夹角为 $90°$. ……………………………………………………………………… 12 分

22.【命题意图】本题考查函数的单调性、最值、极值问题，方程与函数的转化，考查数学运算、数学抽象、直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

当 $a=\mathrm{e}$ 时，$f(x)=x\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}\ln x$，$x>0$，

则 $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-\frac{2\mathrm{e}}{x}$. ……………………………………………………………………… 1 分

令 $g(x)=(x+1)e^x-\frac{2e}{x},x>0$，则 $g'(x)=(x+2)e^x+\frac{2e}{x^2}$.

因为 $x>0$，所以 $g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………………………………… 3 分

又 $g(1)=2e-\frac{2e}{1}=0$，

所以在 $(0,1)$ 上，$g(x)<0$；在 $(1,+\infty)$ 上，$g(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)\geqslant f(1)=1\times e-2e\ln 1=e$.

故 $f(x)$ 的最小值为 e. ………………………………………………………………………… 5 分

(2)因为关于 a 的方程 $f(a)=ba$（即 $ae^a-2a\ln a=ba$）有实数根，$0<a\leqslant 3e^2$，

所以 $b=e^a-2\ln a$.

设 $t(x)=e^x-2\ln x,x\in(0,3e^2]$，………………………………………………………… 7 分

则 $t'(x)=e^x-\frac{2}{x}$.

因为 $t'(x)$ 在 $(0,3e^2]$ 上单调递增，且 $t'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-4<0,t'(1)=e-2>0$，

所以存在 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $t'(x_0)=0$，即 $e^{x_0}=\frac{2}{x_0},x_0=\ln 2-\ln x_0$. ………………………… 9 分

因为在 $(0,x_0)$ 上 $t'(x)<0$，在 $(x_0,3e^2]$ 上 $t'(x)>0$，

所以 $t(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,3e^2]$ 上单调递增.

所以 $t(x)\geqslant t(x_0)=e^{x_0}-2\ln x_0=\frac{2}{x_0}+2x_0-2\ln 2$.

因为 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，所以 $\frac{2}{x_0}+2x_0\in(4,5)$.

所以 $\frac{2}{x_0}+2x_0-2\ln 2\in(4-2\ln 2,5-2\ln 2)$，

即 $S\in(4-2\ln 2,5-2\ln 2)$. ………………………………………………………………… 12 分