北京市东城区 2018-2019 学年度第二学期高三综合练习（一）

数学　（文科）

2019. 4

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x|2x^2+x>0\}, B=\{x|2x+1>0\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\left\{x\middle|x>-\frac{1}{2}\right\}$　（B）$\left\{x\middle|x>\frac{1}{2}\right\}$　（C）$\{x|x>0\}$　（D）$\mathbf{R}$

（2）在复平面内，若复数 $(2-\mathrm{i})z$ 对应的点在第二象限，则 z 可以为

（A）2　（B）-1　（C）i　（D）$2+\mathrm{i}$

（3）已知圆 $C:x^2+2x+y^2=0$，则圆心 C 到直线 $x=3$ 的距离等于

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

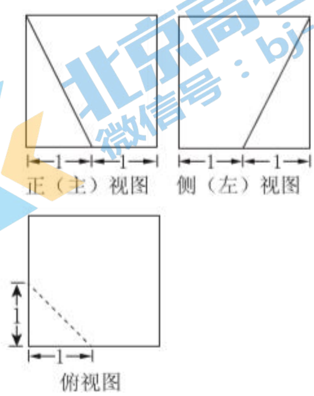
（4）设 E 为△ABC 的边 AC 的中点，$\overrightarrow{BE}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，则 m, n 的值分别为

（A）$-1,\frac{1}{2}$　（B）$\frac{1}{2},-1$　（C）$-\frac{1}{2},1$　（D）$1,\frac{1}{2}$

（5）正方体被一个平面截去一部分后，所得几何体的三视图如图所示，则截面图形的形状为

（A）等腰三角形　（B）直角三角形

（C）平行四边形　（D）梯形

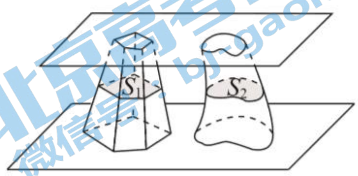


（6）若 x, y 满足 $\begin{cases}x+y\geq 0,\\ y+1\leq 0,\\ y\geq 2x-6,\end{cases}$ 则 $|x-y|$ 的最大值为

（A）0　（B）1

（C）2　（D）4

（7）南北朝时代的伟大科学家祖暅在数学上有突出贡献，他在实践的基础上提出祖暅原理："幂势既同，则积不容异"．其含义是：夹在两个平行平面之间的两个几何体，被平行于这两个平行平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等.如图，夹在两个平行平面之间的两个几何体的体积分别为V_1,V_2，被平行于这两个平面的任意平面截得的两个截面面积分别为S_1,S_2，则"V_1,V_2相等"是"S_1,S_2总相等"的



（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（8）某校开展"我身边的榜样"评选活动，现对 3 名候选人甲、乙、丙进行不记名投票，投票要求详见选票. 这 3 名候选人的得票数（不考虑是否有效）分别为总票数的88%，70%，46%，则本次投票的有效率（有效票数与总票数的比值）最高可能为

"我身边的榜样"评选选票

候选人	符号	注：
甲		1. 同意画"○"，不同意画"×"。
乙		2. 每张选票"○"的个数不超过 2 时才为有效票。
丙		

（A）68%　　（B）88%

（C）96%　　（D）98%

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2+a_6=2$，则$a_4=$__________.

（10）抛物线$C: y^2=2px$上一点$(1,y_0)$到其焦点的距离为 3，则抛物线C的方程为_______.

（11）在ΔABC中，若$b\cos C+c\sin B=0$，则$\angle C=$__________.

（12）已知函数$f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{4})$，若对于闭区间$[a, b]$中的任意两个不同的数$x_1$，$x_2$，都有$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$成立，写出一个满足条件的闭区间__________.

（13）设函数$f(x)=\begin{cases} e^x-2x, & x<a, \\ ax-1, & x\ge a. \end{cases}$若$a=1$，则$f(x)$的最小值为__________；若$f(x)$有最小值，

则实数 a 的取值范围是_______.

（14）设 A，B 是 $\mathbf{R}$ 的两个子集，对任意 $x\in\mathbf{R}$，定义：$m=\begin{cases}0, & x\notin A,\\ 1, & x\in A,\end{cases}$ $n=\begin{cases}0, & x\notin B,\\ 1, & x\in B.\end{cases}$

①若 $A\subseteq B$，则对任意 $x\in\mathbf{R}$，$m(1-n)=$ _____；

②若对任意 $x\in\mathbf{R}$，$m+n=1$，则 A，B 的关系为__________.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=4\cos x\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$.

（Ⅰ）求 $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的最小正周期，并画出 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的图象.

（16）（本小题 13 分）

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 2，等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1+a_2=6$，

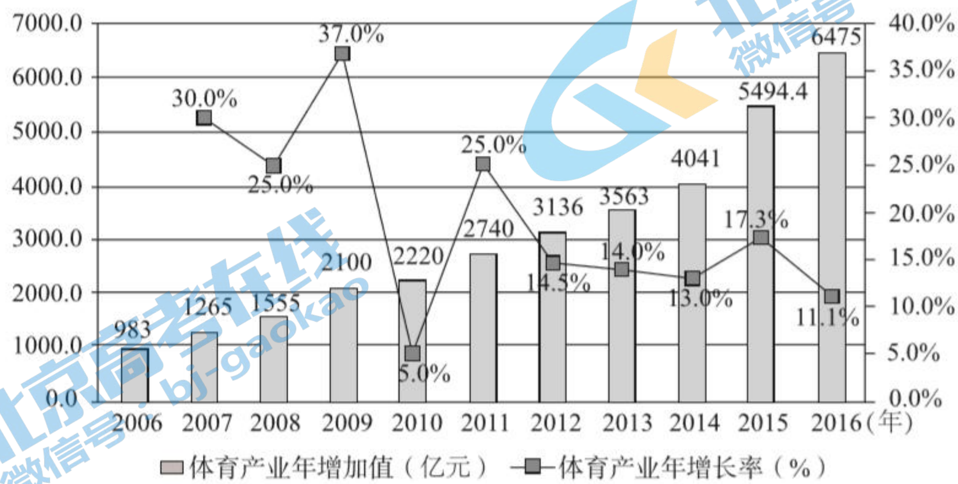
$2b_1+a_3=b_4$，$S_3=3a_2$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $c_n=b_{a_n}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

（17）（本小题 13 分）

改革开放 40 年来，体育产业蓬勃发展反映了“健康中国”理念的普及．下图是我国 2006 年至 2016 年体育产业年增加值及年增速图．其中条形图表示体育产业年增加值（单位：亿元），折线图为体育产业年增长率（%）．



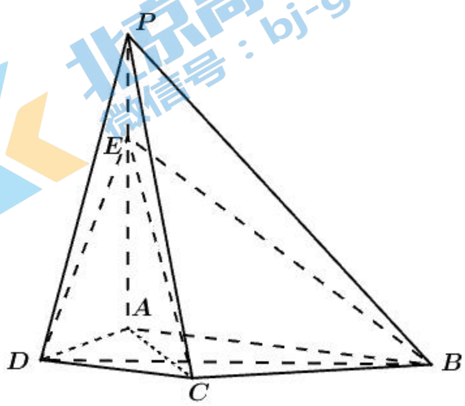
（Ⅰ）从 2007 年至 2016 年这十年中随机选出一年，求该年体育产业年增加值比前一年多 500 亿元以上的概率；

（Ⅱ）从 2007 年至 2011 年这五年中随机选出两年，求至少有一年体育产业年增长率超过 25%的概率；

（Ⅲ）由图判断，从哪年开始连续三年的体育产业年增长率方差最大？从哪年开始连续三年的体育产业年增加值方差最大？（结论不要求证明）

（18）（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=\sqrt{3}$，$AB//CD$，$AB\perp AD$，$AD=DC=1$，$AB=2$，E 为侧棱 PA 上一点.



（Ⅰ）若 $PE=\dfrac{1}{3}PA$，求证：$PC//$ 平面 EBD；

（Ⅱ）求证：平面 $EBC\perp$ 平面 PAC；

（Ⅲ）在侧棱 PD 上是否存在点 F，使得 $AF\perp$ 平面 PCD？若存在，求出线段 PF 的长；若不存在，请说明理由.

（19）（本小题 13 分）

已知 $A(-2,0),P(1,\frac{3}{2})$ 为椭圆 $M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上两点，过点 P 且斜率为 $k,-k(k>0)$ 的两条直线与椭圆 M 的交点分别为 B,C.

（Ⅰ）求椭圆 M 的方程及离心率；

（Ⅱ）若四边形 $PABC$ 为平行四边形，求 k 的值.

（20）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=ax^2+(a-2)x-\ln x$.

（Ⅰ）若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 时取得极值，求实数 a 的值；

（Ⅱ）当 $0<a<1$ 时，求 $f(x)$ 零点的个数.

北京市东城区 2018-2019 学年度第二学期高三综合练习(一)

数学（文科）参考答案及评分标准

2019.4

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

（1）C	（2）B	（3）D	（4）A
（5）A	（6）D	（7）B	（8）C

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（9）1　　（10）$y^2=8x$

（11）$\frac{3}{4}\pi$　　（12）$\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$（答案不唯一）

（13）0；$[0,+\infty)$　　（14）0；$A=\complement_R B$

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

（15）（共 13 分）

解：（I）$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=4\cos\frac{2\pi}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+1=4\cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{2}+1=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times1+1=-1$.

…………………………………………………………………………3 分

（II）$f(x)=4\cos x\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1=4\cos x\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)+1$

$=4\cos x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)+1$

$=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x+1$

$=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$

$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)$

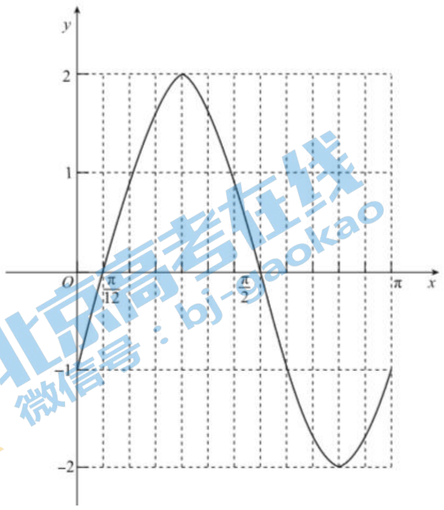
$=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$. ……………………………………………………9 分

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. ……………………………………10 分

因为 $x\in[0,\pi]$，所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$.

列表如下：

$2x-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$
x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x)$	-1	0	2	0	-2	-1



……………………………13 分

（16）（共 13 分）

解:（Ⅰ）设数列$\{a_n\}$的公比为q，数列$\{b_n\}$的公差为d.

由$a_1+a_2=6$，得 $a_1+a_1q=6$.因为$a_1=2$，所以$q=2$.

所以$a_n=a_1q^{n-1}=2\cdot 2^{n-1}=2^n$.

由$\begin{cases}2b_1+a_3=b_4,\\ S_3=3a_2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2b_1+8=b_1+3d,\\ 3b_1+3d=12,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}b_1=1,\\ d=3.\end{cases}$

所以$b_n=b_1+(n-1)d=3n-2$. ……….8 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$a_n=2^n$，$b_n=3n-2$.

所以$c_n=b_{a_n}=3\times 2^n-2$.

从而数列$\{c_n\}$的前n项和$T_n=3\times(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n)-2n$

$$=3\times\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}-2n$$

$$=6\times 2^n-2n-6.$$ …………..13 分

（17）（共 13 分）

解：（Ⅰ）设 A 表示事件“从 2007 年至 2016 年这十年中随机选出一年，该年体育产业年增加值比前一年多 500 亿元以上”.

根据题意，$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$． ……………………………………………3 分

（Ⅱ）从 2007 年至 2011 年这五年中有两年体育产业年增长率超过 25%，设这两年为 A，B，其它三年设为 C，D，E，从五年中随机选出两年，共有 10 种情况：

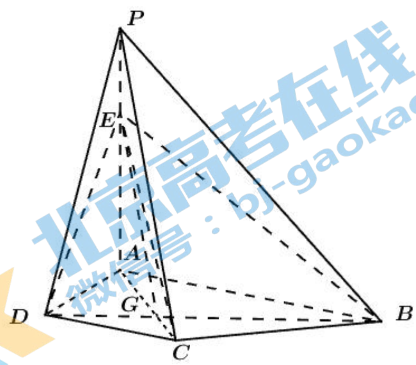
AB，AC，AD，AE，BC，BD，BE，CD，CE，DE，其中至少有一年体育产业年增长率超过 25%有 7 种情况，

所以所求概率为 $\frac{7}{10}$． ……………………………………………………9 分

（Ⅲ）从 2008 年或 2009 年开始连续三年的体育产业年增长率方差最大.

从 2014 年开始连续三年的体育产业年增加值方差最大. ……………13 分

（18）（共 14 分）



解：（Ⅰ）设 $AC\cap BD=G$， 连结 EG.

由已知 $AB//CD$，$DC=1$，$AB=2$，得 $\frac{AG}{GC}=\frac{AB}{DC}=2$.

由 $PE=\frac{1}{3}PA$，得 $\frac{AE}{EP}=2$.

在 ΔPAC 中，由 $\frac{AE}{EP}=\frac{AG}{GC}$，得 $EG//PC$.

因为 $EG\subset$平面 EBD，$PC\not\subset$平面 EBD，

所以 $PC//$平面 EBD. ……………5 分

（Ⅱ）因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，$BC\subset$平面 $ABCD$，

所以 $BC\perp PA$.

由已知得 $AC=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{2}$，$AB=2$，

所以 $AC^2+BC^2=AB^2$.

所以 $BC\perp AC$.

又 $PA\cap AC=A$，所以 $BC\perp$平面 PAC.

因为 $BC\subset$平面 EBC，

所以平面 $EBC\perp$ 平面 PAC． ....10 分

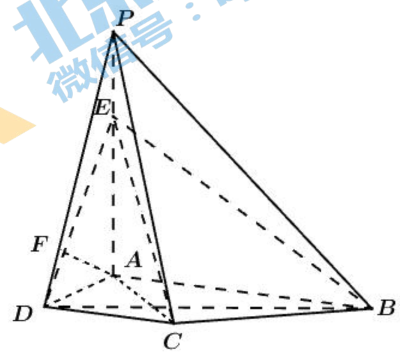
（III）在平面 PAD 内作 $AF\perp PD$ 于点 F，

由 $DC\perp PA$， $DC\perp AD$， $PA\cap AD=A$，

得 $DC\perp$ 平面 PAD．

因为 $AF\subset$ 平面 PAD，所以 $CD\perp AF$．

又 $PD\cap CD=D$，所以 $AF\perp$ 平面 PCD．



由 $PA=\sqrt{3}$， $AD=1$， $PA\perp AD$，

得 $PF=\dfrac{3}{2}$． ....14 分

（19）（共 13 分）

解：（I）由题意得 $\begin{cases}a=2,\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3}.\end{cases}$

所以椭圆 M 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$．

又 $c=\sqrt{a^2-b^2}=1$，

所以离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$． ....5 分

（II）设直线 PB 的方程为 $y=kx+m(k>0)$，

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 消去 y，整理得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+(4m^2-12)=0$．

当 $\Delta>0$ 时，设 $B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，

则 $1\cdot x_1=\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}$，即 $x_1=\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}$．

将 $P(1,\dfrac{3}{2})$ 代入 $y=kx+m$，整理得 $m=\dfrac{3}{2}-k$，所以 $x_1=\dfrac{4k^2-12k-3}{3+4k^2}$．

所以 $y_1=kx_1+m=\dfrac{-12k^2-12k+9}{2(3+4k^2)}$．所以 $B(\dfrac{4k^2-12k-3}{3+4k^2},\dfrac{-12k^2-12k+9}{2(3+4k^2)})$．

同理 $C(\frac{4k^2+12k-3}{3+4k^2},\frac{-12k^2+12k+9}{2(3+4k^2)})$.

所以直线 BC 的斜率 $k_{BC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1}{2}$.

又直线 PA 的斜率 $k_{PA}=\frac{\frac{3}{2}-0}{1-(-2)}=\frac{1}{2}=k_{BC}$，所以 $PA//BC$.

因为四边形 $PABC$ 为平行四边形，所以 $|PA|=|BC|$.

所以 $\left|\frac{4k^2+12k-3}{3+4k^2}-\frac{4k^2-12k-3}{3+4k^2}\right|=|1-(-2)|$，解得 $k=\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$.

$k=\frac{1}{2}$ 时，$B(-2,0)$ 与 A 重合，不符合题意，舍去.

所以四边形 $PABC$ 为平行四边形时，$k=\frac{3}{2}$. ……………………………13 分

（20）（共 14 分）

解：（I） $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$.

$$f'(x)=2ax+(a-2)-\frac{1}{x}=\frac{2ax^2+(a-2)x-1}{x}=\frac{(2x+1)(ax-1)}{x}.$$

由已知，得 $f'(1)=0$，解得 $a=1$.

当 $a=1$ 时，$f'(x)=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$.

所以 $f'(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<1$, $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>1$.

所以 $f(x)$ 减区间为 $(0,1)$，增区间为 $(1,+\infty)$.

所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 时取得极小值，其极小值为 $f(1)=0$，符合题意

所以 $a=1$. ………………………………………………………………5 分

（II ）令 $f'(x)=\frac{(2x+1)(ax-1)}{x}=0$，由 $0<a<1$，得 $x=\frac{1}{a}>1$.

所以 $f'(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{a}$, $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{a}$.

所以 $f(x)$ 减区间为 $(0,\frac{1}{a})$，增区间为 $(\frac{1}{a},+\infty)$.

所以函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{a}$ 时取得极小值，其极小值为 $f(\frac{1}{a})=\ln a+1-\frac{1}{a}$.

因为 $0<a<1$，所以 $\ln a<0$, $\frac{1}{a}>1$.

所以$1-\frac{1}{a}<0$. 所以 $f(\frac{1}{a})=\ln a+1-\frac{1}{a}<0$.

因为 $f(\frac{1}{e})=\frac{a}{e^2}+\frac{(a-2)}{e}+1>\frac{(a-2)}{e}+1=\frac{(a-2+e)}{e}$,

又因为$0<a<1$，所以$a-2+e>0$.

所以 $f(\frac{1}{e})>0$.

根据零点存在定理，函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 上有且仅有一个零点.

因为 $x>\ln x$， $f(x)=ax^2+(a-2)x-\ln x>ax^2+(a-2)x-x=x(ax+a-3)$.

令 $ax+a-3>0$，得 $x>\frac{3-a}{a}$.

又因为$0<a<1$，所以$\frac{3-a}{a}>\frac{1}{a}$.

所以当 $x>\frac{3-a}{a}$ 时， $f(x)>0$.

根据零点存在定理，函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a},+¥\ )$ 上有且仅有一个零点.

所以，当$0<a<1$时， $f(x)$ 有两个零点. ....14 分