北京二中 2019-2020 学年度高三年级第一学期开学考试

一、选择题（每小题 6 分，共 48 分）

01.已知 $z(1+i)=-1+7i$（i 是虚数单位），z 的共轭复数为 $\overline{z}$，则 $|\overline{z}|$ 等于 【　　】

A. $\sqrt{2}$　　B. $3+4i$

C. 5　　D. 7

02.为了研究某班学生的脚长 x（单位厘米）和身高 y（单位厘米）的关系，从该班随机抽取 10 名学生，根据测量数据的散点图可以看出 y 与 x 之间有线性相关关系，设其回归直线方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$；已知 $\sum_{i=1}^{10}x_i=225$，$\sum_{i=1}^{10}y_i=1600$，$\hat{b}=4$，该班某学生的脚长为 24，据此估计其身高为 【　　】

A. 160　　B. 163

C. 166　　D. 170

03.已知 α 为锐角，若 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，则 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$ 等于 【　　】

A. $\frac{2\sqrt{6}+1}{6}$　　B. $\frac{3-\sqrt{2}}{8}$

C. $\frac{3+\sqrt{2}}{8}$　　D. $\frac{2\sqrt{3}-1}{6}$

04.已知随机变量 $X+\eta=8$，若 $X\sim B(10,0.6)$，则 $E(\eta)$，$D(\eta)$ 分别是 【　　】

A. 6，2.4　　B. 2，2.4

C. 2，5.6　　D. 6，5.6

05. ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，则"$a>b$"是"$\cos 2A<\cos 2B$" 【　　】

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

06.已知双曲线 $my^2-x^2=1(m\in R)$ 与抛物线 $x^2=8y$ 有相同的焦点，则该双曲线的渐近线方程为 【　　】

A. $y=\pm\sqrt{3}x$　　B. $y=\pm 3x$

C. $y=\pm\frac{1}{3}x$　　D. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$

07. $\alpha,\beta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，且 $\alpha\sin\alpha-\beta\sin\beta>0$，则下列结论正确的是　　　　【　　】

A. $\alpha>\beta$　　　　B. $\alpha^2>\beta^2$

C. $\alpha<\beta$　　　　D. $\alpha+\beta>0$

08. 已知实数 a，b，c 满足 $\frac{a-2e^a}{b}=\frac{1-c}{d-1}=1$，其中 e 是自然对数的底数，那么 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为　　　　【　　】

A. 8　　　　B. 10

C. 12　　　　D. 18

二、填空题（每小题 6 分，共 36 分）

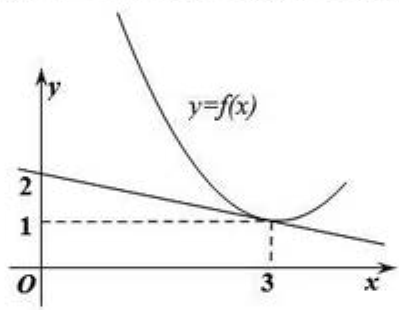
09. 为了判断高中三年级学生选修文科是否与性别有关，现随机抽取 50 名学生，得到如图所示 2×2 列联表：

	理科	文科	总计
男	13	10	23
女	7	20	27
总计	20	30	50

已知 $P(K^2\geq 3.841)\approx 0.05$，$P(K^2\geq 5.024)\approx 0.025$．根据表中数据，得到 K^2 的观测值 $k=\frac{50\times(13\times 20-10\times 7)^2}{23\times 27\times 20\times 30}\approx 4.844$，则有______%的把握认为选修文科与性别有关.

10. 化简 $\frac{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\sin(\alpha-\pi)\cdot\cos(2\pi-\alpha)$ 的结果为________.

11. 已知 $y=f(x)$ 是可导函数，如图，直线 $y=kx+2$ 是曲线 $y=f(x)$ 在 $x=3$ 处的切线，令 $g(x)=xf(x)$，$g'(x)$ 是 $g(x)$ 的导函数，则 $g'(3)=$________.



12.已知$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，则$\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=$________.

13.函数$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-\dfrac{2}{3}$在区间$(a,a+5)$上存在最小值，则实数$a$的取值范围是________.

14.已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的两焦点为F_1,F_2，点$P(x_0,y_0)$满足$0<\dfrac{x_0^2}{2}+y_0^2<1$，则

（1）$|PF_1|+|PF_2|$的取值范围为________.

（2）直线$\dfrac{x_0x}{2}+y_0y=1$与椭圆C的公共点个数________.

三、解答题

15.（13分）ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知ΔABC的面积为$\dfrac{a^2}{3\sin A}$.

（I）求$\sin B\sin C$；

（II）若$6\cos B\cos C=1$，$a=3$，求ΔABC的周长.

16.（13 分）某汽车品牌为了了解客户对于其旗下的五种型号汽车的满意情况，随机抽取了一些客户进行回访，调查结果如下表：

汽车型号	I	II	III	IV	V
回访客户（人数）	250	100	200	700	350
满意率	0.5	0.3	0.6	0.3	0.2

满意率是指：某种型号汽车的回访客户中，满意人数与总人数的比值.

假设客户是否满意互相独立，且每种型号汽车客户对于此型号汽车满意的概率与表格中该型号汽车的满意率相等.

（I）从所有的回访客户中随机抽取 1 人，求这个客户满意的概率；

（II）从I型号和V型号汽车的所有客户中各随机抽取 1 人，设其中满意的人数为ξ，求ξ的分布列和期望；

（III）用“$\eta_1=1$”，“$\eta_2=1$”，“$\eta_3=1$”，“$\eta_4=1$”，“$\eta_5=1$”分别表示I，II，III，IV，V型号汽车让客户满意，“$\eta_1=0$”，“$\eta_2=0$”，“$\eta_3=0$”，“$\eta_4=0$”，“$\eta_5=0$”分别表示I，II，III，IV，V型号汽车让客户不满意.写出方差$D\eta_1$，$D\eta_2$，$D\eta_3$，$D\eta_4$，$D\eta_5$的大小关系.

17.（14 分）已知函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{x+a}$在$x=1$处的切线与直线$y=\dfrac{1}{2}x$平行.

（I）求实数a的值；

（II）如果函数$g(x)=(x+1)f(x)-mx$在区间$\left[\dfrac{1}{e},e^2\right]$上有两个零点，求实数$m$的取值范围；

（III）求证：函数$f(x)$有极大值，而且$f(x)$的极大值小于 1.

18.（13 分）抛物线$C: y^2=2px\left(p>0\right)$上的点$M\left(4, y_M\right)$到其准线的距离为 5.

（I）求抛物线C的标准方程；

（II）过点$P\left(2,0\right)$作直线l交抛物线C于A,B两点，Q是y轴上一点，且Q,A,B三点不共线，直线AQ与直线$x=-2$交于点N，判断直线PQ与BN的位置关系，并说明理由.

19.（13 分）对于集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，$n\in N^*$，

$m\in N^*$. $A+B=\{x+y\mid x\in A,y\in B\}$.集合 A 中的元素个数记为 $|A|$.

规定：若集合 A 满足 $|A+A|=\dfrac{n(n+1)}{2}$，则称集合 A 具有性质 T.

（I）已知集合 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\left\{\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3}\right\}$，写出 $|A+A|$，$|B+B|$ 的值；

（II）已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$\{a_n\}$ 为等比数列，$a_n>0$，且公比为 $\dfrac{2}{3}$，证明：A 具有性质 T；

（III）已知 A,B 均有性质 T，且 $n=m$，求 $|A+B|$ 的最小值.