

**2021 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（初赛）
暨 2021 全国高中数学联合竞赛
一试（A 卷）参考答案及评分标准**

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准。填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次。
2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不得增加其他中间档次。

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分。

1. 等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{2021} = a_{20} + a_{21} = 1$ ，则 a_1 的值为_____。

答案： $\frac{1981}{4001}$ 。

解：设 $\{a_n\}$ 的公差为 d 。由条件知 $\begin{cases} a_1 + 2020d = 1, \\ 2a_1 + 39d = 1, \end{cases}$ 解得 $a_1 = \frac{1981}{4001}$ 。

2. 设集合 $A = \{1, 2, m\}$ ，其中 m 为实数。令 $B = \{a^2 \mid a \in A\}$ ， $C = A \cup B$ 。若 C 的所有元素之和为 6，则 C 的所有元素之积为_____。

答案：-8。

解：由条件知 $1, 2, 4, m, m^2$ （允许有重复）为 C 的全部元素。

注意到，当 m 为实数时， $1+2+4+m+m^2 > 6$ ， $1+2+4+m^2 > 6$ ，故只可能是 $C = \{1, 2, 4, m\}$ ，且 $1+2+4+m = 6$ 。于是 $m = -1$ （经检验符合题意），此时 C 的所有元素之积为 $1 \times 2 \times 4 \times (-1) = -8$ 。

3. 设函数 $f(x)$ 满足：对任意非零实数 x ，均有 $f(x) = f(1) \cdot x + \frac{f(2)}{x} - 1$ ，则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值为_____。

答案： $\sqrt{3} - 1$ 。

解：令 $x = 1, 2$ ，分别得 $f(1) = f(1) + f(2) - 1$ 与 $f(2) = 2f(1) + \frac{f(2)}{2} - 1$ ，解得 $f(2) = 1, f(1) = \frac{3}{4}$ 。从而对 $x \neq 0$ ，有 $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{x} - 1$ 。

当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x) \geq 2\sqrt{\frac{3}{4}x \cdot \frac{1}{x}} - 1 = \sqrt{3} - 1$ ，当 $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立。

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值为 $\sqrt{3} - 1$ 。

4. 设函数 $f(x) = \cos x + \log_2 x (x > 0)$ ，若正实数 a 满足 $f(a) = f(2a)$ ，则 $f(2a) - f(4a)$ 的值为_____。

答案：-3 或 -1。

解：由条件得 $\cos a + \log_2 a = \cos 2a + \log_2 2a = 2\cos^2 a - 1 + 1 + \log_2 a$ ，所以

$\cos a = 2\cos^2 a$, 进而得 $\cos a = 0$ 或 $\frac{1}{2}$, 相应地有 $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = -1$ 或 $-\frac{1}{2}$.

于是

$$\begin{aligned} f(2a) - f(4a) &= \cos 2a + \log_2 2a - \cos 4a - \log_2 4a = \cos 2a - 2\cos^2 2a \\ &= \begin{cases} -3, & \text{若 } \cos 2a = -1, \\ -1, & \text{若 } \cos 2a = -\frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=1, AC=2, B-C=\frac{2\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

答案: $\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

解: 由正弦定理知 $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{AC}{AB} = 2$, 又 $B-C=\frac{2\pi}{3}$, 故

$$2\sin C = \sin B = \sin\left(C + \frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sin C + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos C,$$

即 $\frac{5}{2}\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos C$, 所以 $\tan C = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

记 $\triangle ABC$ 的面积为 S . 注意到 $A = \pi - B - C = \frac{\pi}{3} - 2C$, 故

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A = \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2C - \frac{1}{2}\sin 2C.$$

由 $\tan C = \frac{\sqrt{3}}{5}$ 知 $\cos 2C = \frac{1 - \tan^2 C}{1 + \tan^2 C} = \frac{11}{14}$, $\sin 2C = \frac{2\tan C}{1 + \tan^2 C} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, 从而

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{11}{14} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

6. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $\Gamma: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过 Γ 上一点 P (异于 O) 作 Γ 的切线, 与 y 轴交于点 Q . 若 $|FP|=2, |FQ|=1$, 则向量 \overrightarrow{OP} 与 \overrightarrow{OQ} 的数量积为_____.

答案: $\frac{3}{2}$.

解: 设 $P\left(\frac{t^2}{2p}, t\right) (t \neq 0)$, 则 Γ 的切线 PQ 的方程为 $yt = p\left(x + \frac{t^2}{2p}\right)$. 令 $x=0$,

得 $y = \frac{t}{2}$, 故 $Q\left(0, \frac{t}{2}\right)$. 又 F 坐标为 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 进而

$$|FP| = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - \frac{t^2}{2p}\right)^2 + t^2} = \frac{p}{2} + \frac{t^2}{2p}, \quad |FQ| = \frac{\sqrt{p^2 + t^2}}{2},$$

结合 $|FP|=2, |FQ|=1$ 可分别得 $p^2 + t^2 = 4p, p^2 + t^2 = 4$. 所以 $p=1, t^2=3$.

于是 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \frac{t^2}{2} = \frac{3}{2}$.

7. 一颗质地均匀的正方体骰子，六个面上分别标有点数1, 2, 3, 4, 5, 6. 随机地抛掷该骰子三次（各次抛掷结果相互独立），所得的点数依次为 a_1, a_2, a_3 ，则事件“ $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + |a_3 - a_1| = 6$ ”发生的概率为_____.

答案： $\frac{1}{4}$.

解：注意到 $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + |a_3 - a_1| = 2 \max_{1 \leq i \leq 3} a_i - 2 \min_{1 \leq i \leq 3} a_i$. 因此，掷得的三个点数 a_1, a_2, a_3 满足条件，当且仅当最大数与最小数之差为3，即 a_1, a_2, a_3 是 $x, x+d, x+3$ 的一个排列，其中 $x \in \{1, 2, 3\}, d \in \{0, 1, 2, 3\}$.

对每个 $x \in \{1, 2, 3\}$ ，当 $d=0$ 或 $d=3$ 时， $x, x+d, x+3$ 各有3种不同的排列；当 $d=1$ 或 $d=2$ 时， $x, x+d, x+3$ 各有6种不同的排列.

因此，满足条件的点数 a_1, a_2, a_3 有 $3 \times (2 \times 3 + 2 \times 6) = 54$ 种情况.

从而所求概率为 $\frac{54}{6^3} = \frac{1}{4}$.

8. 设有理数 $r = \frac{p}{q} \in (0, 1)$ ，其中 p, q 为互素的正整数，且 pq 整除3600. 这样的有理数 r 的个数为_____.

答案：112.

解：设集合 $\Omega = \left\{ r \mid r = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}^+, (p, q) = 1, pq \mid 3600 \right\}$.

考虑 Ω 的任一元素 r 的最简分数形式 $\frac{p}{q}$ ，因3600的标准分解为 $2^4 \times 3^2 \times 5^2$ ，可设 $p = 2^A \times 3^B \times 5^C, q = 2^a \times 3^b \times 5^c$ ，其中 $\min\{A, a\} = \min\{B, b\} = \min\{C, c\} = 0$ ，且 $A+a \leq 4, B+b \leq 2, C+c \leq 2$.

这样的数对 (A, a) 共有9种取法，数对 (B, b) 共有5种取法，数对 (C, c) 共有5种取法. 所以 Ω 的元素个数 $|\Omega| = 9 \times 5 \times 5 = 225$.

满足条件的有理数的全体为 $\Omega \cap (0, 1)$. 注意到， $r \in \Omega$ 当且仅当 $\frac{1}{r} \in \Omega$ ，特别地， $1 \in \Omega$. 因此， $\Omega \setminus \{1\}$ 中的元素可按乘积为1配成 $\frac{1}{2}(|\Omega| - 1) = 112$ 对，每对中恰有一数属于 $(0, 1)$ ，即恰有一数满足条件. 从而所求有理数 r 的个数为112.

二、解答题：本大题共3小题，满分56分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. (本题满分16分) 已知复数列 $\{z_n\}$ 满足：

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, z_{n+1} = \overline{z_n}(1 + z_n i) (n = 1, 2, \dots),$$

其中 i 为虚数单位. 求 z_{2021} 的值.

解：对 $n \in \mathbb{N}^+$ ，设 $z_n = a_n + b_n i (a_n, b_n \in \mathbb{R})$ ，则

$$a_{n+1} + b_{n+1} i = z_{n+1} = \overline{z_n}(1 + z_n i) = \overline{z_n} + |z_n|^2 i = a_n - b_n i + (a_n^2 + b_n^2) i,$$

因此 $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = a_n^2 + b_n^2 - b_n$4分

又由 $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 知, $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, b_1 = 0$, 所以 $a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 进而

$$b_{n+1} = b_n^2 - b_n + \frac{3}{4}, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

即 $b_{n+1} - \frac{1}{2} = b_n^2 - b_n + \frac{1}{4} = \left(b_n - \frac{1}{2}\right)^2$.

所以当 $n \geq 2$ 时,

$$b_n = \frac{1}{2} + \left(b_1 - \frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}} = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2^{n-1}}}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

于是

$$z_{2021} = a_{2021} + b_{2021}i = \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2^{2020}}}\right)i. \quad \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

10. (本题满分 20 分) 在平面直角坐标系中, 函数 $y = \frac{x+1}{|x|+1}$ 的图像上有三个不同的点位于直线 l 上, 且这三点的横坐标之和为 0. 求 l 的斜率的取值范围.

解: 当 $x \geq 0$ 时, $y = 1$; 当 $x < 0$ 时, $y = \frac{x+1}{1-x}$ 关于 x 严格递增且小于 1.

设直线 $l: y = kx + b$, 则条件等价于方程

$$kx + b = \frac{x+1}{|x|+1} \quad \text{①}$$

有三个不同的实数解 x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$), 满足 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

首先有 $k \neq 0$ (否则, l 只能是 $y = 1$, 但此时 l 与函数 $y = \frac{x+1}{|x|+1}$ 图像的任意三个公共点的横坐标之和必大于 0, 不合题意). \dots\dots\dots 5 \text{ 分}

当 $x < 0$ 时, 方程①可整理为

$$kx^2 - (k-b-1)x + 1 - b = 0, \quad \text{②}$$

至多两个负数解. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}

当 $x \geq 0$ 时, 方程①即为

$$kx + b = 1, \quad \text{③}$$

至多一个非负解.

这表明方程②有两个不同的负数解 x_1, x_2 , 其中 $x_1 + x_2 = \frac{k-b-1}{k}$, 方程③有

非负解 $x_3 = \frac{1-b}{k}$. 由 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 可知 $k = 2b$.

进而有 $x_3 = \frac{1-b}{2b}$, 由 $x_3 \geq 0$ 得 $0 < b \leq 1$. \dots\dots\dots 15 \text{ 分}

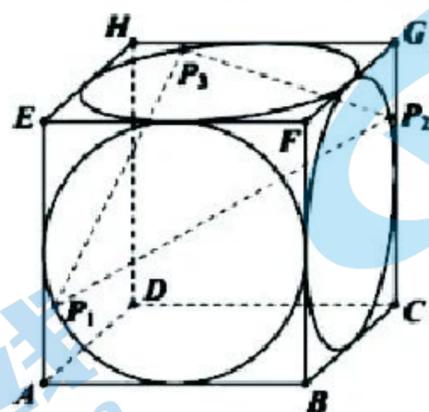
方程②变为 $2bx^2 + (1-b)x + 1 - b = 0$, 由判别式

$$(1-b)^2 - 4 \cdot 2b(1-b) = (1-b)(1-9b) > 0,$$

并结合 $0 < b \leq 1$, 可知 $0 < b < \frac{1}{9}$ (经检验, 此时 x_1, x_2 确实为负数, 符合题意).

综上, l 的斜率 $k (= 2b)$ 的取值范围是 $0 < k < \frac{2}{9}$. \dots\dots\dots 20 \text{ 分}

11. (本题满分 20 分) 如图, 正方体 $ABCD-EFGH$ 的棱长为 2, 在正方形 $ABFE$ 的内切圆上任取一点 P_1 , 在正方形 $BCGF$ 的内切圆上任取一点 P_2 , 在正方形 $EFGH$ 的内切圆上任取一点 P_3 . 求 $|P_1P_2|+|P_2P_3|+|P_3P_1|$ 的最小值与最大值.



解: 以正方体的中心为原点, \overrightarrow{DA} 、 \overrightarrow{DC} 、 \overrightarrow{DH} 的方向分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系.

根据条件, 可设 $P_1(1, \cos \alpha_1, \sin \alpha_1)$, $P_2(\sin \alpha_2, 1, \cos \alpha_2)$, $P_3(\cos \alpha_3, \sin \alpha_3, 1)$.

约定 $P_4 = P_1$, $\alpha_4 = \alpha_1$. 记 $d_i = |P_iP_{i+1}| (i=1, 2, 3)$, 则

$$d_i^2 = (1 - \sin \alpha_{i+1})^2 + (1 - \cos \alpha_i)^2 + (\sin \alpha_i - \cos \alpha_{i+1})^2. \quad \text{①}$$

.....5 分

记 $f = |P_1P_2| + |P_2P_3| + |P_3P_1|$.

先求 f 的最小值. 对 $i=1, 2, 3$, 根据①与平均值不等式得

$$d_i^2 \geq (1 - \sin \alpha_{i+1})^2 + (1 - \cos \alpha_i)^2 \geq \frac{1}{2}((1 - \sin \alpha_{i+1}) + (1 - \cos \alpha_i))^2,$$

故 $d_i \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(2 - \sin \alpha_{i+1} - \cos \alpha_i)$. 于是

$$\begin{aligned} f = d_1 + d_2 + d_3 &\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{i=1}^3 (2 - \sin \alpha_{i+1} - \cos \alpha_i) = 3\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{i=1}^3 (\sin \alpha_i + \cos \alpha_i) \\ &= 3\sqrt{2} - \sum_{i=1}^3 \sin \left(\alpha_i + \frac{\pi}{4} \right) \geq 3\sqrt{2} - 3. \end{aligned}$$

当 $\alpha_i = \frac{\pi}{4} (i=1, 2, 3)$ 时, f 可取到最小值 $3\sqrt{2} - 3$10 分

再求 f 的最大值. 由①知 $d_i^2 = 4 - 2\cos \alpha_i - 2\sin \alpha_{i+1} - 2\sin \alpha_i \cos \alpha_{i+1}$. 注意到 $\sin \alpha_i \geq -1, \cos \alpha_i \geq -1 (i=1, 2, 3)$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 d_i^2 &= 12 - 2 \left(\sum_{i=1}^3 \sin \alpha_{i+1} + \sum_{i=1}^3 \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^3 \sin \alpha_i \cos \alpha_{i+1} \right) \\ &= 12 - 2 \left(\sum_{i=1}^3 \sin \alpha_i + \sum_{i=1}^3 \cos \alpha_{i+1} + \sum_{i=1}^3 \sin \alpha_i \cos \alpha_{i+1} \right) \\ &= 18 - 2 \sum_{i=1}^3 (1 + \sin \alpha_i)(1 + \cos \alpha_{i+1}) \leq 18. \end{aligned}$$

由柯西不等式知 $f^2 \leq 3(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) = 54$, 故 $f \leq 3\sqrt{6}$.

当 $\alpha_i = \pi (i=1, 2, 3)$ 时, f 可取到最大值 $3\sqrt{6}$.

综上所述, f 的最小值为 $3\sqrt{2} - 3$, 最大值为 $3\sqrt{6}$20 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: bjgkzx

官方网站: www.gaokzx.com

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018