学校：__________准考证号：__________姓名：________

（在此卷上答题无效）

高 三 诊 断 性 练 习

数 学

本试卷共 5 页。满分 150 分。

注意事项：

1. 答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设复数 z_1, z_2 满足 $z_2 \neq 0$，且 $|z_1 \cdot \overline{z_2}| = 2|z_2|$，则 z_1 可以是

A．$-1-\mathrm{i}$　　B．$2+2\mathrm{i}$　　C．$-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　D．$4\mathrm{i}$

2. 设集合 $A=\{1,2,4\}$，$B=\{x\in\mathbf{Z}\mid x^2-4x+m<0\}$．若 $A\cap B=\{1,2\}$，则 $A\cup B=$

A．$\{1,2,3\}$　　B．$\{1,2,4\}$　　C．$\{0,1,2,3\}$　　D．$\{1,2,3,4\}$

3. 现用甲、乙两台 3D 打印设备打印一批对内径有较高精度要求的零件．已知这两台 3D 打印设备在正常工作状态下打印出的零件内径尺寸 Z（单位：$\mu\mathrm{m}$）服从正态分布 $N(100,3^2)$．根据要求，正式打印前需要对设备进行调试，调试时，两台设备各试打了 5 个零件，零件内径尺寸（单位：$\mu\mathrm{m}$）如茎叶图所示．根据以上信息，可以判断

A．甲、乙两台设备都需要进一步调试

B．甲、乙两台设备都不需要进一步调试

C．甲需要进一步调试，乙不需要进一步调试

D．乙需要进一步调试，甲不需要进一步调试

甲				乙		
	9	8	9	0	7	9
2	1	0	10	1	5	

4. 甲、乙等 6 位同学去三个社区参加义务劳动，每个社区安排 2 位同学，每位同学只去一个社区，则甲、乙到同一社区的不同安排方案共有

A．6 种　　B．18 种　　C．36 种　　D．72 种

5. 甲、乙、丙三位同学参加学习脱贫干部黄文秀、戍边英雄陈红军、人民科学家南仁东、抗疫英雄张定宇等英雄的先进事迹知识竞赛．该竞赛共有十道判断题，三位同学的答题情况如下：

题号 / 选手	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲	√	√	×	√	×	√	×	×	√	×
乙	√	√	×	×	√	×	√	√	×	×
丙	×	√	√	×	√	√	√	×	√	√

考试成绩公布后，三个人都答对了 7 道题，由此可知，1~10 题的正确答案依次是

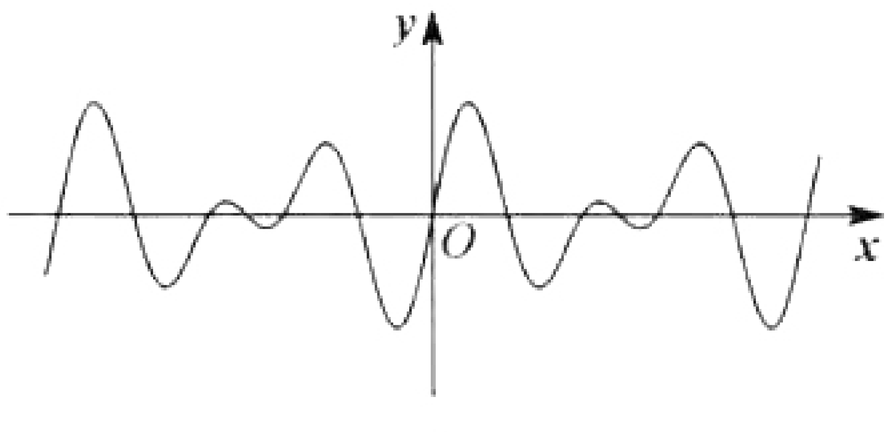
A．√、√、×、×、√、√、√、×、√、×

B．√、√、×、×、√、×、√、×、√、×

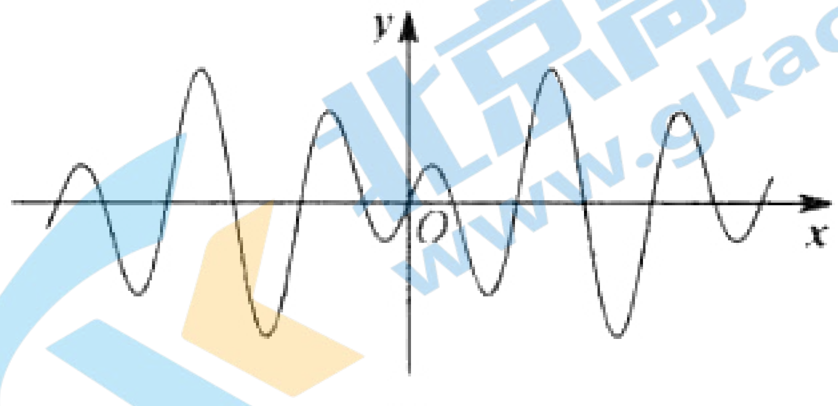
C．√、√、×、×、√、√、√、√、√、×

D．√、×、×、×、√、√、√、√、√、×

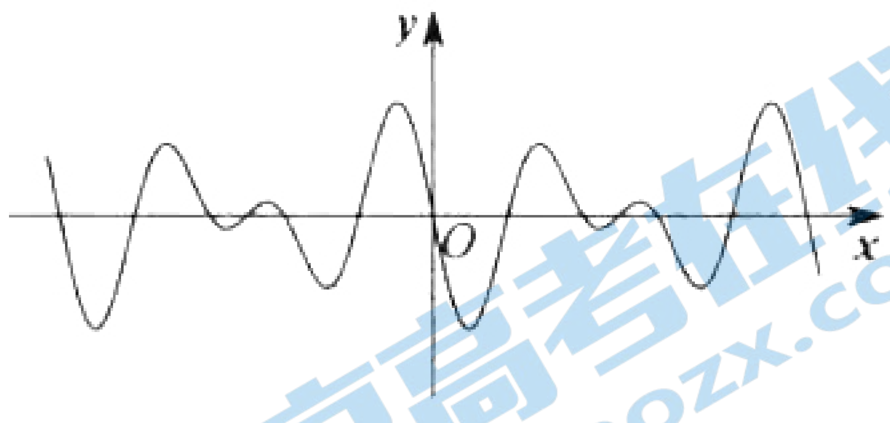
6. 音乐是用声音来表达人的思想感情的一种艺术．声音的本质是声波，而声波在空气中的振动可以用三角函数来刻画．在音乐中可以用正弦函数来表示单音，用正弦函数相叠加表示和弦．某二和弦可表示为 $f(x)=\sin 2x+\sin 3x$，则函数 $y=f(x)$ 的图象大致为



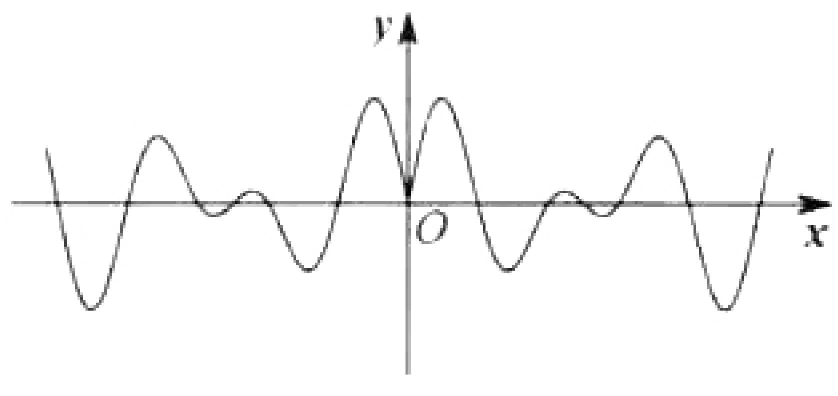
A



B



C



D

7. 已知实数 a,b 满足 $a=e^{5-a}$，$2+\ln b=e^{3-\ln b}$，则 $ab=$

A．3　　B．7　　C．e^3　　D．e^7

8. 某地举办“迎建党 100 周年”乒乓球团体赛，比赛采用新斯韦思林杯赛制（5 场单打 3 胜制，即先胜 3 场者获胜，比赛结束）．现有两支球队进行比赛，前 3 场依次分别由甲、乙、丙和 A、B、C 出场比赛．若经过 3 场比赛未分出胜负，则第 4 场由甲和 B 进行比赛；若经过 4 场比赛仍未分出胜负，则第 5 场由乙和 A 进行比赛．假设甲与 A 或 B 比赛，甲每场获胜的概率均为 0.6；乙与 A 或 B 比赛，乙每场获胜的概率均为 0.5；丙与 C 比赛，丙每场获胜的概率均为 0.5；各场比赛的结果互不影响．那么，恰好经过 4 场比赛分出胜负的概率为

A．0.24　　B．0.25　　C．0.38　　D．0.5

二、选择题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 **5** 分，有选错的得 **0** 分，部分选对的得 **2** 分。

9. 已知 $\tan(\alpha+\beta)=\tan\alpha+\tan\beta$，其中 $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 且 $\beta\neq\frac{m\pi}{2}(m\in\mathbf{Z})$，则下列结论一定正确的是

A．$\sin(\alpha+\beta)=0$　　B．$\cos(\alpha+\beta)=1$

C．$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}=1$　　D．$\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$

10. 函数 $f(x)$ 的定义域为 I．若 $\exists M>0$ 使得 $\forall x\in I$ 均有 $|f(x)|<M$，且函数 $f(x+1)$ 是偶函数，则 $f(x)$ 可以是

A．$f(x)=\left|\ln\frac{x}{2-x}\right|$　　B．$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+\cos(2\pi x)$

C．$f(x)=\frac{1}{2^x+2}-\frac{1}{4}$　　D．$f(x)=\begin{cases}0,x\in\complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q},\\1,x\in\mathbf{Q}\end{cases}$

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M 为 AA_1 的中点，平面 α 过点 D_1 且与 CM 垂直，则

A．$CM\perp BD$　　B．BD // 平面 α

C．平面 C_1BD // 平面 α　　D．平面 α 截正方体所得的截面面积为 $\frac{9}{2}$

12. 已知抛物线 $E:y^2=4x$ 的焦点为 F，准线 l 交 x 轴于点 C，直线 m 过 C 且交 E 于不同的 A,B 两点，B 在线段 AC 上，点 P 为 A 在 l 上的射影．下列命题正确的是

A．若 $AB\perp BF$，则 $|AP|=|PC|$　　B．若 P,B,F 三点共线，则 $|AF|=4$

C．若 $|AB|=|BC|$，则 $|AF|=2|BF|$　　D．对于任意直线 m，都有 $|AF|+|BF|>2|CF|$

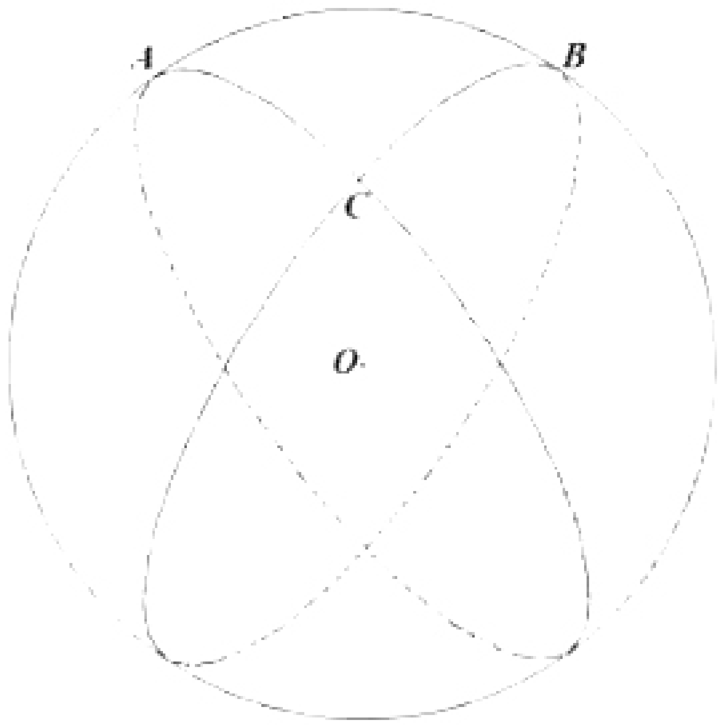
三、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分。

13. 曲线 $y=(x+1)\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为______.

14. 已知△ABC 的外心为 O，$2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，$|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{AB}|=1$，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=$______.

15. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，以原点 O 为圆心、C 的焦距为半径的圆交 x 轴于 A,B 两点，P 是圆 O 与 C 的一个公共点．若 $|PA|=\sqrt{3}|PB|$，则 C 的离心率为______.

16. 球面几何是几何学的一个重要分支，在航海、航空、卫星定位等方面都有广泛的应用．如图，A,B,C 是球面上不在同一大圆（大圆是过球心的平面与球面的交线）上的三点，经过这三点中任意两点的大圆的劣弧分别为 $\overset{\frown}{AB},\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{CA}$，由这三条劣弧组成的图形称为球面△$ABC$．已知地球半径为 R，北极为点 N，P,Q 是地球表面上的两点．若 P,Q 在赤道上，且经度分别为东经 $40°$ 和东经 $80°$，则球面△NPQ 的面积为______；若 $NP=NQ=PQ=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}R$，则球面△$NPQ$ 的面积为______.（本小题第一空 2 分，第二空 3 分）



四、解答题：共 **70** 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

在① $b\sin A+a\cos B=0$，② $\sqrt{5}\cos 2C+3\cos C=0$，③ $\sin B+\sin C=2\sin A$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求△ABC 的面积；若问题中的三角形不存在，说明理由.

问题：是否存在△ABC，其内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $\cos A=\dfrac{3}{5}$，$a=4$，______？

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

18.（12 分）

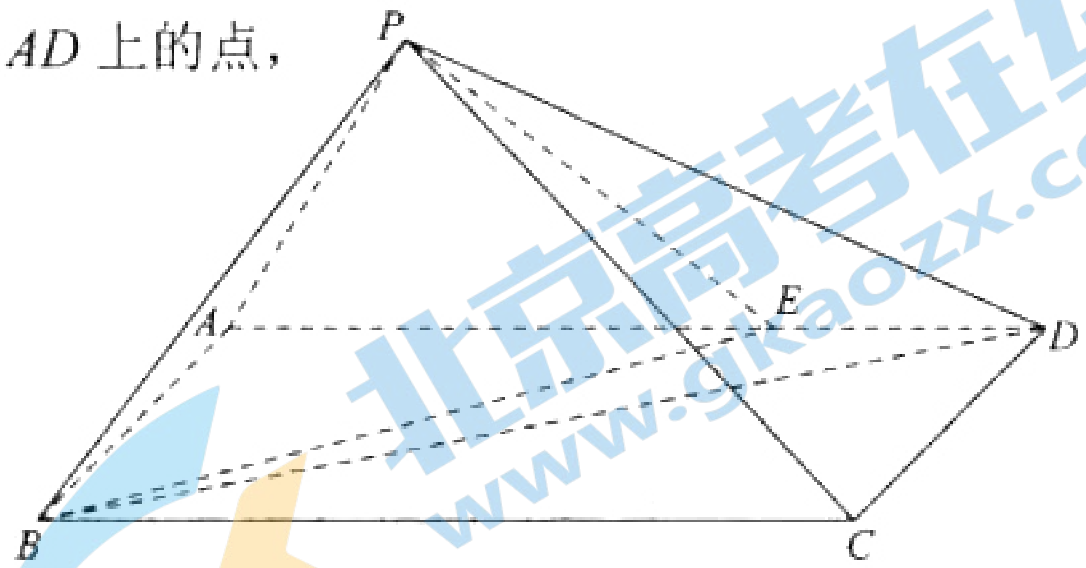
数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_{n+1}-1=S_n+2a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

（1）若数列 $\{a_n+1\}$ 不是等比数列，求 a_n；

（2）若 $a_1=1$，在 a_k 和 a_{k+1} $\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$ 中插入 k 个数构成一个新数列 $\{b_n\}$：$a_1,1,a_2,3,5,a_3,7,9,11,a_4,\cdots$，插入的所有数依次构成首项为 1，公差为 2 的等差数列，求 $\{b_n\}$ 的前 50 项和 T_{50}.

19.（12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为矩形，E 是边 AD 上的点，$PA=AB=AE=2DE$，$\angle PBA=\angle PBC=60^\circ$．

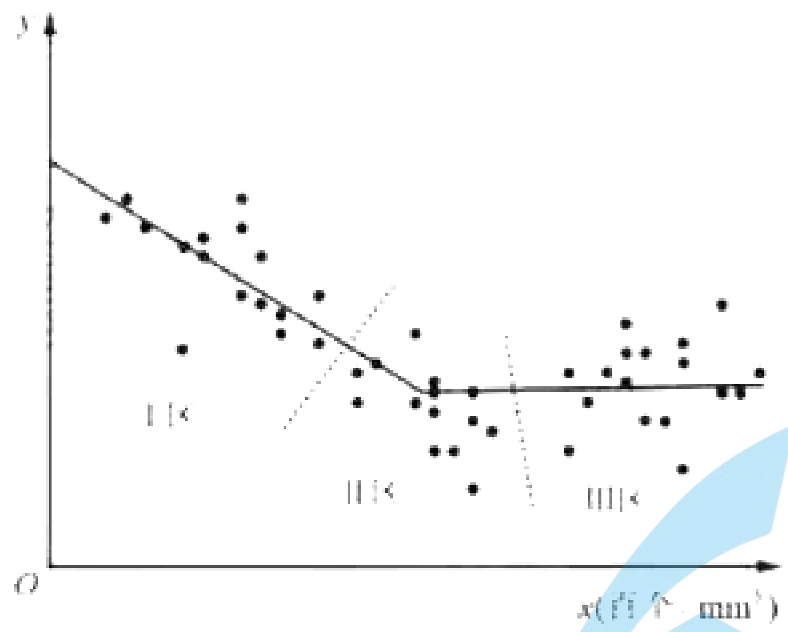


（1）求证：平面 $PBE\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）求直线 PC 和平面 PBD 所成角的正弦值．

20．（12 分）

抗癌药在消灭癌细胞的同时也会使白细胞的数量减少．一般地，病人体内白细胞浓度低于 4000 个 /mm^3 时需要使用升血药物进行"升血"治疗，以刺激骨髓造血，增加血液中白细胞数量．为了解病人的最终用药剂量数 y（1 剂量=25 μg）和首次用药时的白细胞浓度 x（单位：百个 /mm^3）的关系，某校研究性学习小组从医院甲随机抽取了首次用药时白细胞浓度均分布在 0~4000 个 /mm^3 的 47 个病例，其首次用药时的白细胞浓度为 x_i（单位：百个 /mm^3），最终用药剂量数为 y_i $(i=1,2,\cdots,47)$，得到数据 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,47)$，数据散点图如图所示．他们观察发现，这些点大致分布在一条 L 形折线（由线段 L_1 和 L_2 组成）附近，其中 L_1 所在直线是由Ⅰ、Ⅱ区的点得到的回归直线，方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$；$L_2$ 所在直线是由Ⅱ、Ⅲ区的点得到的回归直线，方程为 $y=0.02x+14.64$．



以下是他们在统计中得到的部分数据：

Ⅰ区：$\sum\limits_{i=1}^{16}x_iy_i=4721$，$\sum\limits_{i=1}^{16}x_i^2=1706$，$\sum\limits_{i=1}^{16}x_i=160$，$\sum\limits_{i=1}^{16}y_i=480$；

Ⅱ区：$\sum\limits_{i=17}^{30}x_iy_i=4713$，$\sum\limits_{i=17}^{30}x_i^2=5134$，$\sum\limits_{i=17}^{30}x_i=266$，$\sum\limits_{i=17}^{30}y_i=252$．

（1）根据上述数据求 $\hat{a},\hat{b}$ 的值；（结果保留两位小数）

（2）根据 L 形折线估计，首次用药时白细胞浓度（单位：个 /mm^3）为多少时最终用药剂量最少？（结果保留整数）

（3）事实上，使用该升血药的大量数据表明，当白细胞浓度在 0~4000 个 /mm^3 时，首次用药时白细胞浓度越高，最终用药剂量越少．请从统计学的角度分析（2）的结论与实际情况产生差异的原因．（至少写出两点）

参考数据：$\dfrac{4721-16\times10\times30}{1706-16\times10^2}\approx-0.745$，$\dfrac{9434-30\times14.5\times24}{6840-30\times14.5^2}\approx-1.889$，$\dfrac{9434-30\times14.2\times24.4}{6840-30\times14.2^2}\approx-1.214$．

$30+0.745\times10=37.45$，$24+1.889\times14.5\approx51.39$，$24.4+1.214\times14.2\approx41.64$．

21．（12 分）

已知函数 $f(x)=(x+3)e^{-x}+2x$．

（1）证明：$f(x)$ 恰有两个极值点；

（2）若 $f(x)\leqslant ax^2+3$，求 a 的取值范围．

22．（12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A,B，O 为坐标原点，直线 $l:x=1$ 与 C 的两个交点和 O,B 构成一个面积为 $\sqrt{6}$ 的菱形．

（1）求 C 的方程；

（2）圆 E 过 O,B，交 l 于点 M,N，直线 AM,AN 分别交 C 于另一点 P,Q，点 S,T 满足 $\overrightarrow{AS}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{SP}$，$\overrightarrow{AT}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{TQ}$，求 O 到直线 ST 和直线 PQ 的距离之和的最大值．

高　三　诊　断　性　练　习

数学参考答案及评分细则

评分说明：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4. 只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

一、选择题：本大题考查基础知识和基本运算。每小题 5 分，满分 40 分。

1．C　2．D　3．D　4．B　5．A　6．A　7．C　8．C

二、选择题：本大题考查基础知识和基本运算。每小题 5 分，满分 20 分。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9．AD　10．BD　11．ABD　12．BCD

三、填空题：本大题考查基础知识和基本运算。每小题 5 分，满分 20 分。

13．$y=x$　14．$\frac{3}{2}$　15．$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$　16．$\frac{2}{9}\pi R^2$；πR^2

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．本小题主要考查正弦定理、余弦定理、三角形面积公式及三角恒等变换等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力等，考查化归与转化思想、函数与方程思想等，考查数学运算、逻辑推理等核心素养，体现基础性和综合性．满分 10 分．

解法一：选① $b\sin A+a\cos B=0$，

在△ABC 中，由正弦定理得 $\sin B\sin A+\sin A\cos B=0$，　……………………2 分

因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A\neq 0$，

所以 $\sin B+\cos B=0$，　……………………4 分

显然 $\cos B\neq 0$，所以 $\tan B=-1$，　……………………5 分

因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{3\pi}{4}$．　……………………6 分

因为 $\cos A=\frac{3}{5}<\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 单调递减，所以 $A>\frac{\pi}{4}$，　……………………8 分

所以 $A+B>\pi$，与△ABC 内角和为 π 矛盾．

所以，不存在符合题意的△ABC．　……………………10 分

解法二：选① $b\sin A+a\cos B=0$，

在△ABC 中，由正弦定理得 $\sin B\sin A+\sin A\cos B=0$．　……………………2 分

因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A\neq 0$，

所以 $\sin B+\cos B=0$，　……………………4 分

所以 $\sqrt{2}\sin(B+\frac{\pi}{4})=0$．　……………………5 分

因为$0<B<\pi$，所以$\frac{\pi}{4}<B+\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}$，所以$B+\frac{\pi}{4}=\pi$，所以$B=\frac{3\pi}{4}$. …………6 分

因为$\cos A=\frac{3}{5}$，得$\sin A=\frac{4}{5}$，…………7 分

又因为$A+B+C=\pi$，

所以$\sin C=\sin(A+B)=\sin(A+\frac{3\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin A+\cos A)=-\frac{\sqrt{2}}{10}<0$，（*）

又因为$0<C<\pi$，所以$\sin C>0$，与（*）矛盾，…………9 分

所以，不存在符合题意的$\triangle ABC$. …………10 分

解法三：选①$b\sin A+a\cos B=0$，

在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$\sin B\sin A+\sin A\cos B=0$. …………2 分

因为$0<A<\pi$，所以$\sin A\neq 0$，

所以$\sin B+\cos B=0$，…………4 分

显然$\cos B\neq 0$，所以$\tan B=-1$，…………5 分

因为$0<B<\pi$，所以$B=\frac{3\pi}{4}$，…………6 分

所以$B>A$.（*）

又因为$\cos A=\frac{3}{5}$，所以$\sin A=\frac{4}{5}$. …………7 分

因为$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{5\sqrt{2}}{2}<4$，…………8 分

所以$b<a$，所以$B<A$，与（*）矛盾. …………9 分

所以，不存在符合题意的$\triangle ABC$. …………10 分

解法四：选②$\sqrt{5}\cos 2C+3\cos C=0$，

由②得$\sqrt{5}(2\cos^2 C-1)+3\cos C=0$，…………1 分

所以$2\sqrt{5}\cos^2 C+3\cos C-\sqrt{5}=0$，

解得$\cos C=\frac{\sqrt{5}}{5}$或$\cos C=-\frac{\sqrt{5}}{2}<-1$（舍去）. …………2 分

在$\triangle ABC$中，$0<C<\pi$，所以$\sin C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. …………3 分

又因为$\cos A=\frac{3}{5}$，$0<A<\pi$，所以$\sin A=\frac{4}{5}$. …………4 分

由$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，得$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=2\sqrt{5}$. …………6 分

又因为$A+B+C=\pi$，

所以$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. …………8 分

所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=8$. …………10 分

解法五：选③$\sin B+\sin C=2\sin A$

在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$b+c=2a$. …………2 分

因为 $a=4$，所以 $b+c=8$． ……………………………………………………………3 分

在△ ABC 中，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$， ……………………………………………5 分

因为 $\cos A=\frac{3}{5}$，所以 $16=b^2+c^2-\frac{6}{5}bc$，

所以 $(b+c)^2-\frac{16}{5}bc=16$，所以 $bc=15$． ……………………………………………7 分

因为 $\cos A=\frac{3}{5}$，且 $0<A<\pi$，则 $\sin A=\frac{4}{5}$． ……………………………………8 分

所以△ ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times15\times\frac{4}{5}=6$． ………………………… 10 分

18．本小题主要考查等差数列、等比数列、递推数列及数列求和等基础知识，考查运算求解能力、逻辑推理能力和创新能力等，考查化归与转化思想、分类与整合思想、函数与方程思想等，考查逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性和创新性．满分 12 分．

解法一：（1）由 $S_{n+1}-1=S_n+2a_n$，

得 $S_{n+1}-S_n=2a_n+1$，则 $a_{n+1}=2a_n+1$， ……………………………………………2 分

所以 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$． ………………………………………………………………3 分

①当 $a_1+1=0$ 时，$\{a_n+1\}$ 不是等比数列，符合题意； ………………………………4 分

②当 $a_1+1\neq0$ 时，$a_n+1=2(a_{n-1}+1)=2^2(a_{n-2}+1)=\cdots=2^{n-1}(a_1+1)\neq0$，

所以 $\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，所以 $\{a_n+1\}$ 是首项为 a_1+1，公比为 2 的等比数列，与已知矛盾．

………………………………………………………………………………………………5 分

综上，$a_1+1=0$，从而 $a_n+1=0$，即 $a_n=-1$． ……………………………………………6 分

（2）因为 $a_1=1$，则 $a_1+1=2$，由（1）知 $\{a_n+1\}$ 是首项为 a_1+1，公比为 2 的等比数列，

$a_n+1=2^n$，所以 $a_n=2^n-1$． ……………………………………………………………7 分

设插入的所有数构成数列 $\{c_n\}$，则 $c_n=2n-1$， ……………………………………………8 分

因为 $1+2+3+\cdots+8=36$，$36+9=45<50$，

$1+2+3+\cdots+8+9=45$，$45+10=55>50$，

所以，$b_1,b_2,\cdots,b_{50}$ 中包含 $\{a_n\}$ 的前 9 项及 $\{c_n\}$ 的前 41 项， ……………………9 分

所以 $T_{50}=(a_1+a_2+\cdots+a_9)+(c_1+c_2+\cdots+c_{41})$ ………………………………… 10 分

$$=(2-1)+(2^2-1)+\cdots+(2^9-1)+41\times1+\frac{41\times40}{2}\times2$$

$$=\frac{2(1-2^9)}{1-2}-9+1681=2^{10}-11+1681=2694．$$ …………………………… 12 分

解法二：（1）由 $S_{n+1}-1=S_n+2a_n$ ①，

$n\geq2$ 时，$S_n-1=S_{n-1}+2a_{n-1}$ ②，

①-②得，$a_{n+1}=a_n+2a_n-2a_{n-1}$， ……………………………………………………1 分

所以 $a_{n+1}-2a_n=a_n-2a_{n-1}$， ……………………………………………………………2 分

所以 $a_{n+1}-2a_n=a_2-2a_1\left(n\geq2,n\in\mathbf{N}^*\right)$．

当 $n=1$ 时，$S_2-1=S_1+2a_1$，得 $a_2-2a_1=1$，所以 $a_{n+1}-2a_n=1\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，…………3 分

所以 $a_{n+1}+1=2\left(a_n+1\right)=2^2\left(a_{n-1}+1\right)=\cdots=2^n\left(a_1+1\right)$，

因为 $\{a_n+1\}$ 不是等比数列，所以 $a_1+1=0$，…………4 分

事实上，若 $a_1+1\neq0$，则 $a_n+1\neq0$，从而 $\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，

此时 $\{a_n+1\}$ 是首项为 a_1+1，公比为 2 的等比数列，与已知矛盾. …………5 分

所以 $a_n+1=0$，即 $a_n=-1$. …………6 分

（2）同解法一. …………12 分

解法二：（1）由 $S_{n+1}-1=S_n+2a_n$ ①，

$n\geq2$ 时，$S_n-1=S_{n-1}+2a_{n-1}$ ②，

①-②得，$a_{n+1}=a_n+2a_n-2a_{n-1}$，…………1 分

所以 $a_{n+1}-a_n=2(a_n-a_{n-1})$，…………2 分

则 $a_{n+1}-a_n=2(a_n-a_{n-1})=\cdots=2^{n-1}(a_2-a_1)$，

所以 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$

$=a_1+(a_2-a_1)(1+2+2^2+\cdots+2^{n-2})$

$=a_1+(a_2-a_1)(2^{n-1}-1)=(a_2-a_1)2^{n-1}+2a_1-a_2$，…………3 分

所以 $a_n+1=(a_2-a_1)2^{n-1}+2a_1-a_2+1$.

当 $n=1$ 时，$S_2-1=S_1+2a_1$，得 $a_2=2a_1+1$，…………4 分

所以 $a_n+1=(a_1+1)2^{n-1}$，

若 $a_1+1\neq0$，则 $\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，

此时 $\{a_n+1\}$ 是首项为 a_1+1，公比为 2 的等比数列，与已知矛盾. …………5 分

所以 $a_1+1=0$，则 $a_n+1=0$，即 $a_n=-1$. …………6 分

（2）同解法一. …………12 分

19. 本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，直线与平面所成角等基础知识；考查空间想象能力，逻辑推理能力，运算求解能力等；考查化归与转化思想，数形结合思想，函数与方程思想等；考查直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养；体现基础性和综合性. 满分 12 分.

解法一：（1）如图，过点 E 作 $EF\,/\!/\,AB$，交 BC 于点 F，

连结 AF 交 BE 于点 O，连结 PO，PF. …………1 分

因为底面 $ABCD$ 为矩形，且 $AB=AE$，

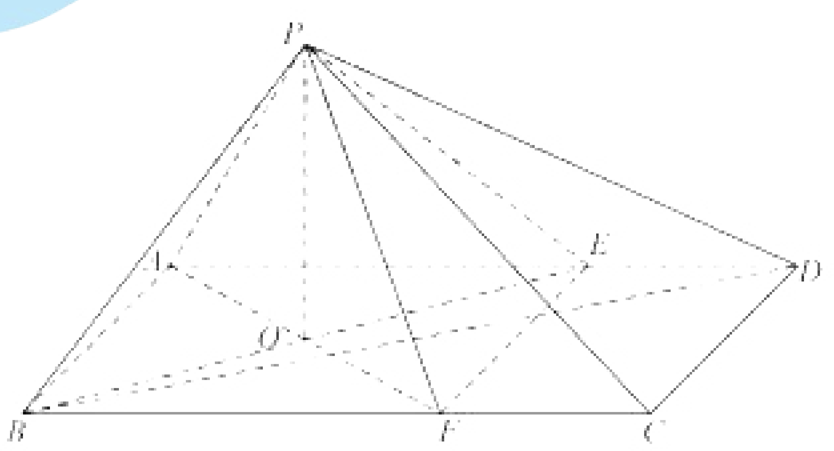
所以四边形 $ABFE$ 为正方形.

所以 $AF\perp BE$，$AB=BF$. …………2 分

又因为 $\angle PBA=\angle PBC$，$PB=PB$，

所以 $\triangle PBA\cong\triangle PBF$，所以 $PA=PF$.

因为 O 为 AF 的中点，所以 $PO\perp AF$. …………4 分



因为 $PO\cap BE=O$，$PO,BE\subset$ 平面 PBE，

所以 $AF\perp$ 平面 PBE，…………5 分

因为 $AF\subset$ 平面 $ABCD$，所以平面 $PBE\perp$ 平面 $ABCD$. …………6 分

（2）设 $DE=1$，则 $PB=AB=AE=2$．

因为 $\angle PBA=60^\circ$，所以 ΔPAB 为等边三角形，所以 $PA=2$．

在正方形 $ABFE$ 中，$AF=BE=2\sqrt{2}$，$AO=BO=\sqrt{2}$，

在 $\mathrm{Rt}\Delta POA$ 中，$PO^2=PA^2-OA^2=2$，所以 $PO=\sqrt{2}$．

所以 $PO^2+OB^2=PB^2$，所以 $\angle POB=90^\circ$，所以 $PO\perp BE$．

因为平面 $PBE\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $PBE\cap$ 平面 $ABCD=BE$，$PO\subset$ 平面 PBE，

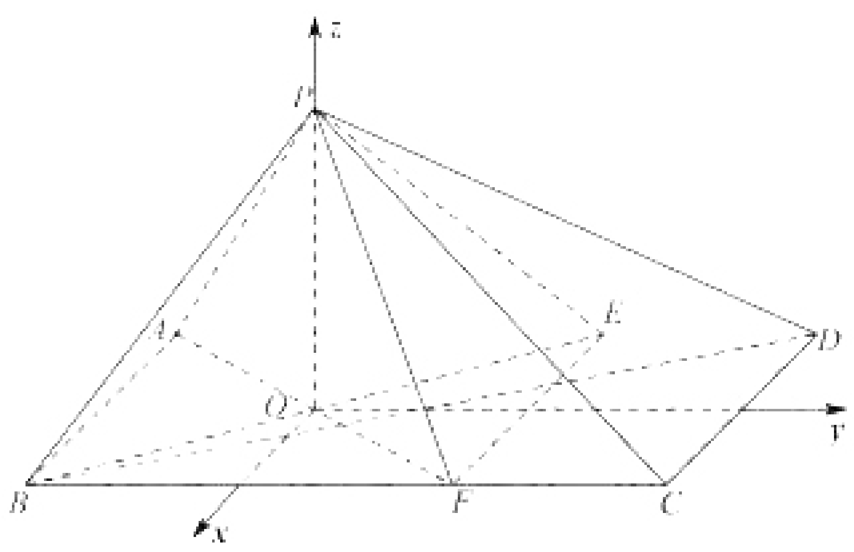
所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$．……………………………………………………………………7 分

以 O 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OP}$ 为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系．……………………………………………………………………8 分

则 $B(1,-1,0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，$C(1,2,0)$，$D(-1,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{BP}=(-1,1,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{DP}=(1,-2,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{PC}=(1,2,-\sqrt{2})$．……………………………9 分

设平面 BPD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，



则 $\begin{cases}\overrightarrow{BP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+y+\sqrt{2}z=0,\\ x-2y+\sqrt{2}z=0.\end{cases}$

取 $\boldsymbol{n}=(3,2,\frac{\sqrt{2}}{2})$，………………………… 10 分

设直线 PC 与平面 PBD 所成角为 θ，则

$$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{PC},\boldsymbol{n}>\right|=\frac{|\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{6}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{\frac{27}{2}}}=\frac{2\sqrt{42}}{21}.$$

所以，直线 PC 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{42}}{21}$．…………………………… 12 分

解法二：（1）同解法一；

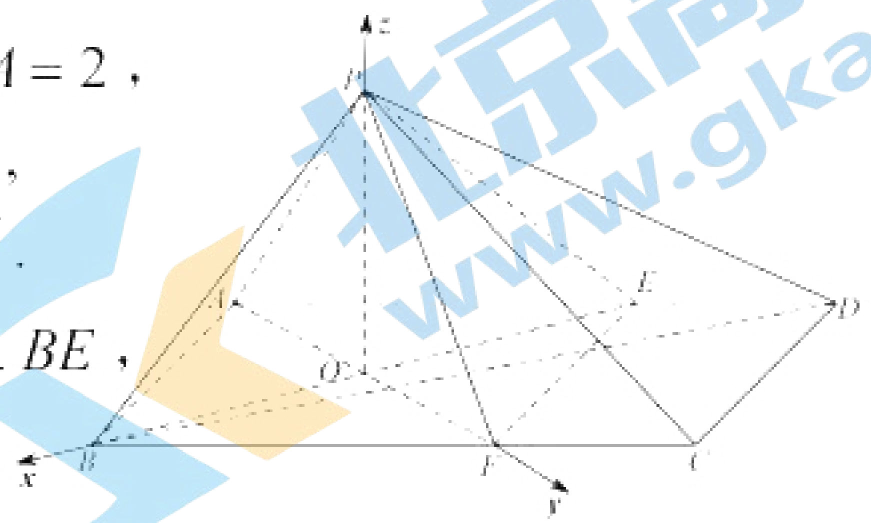
（2）设 $DE=1$，则 $PB=AB=AE=2$，

因为 $\angle PBA=60^\circ$，所以 ΔPAB 为等边三角形，所以 $PA=2$，

在正方形 $ABFE$ 中，$AF=BE=2\sqrt{2}$，$AO=BO=\sqrt{2}$，

在 $\mathrm{Rt}\Delta POA$ 中，$PO^2=PA^2-OA^2=2$，所以 $PO=\sqrt{2}$．

所以 $PO^2+OB^2=PB^2$，所以 $\angle POB=90^\circ$，所以 $PO\perp BE$，



又由（1）知，$AF\perp BE$，$PO\perp AF$，

以 O 为原点，分别以 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OF}$，$\overrightarrow{OP}$ 为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系．……………………………………………………………………8 分

则 $B(\sqrt{2},0,0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，$C(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2},0)$，$D(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$，

所以 $\overrightarrow{BP}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{DP}=(\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{PC}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2})$．…………9 分

设平面 BPD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+z=0,\\ 3x-y+2z=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}=(1,5,1)$． ………………………………………… 10 分

设直线 PC 与平面 PBD 所成角为 θ，则

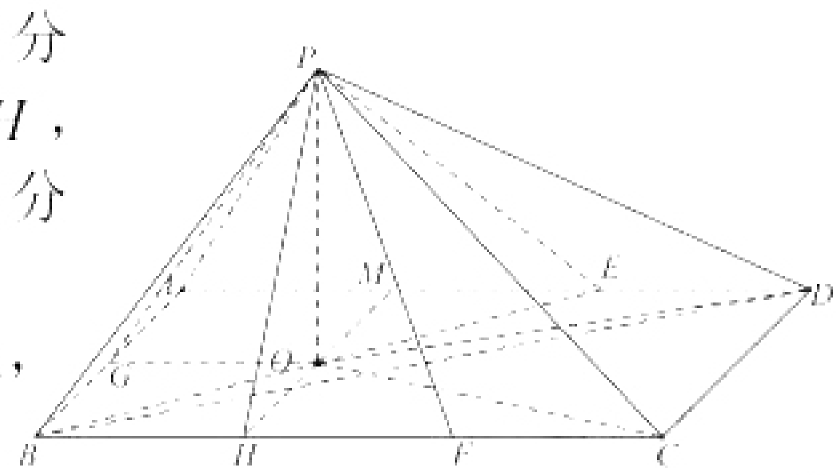
$$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{PC},\boldsymbol{n}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{PC}\right|\cdot\left|\boldsymbol{n}\right|}=\frac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{42}}{21}.$$

所以，直线 PC 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{42}}{21}$． ………………………………… 12 分

解法二：（1）如图，过点 P 作 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，垂足为 O，过点 O 分别作 $OG\perp AB$，$OH\perp BC$，垂足分别为 G，H，连结 PG，PH．…………………… 1 分

则 $PO\perp AB$，因为 $OG\cap PO=O$，$PO,OG\subset$ 平面 POG，所以 $AB\perp$ 平面 POG，

所以 $AB\perp PG$．同理，$BC\perp PH$． ………………… 3 分



因为 $\angle PBA=\angle PBC$，$PB=PB$，所以 $\triangle PBG\cong\triangle PBH$，

所以 $BG=BH$． ……………………………………… 4 分

连结 OB，所以 $\triangle OBG\cong\triangle OBH$，

所以 $\angle OBG=\angle OBH$，所以点 O 在 $\angle ABC$ 的平分线上，

因为 $AB=AE$ 且底面 $ABCD$ 为矩形，

所以 BE 为 $\angle ABC$ 的平分线，所以 B,O,E 三点共线． ……………………………………… 5 分

所以 $PO\subset$ 平面 PBE，所以平面 $PBE\perp$ 平面 $ABCD$．……………………………………… 6 分

（2）设 $DE=1$，则 $PB=AB=AE=2$，

因为 $\angle PBA=60^\circ$，所以 $\triangle PAB$ 为等边三角形，所以 $PA=2$，

由（1）知，$AB\perp PG$，所以 G 为 AB 中点．

因为在矩形 $ABCD$ 中，$OG\perp AB$，$AD\perp AB$，所以 $OG/\!/AD$，所以 O 为 BE 中点．

在正方形 $ABFE$ 中，$AF=BE=2\sqrt{2}$，$AO=BO=\sqrt{2}$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle POB$ 中，$PO^2=PB^2-OB^2=2$，所以 $PO=\sqrt{2}$．

过 O 作 $OM\perp AD$ 于 M，连接 OD，则 $OM=\frac{1}{2}AB=1,ME=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}AB=1$，

$MD=ME+ED=2$，在 $\mathrm{Rt}\triangle OMD$ 中，$OD=\sqrt{OM^2+MD^2}=\sqrt{5}$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle POD$ 中，$PD=\sqrt{PO^2+OD^2}=\sqrt{7}$，

连接 OC，同理可得 $PC=\sqrt{7}$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，$BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{13}$， ……………………………………………… 7 分

在 $\triangle PBD$ 中，$\cos\angle PDB=\frac{PD^2+BD^2-PB^2}{2PD\cdot BD}=\frac{8}{\sqrt{91}}$，

所以 $\sin\angle PDB=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$，所以 $S_{\triangle PDB}=\frac{1}{2}PD\cdot DB\cdot\sin\angle PDB=\frac{3\sqrt{3}}{2}$． …………………9 分

设 C 到平面 PBD 的距离为 h，

由 $V_{C-PBD}=V_{P-BCD}$，得 $\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot PO=\frac{1}{3}S_{\triangle PDB}\cdot h$，解得 $h=\frac{2\sqrt{6}}{3}$． ………………… 11 分

设直线 PC 与平面 PBD 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{h}{PC}=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{42}}{21}$.

所以，直线 PC 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{42}}{21}$. ……………………………… 12 分

20. 本小题主要考查回归分析等基础知识；考查数学建模能力，运算求解能力，逻辑推理能力，创新能力以及理解和表达能力等；考查统计与概率思想，函数与方程思想等；考查数学抽象，数学建模，数据分析和数学运算等核心素养；体现综合性，应用性和创新性．满分 12 分．

解：（1）因为 $\sum_{i=1}^{30}x_iy_i=\sum_{i=1}^{16}x_iy_i+\sum_{i=17}^{30}x_iy_i=9434$，$\sum_{i=1}^{30}x_i^2=\sum_{i=1}^{16}x_i^2+\sum_{i=17}^{30}x_i^2=6840$，

$\overline{x}=\frac{1}{30}\left(\sum_{i=1}^{16}x_i+\sum_{i=17}^{30}x_i\right)=14.2$，$\overline{y}=\frac{1}{30}\left(\sum_{i=1}^{16}y_i+\sum_{i=17}^{30}y_i\right)=24.4$， ………………………… 2 分

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}=\frac{9434-30\times14.2\times24.4}{6840-30\times14.2^2}\approx-1.214$， ……4 分

所以 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=24.4+1.214\times14.2\approx41.64$，

$\hat{a}=41.64,\hat{b}=-1.21$ ……………………………………………………………………… 5 分

（2）由（1）知 $\hat{a}=41.64,\hat{b}=-1.21$，所以 L_1 的方程为 $y=-1.21x+41.64$.

联立 $\begin{cases}y=-1.21x+41.64,\\y=0.02x+14.64,\end{cases}$ ……………………………………………………… 7 分

解得 $x\approx21.95$， …………………………………………………………………… 8 分

所以首次用药时的白细胞浓度为 2195 个/mm^3 时，最终用药剂量最少．…………9 分

（3）本题结论开放，只要考生能从统计学的角度作出合理的分析即可．如：①一次取样未必能客观反映总体；②样本容量过小也可能影响估计的准确性；③忽略异常点的影响也可能导致估计失真；④模型选择不恰当，模型的拟合效果不好，也将导致估计失真；⑤样本不具代表性，也会对估计产生影响．等等．………………… 12 分

21. 本小题主要考查导数，函数的单调性、极值，不等式等基础知识；考查逻辑推理能力，直观想象能力，运算求解能力和创新能力等；考查函数与方程思想，化归与转化思想，数形结合思想，分类与整合思想等；考查逻辑推理，直观想象，数学运算等核心素养；体现综合性和创新性．满分 12 分．

解法一：

（1）依题意 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=-(x+2)e^{-x}+2$，$f''(x)=(x+1)e^{-x}$，…… 1 分

当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$f''(x)>0$，所以 $f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 单调递增，

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f''(x)<0$，所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 单调递减．…………………… 2 分

又因为 $f'(-1)=2-e<0$，$f'(0)=0$，$f'(-2)=2>0$，

所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 恰有1个零点 x_0，在 $(-1,+\infty)$ 恰有1个零点 0， ………………… 4 分

且当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(x_0,0)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 单调递增，在 $(x_0,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 恰有一个极大值点 x_0 和一个极小值点 0，

即 $f(x)$ 恰有两个极值点；……………………………………………………………………5 分

（2）由 $f(x)\le ax^2+3$ 得，$(x+3)e^{-x}\le ax^2-2x+3$，即 $(ax^2-2x+3)e^x\ge x+3$，

设 $g(x)=(ax^2-2x+3)e^x-x-3$．

①当 $a\ge\frac{1}{2}$ 时，因为 $x^2e^x\ge 0$，

所以 $g(x)=ax^2e^x+(3-2x)e^x-x-3\ge\frac{1}{2}x^2e^x+(3-2x)e^x-x-3$． ……………………6 分

设 $h(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-2x+3\right)e^x-x-3$，则 $h'(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-x+1\right)e^x-1$，$h''(x)=\frac{1}{2}x^2e^x\ge 0$，

所以 $h'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增．又因为 $h'(0)=0$，

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，

所以 $h(x)\ge h(0)=0$，所以 $g(x)\ge 0$，即 $f(x)\le ax^2+3$，符合题意；………………8 分

②当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，则 $g'(x)=(ax^2+2(a-1)x+1)e^x-1$，

$g''(x)=(ax^2+2(2a-1)x+2a-1)e^x$． ……………………………………………………… 10 分

设 $\varphi(x)=ax^2+2(2a-1)x+2a-1$，

$\Delta=4(2a-1)^2-4a(2a-1)=4(2a-1)(a-1)>0$，

所以 $\varphi(x)$ 恰有两个零点 x_1,x_2，且 $x_1x_2=\frac{2a-1}{a}<0$，

所以 $x_1<0<x_2$，且当 $x\in(0,x_2)$ 时，$\varphi(x)<0$．

所以当 $x\in(0,x_2)$ 时，$g''(x)<0$，所以 $g'(x)$ 在 $(0,x_2)$ 单调递减，$g'(x)<g'(0)=0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,x_2)$ 单调递减，

所以当 $x\in(0,x_2)$ 时，$g(x)<g(0)=0$，

即 $f(x)>ax^2+3$，与 $f(x)\le ax^2+3$ 矛盾，不合题意；…………………………………… 11 分

③当 $a\le 0$ 时，$g(x)\le(3-2x)e^x-x-3$，

所以 $g(1)\le e-4<0$，即 $f(1)>a+3$ 与 $f(1)\le a+3$ 矛盾，不符合题意；

综上，a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$．…………………………………………………… 12 分

解法二：

（1）同解法一；……………………………………………………………………………………5 分

（2）设 $g(x)=f(x)-ax^2-3=(x+3)e^{-x}-ax^2+2x-3$，则 $g(x)\le 0$，

$g'(x)=-(x+2)e^{-x}-2ax+2$，$g''(x)=(x+1)e^{-x}-2a$，$g'''(x)=-xe^{-x}$． ……………6 分

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'''(x)<0$，所以 $g''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

当$x\in(-\infty,0)$时，$g'''(x)>0$，所以$g''(x)$在$(-\infty,0)$单调递增，

所以$g''(x)\le g''(0)=1-2a$． ………………………………………………………………7 分

①当$a\ge\frac{1}{2}$时，因为$g''(x)\le 1-2a\le 0$，所以$g'(x)$单调递减，又因为$g'(0)=0$，

所以当$x\in(0,+\infty)$时，$g'(x)<0$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，

当$x\in(-\infty,0)$时，$g'(x)>0$，所以$g(x)$在$(-\infty,0)$单调递增，

所以$g(x)\le g(0)=0$，即$f(x)\le ax^2+3$，符合题意；………………………………9 分

②当$0<a<\frac{1}{2}$时，$g''(-1)=-2a<0$，$g''(0)=1-2a>0$，

所以$g''(0)\cdot g''(-1)<0$，又因为$g''(x)$在$(-\infty,0)$单调递增，

所以$g''(x)$在$(-\infty,0)$恰有一个零点x_1，且当$x\in(x_1,0)$时，$g''(x)>0$，

所以$g'(x)$在$(x_1,0)$单调递增，

所以当$x\in(x_1,0)$时，$g'(x)<g'(0)=0$，所以$g(x)$在$(x_1,0)$单调递减，

所以当$x\in(x_1,0)$时，$g(x)>g(0)=0$，与$g(x)\le 0$矛盾，不符合题意；…………11 分

③当$a\le 0$时，当$x\in(0,+\infty)$时，$g''(x)=(x+1)e^{-x}-2a\ge 0$，

所以$g'(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，所以$g'(x)>g'(0)=0$，

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，所以$g(x)>g(0)=0$，与$g(x)\le 0$矛盾，不符合题意；

综上，a的取值范围为$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$． ……………………………………………12 分

解法二：

（1）同解法一；………………………………………………………………………………5 分

（2）设$g(x)=f(x)-ax^2-3=(x+3)e^{-x}-ax^2+2x-3$，则$g(x)\le 0$，

$g'(x)=-(x+2)e^{-x}-2ax+2$，$g''(x)=(x+1)e^{-x}-2a$，$g'''(x)=-xe^{-x}$．

所以当$x\in(0,+\infty)$时，$g'''(x)<0$，所以$g''(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，

当$x\in(-\infty,0)$时，$g'''(x)>0$，所以$g''(x)$在$(-\infty,0)$单调递增，

所以$g''(x)\le g''(0)=1-2a$． ………………………………………………………………7 分

①当$a\ge\frac{1}{2}$时，因为$g''(x)\le 1-2a\le 0$，所以$g'(x)$单调递减，又因为$g'(0)=0$，

所以当$x\in(0,+\infty)$时，$g'(x)<0$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，

当$x\in(-\infty,0)$时，$g'(x)>0$，所以$g(x)$在$(-\infty,0)$单调递增，

所以$g(x)\le g(0)=0$，即$f(x)\le ax^2+3$，符合题意；………………………………9 分

②当$0<a<\frac{1}{2}$时，设$h(x)=e^x-x^2\ (x\ge 1)$，则$h'(x)=e^x-2x$，$h''(x)=e^x-2\ge e-2>0$，

所以$h'(x)$在$(1,+\infty)$单调递增，所以$h'(x)>h'(1)=e-2>0$，

所以$h(x)$在$(1,+\infty)$单调递增，所以$h(x)\ge h(1)=e-1>0$，

所以当$b>\frac{1}{a}>2$时，$e^b>b^2$，所以$g''(b)<\frac{b+1}{b^2}-2a<\frac{2}{b}-2a<0$．

因为$g''(0)=1-2a>0$，所以$g''(0)\cdot g''(b)<0$，又因为$g''(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，

所以$g''(x)$在$(0,+\infty)$恰有一个零点x_1，且当$x\in(0,x_1)$时，$g''(x)>0$，

所以$g'(x)$在$(0,x_1)$单调递增，

所以当$x\in(0,x_1)$时，$g'(x)>g'(0)=0$，所以$g(x)$在$(0,x_1)$单调递增，

所以当$x\in(0,x_1)$时，$g(x)>g(0)=0$，与$g(x)\le 0$矛盾，不符合题意；…………11 分

③当$a\le 0$时，$g(x)\ge(x+3)e^{-x}+2x-3$，

所以$g(2)\ge 5e^{-2}+1>0$，与$g(x)\le 0$矛盾，不符合题意；

综上，a的取值范围为$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$．…………12 分

解法四：

（1）同解法一；…………5 分

（2）设$g(x)=f(x)-ax^2-3=(x+3)e^{-x}-ax^2+2x-3$，则$g(x)\le 0$．

又因为$g(0)=0$，所以0是$g(x)$的一个极大值点．

又$g'(x)=-(x+2)e^{-x}-2ax+2$，

所以存在$\delta>0$，使得当$x\in(-\delta,0)$时$g'(x)\ge 0$，即$2a\ge\dfrac{-(x+2)e^{-x}+2}{x}$，

且当$x\in(0,\delta)$时$g'(x)\le 0$，即$2a\ge\dfrac{-(x+2)e^{-x}+2}{x}$．…………7 分

设$h(x)=\dfrac{-(x+2)e^{-x}+2}{x}$，则$h'(x)=\dfrac{(x^2+2x+2)e^{-x}-2}{x^2}$．

设$\varphi(x)=(x^2+2x+2)e^{-x}-2$，则$\varphi'(x)=-x^2e^{-x}\le 0$，

所以，$\varphi(x)$在$(-\delta,\delta)$单调递减，

所以，当$x\in(-\delta,0)$时，$\varphi(x)\ge\varphi(0)=0$，$h'(x)\ge 0$，$h(x)$在$(-\delta,0)$单调递增，

当$x\in(0,\delta)$时，$\varphi(x)\le\varphi(0)=0$，$h'(x)\le 0$，$h(x)$在$x\in(0,\delta)$单调递减，…………8 分

所以$2a\ge\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-(x+2)e^{-x}+2}{x}$．设$u(x)=-(x+2)e^{-x}+2$，则$u(0)=0$，

$u'(x)=(x+1)e^{-x}$，$u'(0)=1$．

所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-(x+2)e^{-x}+2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-(x+2)e^{-x}+2-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u(x)-u(0)}{x-0}=u'(0)=1$，

所以$2a\ge 1$，即$a\ge\frac{1}{2}$．…………10 分

另一方面，当$a\ge\frac{1}{2}$时，$g(x)=(x+3)e^{-x}-ax^2+2x-3\le(x+3)e^{-x}-\frac{1}{2}x^2+2x-3$．

设$m(x)=(x+3)e^{-x}-\frac{1}{2}x^2+2x-3$，则$m'(x)=-(x+2)e^{-x}-x+2$，

当$m''(x)=(x+1)e^{-x}-1$，$m'''(x)=-xe^{-x}$．

所以当$x\in(0,+\infty)$时，$m'''(x)<0$，所以$m''(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$m'''(x)>0$，所以 $m''(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增，

所以 $m''(x)\le m''(0)=0$，所以 $m'(x)$ 单调递减. 又因为 $m'(0)=0$，

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$m'(x)<0$，所以 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$m'(x)>0$，所以 $m(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增，

所以 $m(x)\le m(0)=0$，所以 $f(x)\le ax^2+3$，符合题意.

综上，a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. …………………………………………………… 12 分

22. 本小题主要考查椭圆的标准方程及简单几何性质，直线与圆、椭圆的位置关系，平面向量等基础知识；考查运算求解能力，逻辑推理能力，直观想象能力和创新能力等；考查数形结合思想，函数与方程思想，化归与转化思想等；考查直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养；体现基础性，综合性与创新性. 满分 12 分.

解法一：（1）因为直线 $l:x=1$ 与 C 的两个交点和 O,B 构成的四边形是菱形，

所以 l 垂直平分 OB，所以 $B(2,0)$，$a=2$. ………………………………………………… 1 分

设 $D(1,y_0)$ 为直线 l 与 C 的一个交点，则菱形的面积为 $\frac{1}{2}\times2\times|2y_0|=2|y_0|$. ……… 2 分

因为菱形的面积为 $\sqrt{6}$，所以 $2|y_0|=\sqrt{6}$，解得 $y_0=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$，即 $D\left(1,\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$. ……… 3 分

将点 $D\left(1,\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，得 $\frac{1}{a^2}+\frac{3}{2b^2}=1$，又 $a^2=4$，所以 $b^2=2$. …… 4 分

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ………………………………………………………… 5 分

（2）由题意，得 OB 为圆 E 的一条弦，且直线 $x=1$ 垂直平分该弦，

故直线 $x=1$ 经过圆心 E，所以 MN 为圆 E 的直径，因此 $\angle MON=90^\circ$，即 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$.

设 $M(1,y_M)$，$N(1,y_N)$，则 $y_My_N=-1$. ………………………………………………… 6 分

注意到 $k_{AM}=\frac{y_M}{3},k_{AN}=\frac{y_N}{3}$，则 $k_{AM}\cdot k_{AN}=\frac{y_My_N}{9}=-\frac{1}{9}$.

又因为 $k_{AM}=k_{AP}$，$k_{AN}=k_{AQ}$，所以 $k_{AP}k_{AQ}=-\frac{1}{9}$. ……………………………………… 7 分

设直线 PQ 的方程为 $x=my+t(t\ne-2)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}x=my+t,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 得，$(m^2+2)y^2+2mty+t^2-4=0$.

$\Delta=4m^2t^2-4(m^2+2)(t^2-4)=8(2m^2+4-t^2)>0$，(*)

$y_1+y_2=-\frac{2mt}{m^2+2}$，$y_1y_2=\frac{t^2-4}{m^2+2}$. ① ………………………………………………… 8 分

因为 $k_{AP}=\frac{y_1}{x_1+2}$，$k_{AQ}=\frac{y_2}{x_2+2}$，故 $\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_2}{x_2+2}=-\frac{1}{9}$，

即 $\dfrac{y_1y_2}{(my_1+t+2)(my_2+t+2)}=-\dfrac{1}{9}$.

即 $\dfrac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+m(t+2)(y_1+y_2)+(t+2)^2}=-\dfrac{1}{9}$.

将①代入上式得 $\dfrac{t^2-4}{m^2(t^2-4)-2m^2t(t+2)+(t+2)^2(m^2+2)}=-\dfrac{1}{9}$， ………………… 9 分

化简得 $\dfrac{t-2}{2(t+2)}=-\dfrac{1}{9}$，解得 $t=\dfrac{14}{11}$，满足（*）.

所以直线 PQ 的方程为 $x=my+\dfrac{14}{11}$，

故直线 PQ 过定点 $G\left(\dfrac{14}{11},0\right)$. ………………………………………………… 10 分

由 $\overrightarrow{AS}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{SP}$，$\overrightarrow{AT}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{TQ}$，所以 $ST\,//\,PQ$，

所以直线 ST 也过定点 H，且 $\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{HG}$，解得 $H\left(-\dfrac{13}{11},0\right)$. ………………… 11 分

注意到 O 位于线段 GH 上，故 O 到直线 ST 的距离与 O 到直线 PQ 的距离之和等于两平行直线 ST，PQ 之间的距离 d，且 $d\leqslant\dfrac{27}{11}$.

当 ST，PQ 垂直于 x 轴时，点 O 到直线 ST 和直线 PQ 的距离之和为 $\dfrac{27}{11}$，

所以点 O 到直线 ST 和直线 PQ 的距离之和的最大值是 $\dfrac{27}{11}$. ………………… 12 分

解法二：（1）同解法一. ………………………………………………………………… 5 分

（2）由（1）可得 $A(-2,0)$，设直线 AM 的方程为 $y=k_1(x+2)$，则 $M(1,3k_1)$.

另设直线 AN 的方程为 $y=k_2(x+2)$，则 $N(1,3k_2)$.

由题意，得 OB 为圆 E 的一条弦，且直线 $x=1$ 垂直平分该弦，

故直线 $x=1$ 经过圆心 E，所以 MN 为圆 E 的直径，因此 $\angle MON=90^\circ$，即 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$.

所以 $1+3k_1\cdot3k_2=0$，即 $k_1k_2=-\dfrac{1}{9}$. ……………………………………………… 6 分

由 $\begin{cases}y=k_1(x+2),\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 得 $(x+2)\left[(2k_1^2+1)x+4k_1^2-2\right]=0$， ………………………… 7 分

所以 $x_P=-\dfrac{4k_1^2-2}{2k_1^2+1}$.

将 $x_P=-\dfrac{4k_1^2-2}{2k_1^2+1}$ 代入 $y=k_1(x+2)$，得 $y_P=\dfrac{4k_1}{2k_1^2+1}$，即 $P\left(-\dfrac{4k_1^2-2}{2k_1^2+1},\dfrac{4k_1}{2k_1^2+1}\right)$. 8 分

同理可得 $Q\left(-\dfrac{4k_2^2-2}{2k_2^2+1},\dfrac{4k_2}{2k_2^2+1}\right)$.

当 $k_1+k_2\neq 0$ 时，

直线 PQ 的斜率为 $k_{PQ}=\dfrac{\dfrac{4k_2}{2k_2^2+1}-\dfrac{4k_1}{2k_1^2+1}}{-\dfrac{4k_2^2-2}{2k_2^2+1}+\dfrac{4k_1^2-2}{2k_1^2+1}}=\dfrac{(k_1-k_2)(8k_1k_2-4)}{8(k_1+k_2)(k_1-k_2)}=\dfrac{2k_1k_2-1}{2(k_1+k_2)}$，

所以直线 PQ 的方程为 $y-\dfrac{4k_1}{2k_1^2+1}=\dfrac{2k_1k_2-1}{2(k_1+k_2)}\left(x+\dfrac{4k_1^2-2}{2k_1^2+1}\right)$， ……………………… 9 分

即 $2y(k_1+k_2)(2k_1^2+1)-8k_1(k_1+k_2)=(2k_1k_2-1)(2k_1^2+1)x+(2k_1k_2-1)(4k_1^2-2)$ ①.

将 $k_1k_2=-\dfrac{1}{9}$ 代入①，得 $y=-\dfrac{11}{18(k_1+k_2)}\left(x-\dfrac{14}{11}\right)$，所以直线 PQ 过定点 $G\left(\dfrac{14}{11},0\right)$.

当 $k_1+k_2=0$ 时，直线 PQ 的方程为 $x=\dfrac{14}{11}$，也过点 $G\left(\dfrac{14}{11},0\right)$.

因此直线 PQ 始终过定点 $G\left(\dfrac{14}{11},0\right)$. ……………………………………………………… 10 分

设直线 ST 与 x 轴交于点 $H(x_H,0)$.

因为 $\overrightarrow{AS}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{SP},\overrightarrow{AT}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{TQ}$，所以 $ST\mathbin{//}PQ$，且 $\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{HG}$，

所以 $x_H+2=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{14}{11}-x_H\right)$，解得 $x_H=-\dfrac{13}{11}$，即直线 ST 过定点 $H\left(-\dfrac{13}{11},0\right)$. …… 11 分

设直线 PQ 的方程为 $x=ty+\dfrac{14}{11}$，即 $11x-11ty-14=0$.

所以点 O 到直线 PQ 的距离为 $d_1=\dfrac{14}{11\sqrt{t^2+1}}$.

同理可得点 O 到直线 ST 的距离为 $d_2=\dfrac{13}{11\sqrt{t^2+1}}$.

所以 $d_1+d_2=\dfrac{27}{11\sqrt{t^2+1}}\le\dfrac{27}{11}$，当且仅当 $t=0$，即 PQ 垂直于 x 轴时等号成立.

故点 O 到直线 ST 和直线 PQ 的距离之和的最大值为 $\dfrac{27}{11}$. ……………………………… 12 分

解法二：（1）同解法一. ……………………………………………………………………… 5 分

（2）设 $M(1,y_M)$，$N(1,y_N)$.

由已知得 E 在直线 $x=1$ 上，设 $E(1,s)$，则圆 E 的方程为 $(x-1)^2+(y-s)^2=s^2+1$.

令 $x=1$，得 $y^2-2sy-1=0$，由韦达定理，得 $y_My_N=-1$.

由（1）可得 $A(-2,0)$，

所以直线 AM 的方程为 $y=\dfrac{y_M}{3}(x+2)$，直线 AN 的方程为 $y=\dfrac{y_N}{3}(x+2)$.

由$\begin{cases} y=\dfrac{y_M}{3}(x+2), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$整理，得$(2y_M^2+9)x^2+8y_M^2x+8y_M^2-36=0$，…………………… 7 分

所以$-2x_P=\dfrac{8y_M^2-36}{2y_M^2+9}$，则$x_P=-\dfrac{4y_M^2-18}{2y_M^2+9}$.

将$x_P=-\dfrac{4y_M^2-18}{2y_M^2+9}$代入$y=\dfrac{y_M}{3}(x+2)$，得$y_P=\dfrac{12y_M}{2y_M^2+9}$，

即$P\left(-\dfrac{4y_M^2-18}{2y_M^2+9},\dfrac{12y_M}{2y_M^2+9}\right)$.………………………………………………………… 12 分

同理可得$Q\left(-\dfrac{4y_N^2-18}{2y_N^2+9},\dfrac{12y_N}{2y_N^2+9}\right)$.

当$y_M+y_N\neq 0$时，

直线PQ的斜率为$k_{PQ}=\dfrac{\dfrac{12y_M}{2y_M^2+9}-\dfrac{12y_N}{2y_N^2+9}}{-\dfrac{4y_M^2-18}{2y_M^2+9}-\left(-\dfrac{4y_N^2-18}{2y_N^2+9}\right)}=\dfrac{2y_My_N-9}{6(y_M+y_N)}=-\dfrac{11}{6(y_M+y_N)}$.

所以直线PQ的方程为$y-\dfrac{12y_M}{2y_M^2+9}=-\dfrac{11}{6(y_M+y_N)}\left(x+\dfrac{4y_M^2-18}{2y_M^2+9}\right)$，…………… 9 分

即$y=-\dfrac{11}{6(y_M+y_N)}\left(x+\dfrac{4y_M^2-18}{2y_M^2+9}\right)+\dfrac{12y_M}{2y_M^2+9}$，

即$y=-\dfrac{11}{6(y_M+y_N)}\left(x+\dfrac{4y_M^2-18}{2y_M^2+9}-\dfrac{12y_M}{2y_M^2+9}\cdot\dfrac{6(y_M+y_N)}{11}\right)$，

即$y=-\dfrac{11}{6(y_M+y_N)}\left(x-\dfrac{14}{11}\right)$. 所以直线$PQ$过定点$G\left(\dfrac{14}{11},0\right)$.

当$y_M+y_N=0$时，直线PQ的方程为$x=\dfrac{14}{11}$，也过点$G\left(\dfrac{14}{11},0\right)$.

因此直线PQ始终过定点$G\left(\dfrac{14}{11},0\right)$. ………………………………………………… 10 分

设直线ST与x轴交于点$H(x_H,0)$.

因为$\overrightarrow{AS}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{SP},\overrightarrow{AT}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{TQ}$，所以$ST // PQ$，且$\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{HG}$，

所以$x_H+2=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{14}{11}-x_H\right)$，解得$x_H=-\dfrac{13}{11}$，即直线$ST$过定点$H\left(-\dfrac{13}{11},0\right)$. …… 11 分

设直线PQ的方程为$x=ty+\dfrac{14}{11}$，即$11x-11ty-14=0$.

所以点O到直线PQ的距离为$d_1=\dfrac{14}{11\sqrt{t^2+1}}$.

同理可得点 O 到直线 ST 的距离为 $d_2=\dfrac{13}{11\sqrt{t^2+1}}$.

所以 $d_1+d_2=\dfrac{27}{11\sqrt{t^2+1}}\le\dfrac{27}{11}$，当且仅当 $t=0$，即 PQ 垂直于 x 轴时等号成立.

故点 O 到直线 ST 和直线 PQ 的距离之和的最大值为 $\dfrac{27}{11}$. ………………………………12 分

解法四：（1）同解法一. ……………………………………………………………………………5 分

（2）因为 OB 为圆 E 的一条弦，且直线 $x=1$ 垂直平分该弦，故直线 $x=1$ 经过圆心 E，故 MN 为圆 E 的直径，所以 $\angle MON=90^\circ$，即 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$.

设 $M(1,y_M)$，$N(1,y_N)$，则 $y_My_N=-1$，……………………………………………6 分

注意到 $k_{AM}=\dfrac{y_M}{3},k_{AN}=\dfrac{y_N}{3}$，则 $k_{AM}\cdot k_{AN}=\dfrac{y_My_N}{9}=-\dfrac{1}{9}$，即 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=-\dfrac{1}{9}$. ……… 7 分

显然 k_{AP},k_{AQ} 都不为零，设 $t_1=\dfrac{1}{k_{AP}}$，$t_2=\dfrac{1}{k_{AQ}}$，则 $t_1\cdot t_2=-9$.

设直线 AP 的方程为 $x=t_1y-2$，直线 AQ 的方程为 $x=t_2y-2$，

得到直线 AP 与直线 AQ 的直线系方程为 $\left[t_1y-(x+2)\right]\left[t_2y-(x+2)\right]=0$，……… 8 分

即 $-9y^2-(t_1+t_2)(x+2)y+(x+2)^2=0$（*）.

将（*）与椭圆 $C:y^2=\dfrac{1}{2}(4-x^2)$ 联立得 $-\dfrac{9}{2}(4-x^2)-(t_1+t_2)(2+x)y+(2+x)^2=0$. ①

……………………………………………………………………………………………………9 分

其中 A,P,Q 三点的坐标符合方程①.

若 $x+2\ne0$，即 $x\ne-2$，则方程①可化为 $-\dfrac{9}{2}(2-x)-(t_1+t_2)y+2+x=0$. ②

其中 P,Q 两点的坐标符合方程②，又注意到②为二元一次方程，

故②即为 P,Q 所在直线方程，整理得直线 PQ 的方程为 $\dfrac{11}{2}x-(t_1+t_2)y-7=0$.

所以无论 t_1+t_2 为何值，直线 PQ 都经过点 $G\left(\dfrac{14}{11},0\right)$. ……………………………10 分

由题意得，$\overrightarrow{AS}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AT}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AQ}$，所以 $ST/\!/PQ$，

所以直线 ST 也过定点 H，且 $\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AG}$，解得 $H\left(-\dfrac{13}{11},0\right)$. ……………………11 分

注意到 O 位于线段 GH 上，故 O 到直线 ST 的距离与 O 到直线 PQ 的距离之和等于两平行直线 ST，PQ 之间的距离 d，且 $d\leqslant\dfrac{27}{11}$.

当 ST，PQ 垂直于 x 轴时，点 O 到直线 ST 和直线 PQ 的距离之和为 $\dfrac{27}{11}$，

所以点 O 到直线 ST 和直线 PQ 的距离之和的最大值是 $\dfrac{27}{11}$. ……………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 "精益求精、专业严谨" 的建设理念，不断探索 "K12 教育+互联网+大数据" 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 "衔接和桥梁纽带" 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。