2023—2024 学年高二年级阶段性测试(一)

数学 · 答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. B　　2. B　　3. D　　4. C　　5. A　　6. A

7. C　　8. D

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. BCD　　10. ABD　　11. AC　　12. CD

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $(1,1)$　　14. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

15. 4　　16. $\left(\frac{\sqrt{21}}{21},\frac{\sqrt{6}}{9}\right)$

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **解析**　(Ⅰ)由$\begin{cases}3x+4y-11=0,\\2x+3y-8=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$即直线 l_1 和 l_2 的交点为 $M(1,2)$. ……………………………… (2 分)

$\because$ 直线 l 还经过点 $P(3,1)$,$\therefore$ l 的方程为$\frac{y-2}{1-2}=\frac{x-1}{3-1}$,即 $x+2y-5=0$. ……………………………… (5 分)

(Ⅱ)根据直线 l 与直线 $3x+2y+5=0$ 垂直,可设它的方程为 $2x-3y+n=0$. ……………………………… (7 分)

再把点 $M(1,2)$ 的坐标代入,可得 $2-6+n=0$,解得 $n=4$, ……………………………… (9 分)

故直线 l 的方程为 $2x-3y+4=0$. ……………………………… (10 分)

18. **解析**　(Ⅰ)若 $m=0$,则直线 $l_1:2x-6=0$,即 $x=3$,$l_2:y=3$,两直线垂直,符合题意; ……………… (3 分)

若 $m\neq0$,则 $-\frac{m+2}{m}\cdot(-m)=-1$,解得 $m=-3$.

综上,$m=-3$ 或 0. ……………………………… (6 分)

(Ⅱ)由 $P(1,2m)$ 在直线 l_2 上,得 $m+2m-3=0$,解得 $m=1$,

可得 $P(1,2)$. ……………………………… (8 分)

显然直线 l 的斜率一定存在且不为 0,设直线 l 的方程为 $y-2=k(x-1)$,

令 $x=0$,可得 $y=2-k$,再令 $y=0$,可得 $x=\frac{k-2}{k}$,

所以$\frac{k-2}{k}=2(2-k)$,解得 $k=2$ 或 $k=-\frac{1}{2}$, ……………………………… (10 分)

所以直线 l 的方程为 $y-2=2(x-1)$ 或 $y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$,即 $2x-y=0$ 或 $x+2y-5=0$. ………… (12 分)

19. **解析**　由题可知 $C(0,0,0)$,$C_1(0,0,2)$,$B_1(0,1,2)$,$M\left(1,\frac{1}{2},2\right)$,$N(2,0,1)$. ……………………… (2 分)

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

（Ⅰ）$\overrightarrow{C_1M}=\left(1,\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{C_1N}=(2,0,-1)$. ……（3分）

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{C_1M}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{C_1N}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x+\frac{y}{2}=0,\\ 2x-2=0,\end{cases}$ ……（4分）

解得$\begin{cases}x=1,\\ y=-2.\end{cases}$ ……（6分）

（Ⅱ）$\overrightarrow{MN}=\left(1,-\frac{1}{2},-1\right)$，$\overrightarrow{CB_1}=(0,1,2)$， ……（7分）

$\therefore \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CB_1}=1\times0+\left(-\frac{1}{2}\right)\times1-1\times2=-\frac{5}{2}$. ……（8分）

又$|\overrightarrow{MN}|=\frac{3}{2}$，$|\overrightarrow{CB_1}|=\sqrt{5}$， ……（10分）

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{MN},\overrightarrow{CB_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CB_1}}{|\overrightarrow{MN}||\overrightarrow{CB_1}|}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，

故异面直线 MN 与 B_1C 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{3}$. ……（12分）

20. **解析**　（Ⅰ）由 $y=kx+k-1$，得 $y+1=k(x+1)$.

由直线方程的点斜式可知，直线 l 过定点$(-1,-1)$. ……（3分）

（Ⅱ）若当 $-4<x<4$ 时，直线 l 上的点都在 x 轴下方，

则$\begin{cases}-4k+k-1\leqslant0,\\ 4k+k-1\leqslant0,\end{cases}$ ……（4分）

解得 $-\frac{1}{3}\leqslant k\leqslant\frac{1}{5}$.

所以 k 的取值范围是$\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right]$. ……（6分）

（Ⅲ）设直线 l 与 x 轴的交点为 A，与 y 轴的交点为 B，坐标原点为 O.

当 $x=0$ 时，得$|OB|=|k-1|$，当 $y=0$ 时，得$|OA|=\frac{|k-1|}{|k|}$. ……（8分）

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA||OB|=\frac{1}{2}|k-1|\times\frac{|k-1|}{|k|}$，

即$\frac{1}{2}|k-1|^2\times\frac{1}{|k|}=1$， ……（10分）

解得 $k=2+\sqrt{3}$或$2-\sqrt{3}$，

所以直线 l 的方程为 $y=(2+\sqrt{3})x+1+\sqrt{3}$或 $y=(2-\sqrt{3})x+1-\sqrt{3}$. ……（12分）

21. **解析**　（Ⅰ）$\because$ O 是 BD 的中点，$PO\perp$平面 $ABCD$，$\therefore PB=PD$. ……（1分）

$\because$ 菱形 $ABCD$ 的边长为2，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，$\therefore BD=2\sqrt{3}$，$OB=\sqrt{3}$.

$\therefore \tan\angle PBO=\frac{PO}{OB}=\sqrt{3}$，即$\angle PBO=\frac{\pi}{3}$，

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

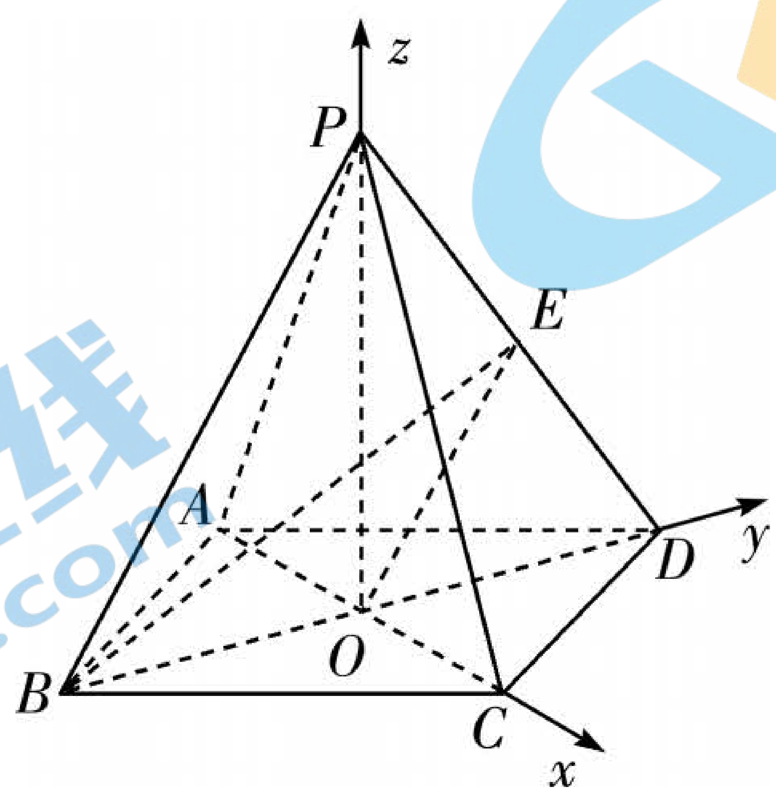
$\therefore \triangle PBD$ 是等边三角形. …………………………………………………………………… (2 分)

$\because BE \perp PD$, $\therefore E$ 是 PD 的中点, $\therefore OE /\!/ PB$, ……………………………………………………… (3 分)

又 $OE \not\subset$ 平面 PAB, $PB \subset$ 平面 PAB, …………………………………………………………… (4 分)

$\therefore OE /\!/$ 平面 PAB. ……………………………………………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)易知 OC, OD, OP 两两互相垂直,以 O 为坐标原点,分别以 OC, OD, OP 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



…………………………………………………………………………………………………… (6 分)

则 $P(0,0,3)$, $A(-1,0,0)$, $B(0,-\sqrt{3},0)$, $C(1,0,0)$,

$\therefore \overrightarrow{BP}=(0,\sqrt{3},3)$, $\overrightarrow{AP}=(1,0,3)$, $\overrightarrow{CP}=(-1,0,3)$. ………………………………………… (7 分)

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=\sqrt{3}y+3z=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=x+3z=0, \end{cases}$ 令 $z=1$, 得 $\boldsymbol{n}=(-3,-\sqrt{3},1)$, ………………………………… (9 分)

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$,

则 $\begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BP}=\sqrt{3}b+3c=0, \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=-a+3c=0, \end{cases}$ 令 $c=1$, 得 $\boldsymbol{m}=(3,-\sqrt{3},1)$. ………………………………… (10 分)

$\therefore \cos\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{-9+3+1}{\sqrt{13}\times\sqrt{13}}=-\dfrac{5}{13}$,

结合图可知,二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $\dfrac{5}{13}$. ………………………………………………… (12 分)

22. **解析** (Ⅰ)如图,取 AB 的中点 F,连接 MF, NF.

$\because M$ 为 AD 的中点, $\therefore MF /\!/ BD$,

$\because BD \subset$ 平面 BDE, $MF \not\subset$ 平面 BDE,

$\therefore MF /\!/$ 平面 BDE. ……………………………………………………………………………… (2 分)

$\because N$ 为 BC 的中点,

$\therefore NF /\!/ AC$.

$\because D, E$ 分别为 AP, PC 的中点,

$\therefore DE /\!/ AC$, 则 $NF /\!/ DE$.

$\because DE \subset$ 平面 BDE, $NF \not\subset$ 平面 BDE,

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

$\therefore NF /\!/$ 平面 BDE. ·· (4 分)

又 $MF \cap NF = F, MF, NF \subset$ 平面 MFN,

$\therefore$ 平面 $MFN /\!/$ 平面 BDE,

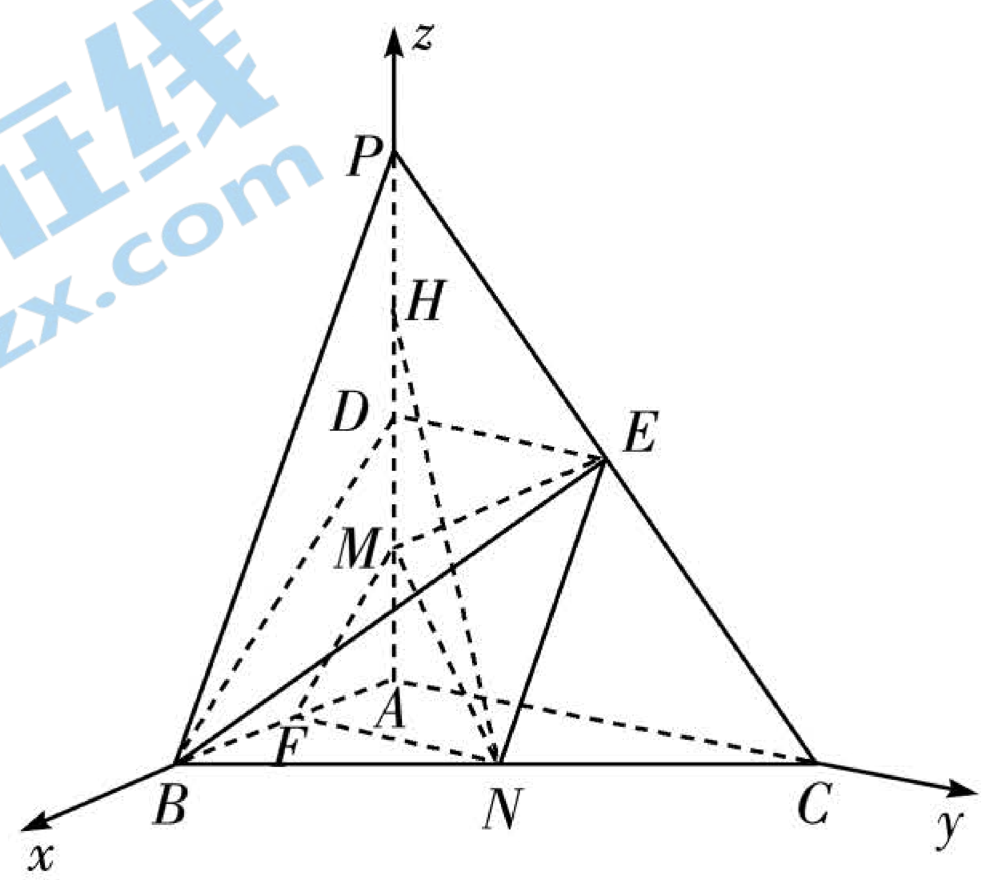
$\because MN \subset$ 平面 MFN,

$\therefore MN /\!/$ 平面 BDE. ·· (6 分)

(Ⅱ)由题知 $PA \perp AB, PA \perp AC, AB \cap AC = A$,可得 $PA \perp$ 底面 ABC,

由题易知 $PA = AC = 4, AB = 2$. ·· (7 分)

$\because \angle BAC = 90°$,$\therefore$ 以 A 为坐标原点,分别以 AB, AC, AP 所在的直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系,如图所示,则 $A(0,0,0), B(2,0,0), C(0,4,0), P(0,0,4), D(0,0,2), E(0,2,2), N(1,2,0)$. ··············· (8 分)



$\therefore \overrightarrow{BE} = (-2,2,2), \overrightarrow{BD} = (-2,0,2)$.

设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$,

则 $\begin{cases} \overrightarrow{BE} \cdot \boldsymbol{n} = -2x + 2y + 2z = 0, \\ \overrightarrow{BD} \cdot \boldsymbol{n} = -2x + 2z = 0, \end{cases}$ 不妨令 $x = 1$,可得 $\boldsymbol{n} = (1,0,1)$. ······························ (9 分)

设 $H(0,0,h)(0 \leqslant h \leqslant 4)$,则 $AH = h, \overrightarrow{NH} = (-1, -2, h)$. ······························ (10 分)

由 $|\cos\langle \overrightarrow{NH}, \boldsymbol{n} \rangle| = \dfrac{|\overrightarrow{NH} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{NH}| \cdot |\boldsymbol{n}|} = \dfrac{|h-1|}{\sqrt{h^2+5} \times \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

解得 $h = -2$,这与 $0 \leqslant h \leqslant 4$ 矛盾,

故棱 PA 上不存在一点 H,使得直线 NH 与平面 BDE 所成的角为 $\dfrac{\pi}{4}$. ······························ (12 分)

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！