

# 2023 北师大实验中学高三 12 月月考

## 数 学

2023.12

班级\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_

### 一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 设集合  $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 < 2\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

A.  $\{-1, 0\}$  B.  $\{0, 1\}$  C.  $\{-1, 0, 1\}$  D.  $\{-2, -1, 0, 1\}$

2. 设  $a = \lg 2, b = \lg 4, c = \lg 5$ , 则下列结论中正确的是 ( )

A.  $b = a^2$  B.  $ac = 1$

C.  $b + c = a + 1$  D.  $b + 2c = 10$

3. 若复数  $z = \frac{2+ai}{2-i}$  纯虚数, 其中  $a$  为实数, 则  $z$  的虚部为 ( )

A. -2 B. 2 C.  $-\frac{6}{5}$  D.  $\frac{10}{3}$

4. 已知直角三角形的面积为 1, 则关于该三角形的斜边, 正确的结论是 ( )

A. 最小值为 2 B. 最大值为 2

C. 最小值为  $\sqrt{2}$  D. 最大值为  $\sqrt{2}$

5. 将函数  $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$  的图像向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位得到函数  $g(x)$  的图像, 则  $g(x) =$  ( )

A.  $\sin 2x$  B.  $-\sin 2x$

C.  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$  D.  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

6. 若双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$  的一条渐近线方程为  $y = \frac{4}{3}x$ , 则该双曲线 ( )

A. 离心率为  $\frac{5}{4}$ , 焦距为 10 B. 离心率为  $\frac{5}{3}$ , 焦距为 10

C. 离心率为  $\frac{5}{4}$ , 焦距无法确定 D. 离心率为  $\frac{5}{3}$ , 焦距无法确定

7. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数  $f(x)$  满足:  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  单调递增,  $f(2) = 0$ ,  $f(-1) = f(3) = 1$ , 则不等式  $-1 < f(x) < 0$  的解集为 ( )

A.  $(-1, 0) \cup (2, 3)$  B.  $(-3, -2) \cup (0, 1)$

C.  $(-2, -1) \cup (2, 3)$  D.  $(-3, -2) \cup (1, 2)$

8. 设  $\{a_n\}$  是无穷数列, 记  $b_n = a_n + a_{n+1}$ , 则“ $\{a_n\}$  是等比数列”是“ $\{b_n\}$  是等比数列”的 ( )

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件  
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 已知正四棱锥  $S-ABCD$  的 8 条棱长均相等,  $O$  为顶点  $S$  在底面内的射影, 则 ( )

- A. 侧棱  $SA$  与底面  $ABCD$  所成的角的大小为  $\frac{\pi}{3}$   
B. 侧面  $SAB$  与底面  $ABCD$  所成的角的大小为  $\frac{\pi}{4}$   
C. 设  $P$  是正方形  $ABCD$  边上的点, 则直线  $SP$  与底面所成角的最大值是  $\frac{\pi}{4}$   
D. 设  $M, N$  是正方形  $ABCD$  边上的两点, 则二面角  $S-MN-O$  的值大于  $\frac{\pi}{4}$ .

10. 平面直角坐标系  $xOy$  中, 定点  $A$  的坐标为  $(\cos\theta, \sin\theta)$ , 其中  $0 \leq \theta \leq \pi$ . 若当点  $B$  在圆

$(x-2)^2 + y^2 = 1$  上运动时,  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  的最大值为 0, 则 ( )

- A.  $\theta = \frac{\pi}{3}$ ,  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  的最小值为 -2  
B.  $\theta = \frac{\pi}{3}$ ,  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  的最小值为  $-\frac{3}{2}$   
C.  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  的最小值为 -2  
D.  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  的最小值为  $-\frac{3}{2}$

## 二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

11. 已知向量  $\vec{a} = (2, 4)$ ,  $\vec{b} = (1, 0)$ , 若  $(\vec{a} - k\vec{b}) \perp \vec{b}$ , 则  $k =$  \_\_\_\_\_.

12. 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $a_4 = 2, S_5 = -5$ , 则  $S_9 =$  \_\_\_\_\_.

13. 函数  $f(x) = \sin 2x + 2\cos x$  在  $(0, \pi)$  上的单调递减区间为 \_\_\_\_\_.

14. 已知点  $M(x_0, 2\sqrt{3})$  在抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  上, 以  $M$  为圆心作圆与抛物线  $C$  的准线相切, 且截得  $x$  轴的弦长为 4, 则  $p =$  \_\_\_\_\_.

15. 对于定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$ , 及区间  $I_1, I_2 \subseteq \mathbf{R}$ , 记  $S_k = \{f(x) \mid x \in I_k\} (k=1, 2)$ , 若

$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ , 则称  $I_1, I_2$  为  $f(x)$  的“ $\Psi$  区间对”. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & x \leq 0, \\ 2^{-x} + a, & x > 0, \end{cases}$  给出下列四个结论:

① 若  $(-\infty, 0]$  和  $(0, +\infty)$  是  $f(x)$  的“ $\Psi$  区间对”, 则  $a$  的取值范围是  $(-\infty, 1]$ ;

②若 $(-\infty, 0]$ 和 $(0, +\infty)$ 不是 $f(x)$ 的“ $\Psi$ 区间对”，则对任意 $m > 0$ ， $(-\infty, m]$ 和 $(m, +\infty)$ 也不是 $f(x)$ 的“ $\Psi$ 区间对”；

③存在实数 $x_0$ ，使得对任意 $a \in \mathbf{R}$ ， $(-\infty, x_0]$ 和 $(x_0, +\infty)$ 都是 $f(x)$ 的“ $\Psi$ 区间对”；

④对任意 $a \in \mathbf{R}$ ，都存在实数 $x_0$ ，使得 $(-\infty, x_0]$ 和 $(x_0, +\infty)$ 不是 $f(x)$ 的“ $\Psi$ 区间对”；

其中所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_。

### 三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分）

16.（本小题满分 12 分）

已知函数  $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos x$ .

(1) 求  $f(x)$  的最小正周期及其图像的对称轴方程；

(2) 求  $f(x)$  在  $[-\pi, 0]$  上的最大值和最小值.

17.（本小题满分 13 分）

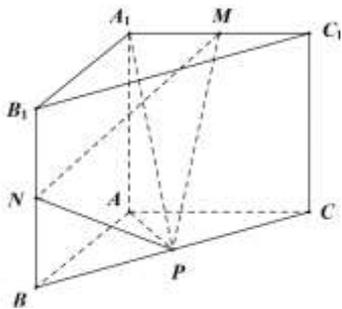
在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  所对边分别为  $a, b, c$ ，已知  $b\sin A = c\sin C$ ， $\sin B = 2\sin A$ .

(1) 求  $\cos B$ ；

(2) 已知  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ，点  $D$  满足  $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BC}$ ，求  $AD$  和  $\sin \angle CAD$  的值.

18.（本小题满分 15 分）

在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中， $AB = AC = AA_1 = 2$ ， $AA_1 \perp AB$ ，平面  $B_1BCC_1 \perp$  平面  $ABC$ ， $M, N, P$  分别为棱  $A_1C_1, BB_1, BC$  的中点，如图.



(1) 求证： $MP \parallel$  平面  $ABB_1A_1$ ；

(2) 若  $AB \perp AC$ ，

①求  $A_1P$  与平面  $MPN$  所成角的正弦值；

②求线段  $AP$  在平面  $MPN$  内的投影  $HP$  的长.

19.（本小题满分 15 分）

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，以椭圆  $C$  的上、下顶点和右焦点  $F$  为顶点的三角形

的面积为 2.

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 设  $O$  为坐标原点, 过点  $F$  的直线  $l$  交椭圆  $C$  于点  $A, B$ , 直线  $OA, OB$  交直线  $x=1$  于点  $M, N$ , 若  $\triangle AOB$  与  $\triangle MON$  的面积相等, 求直线  $l$  的方程.

20. (本小题满分 15 分)

已知函数  $f(x) = xe^{ax} - e^{2ax}, a \in \mathbf{R}$ .

(1) 当  $a=1$  时, 求曲线  $y=f(x)$  在  $x=0$  处的切线方程;

(2) 当  $a=-1$  时, 求  $f(x)$  的极大值点和极小值点的个数;

(3) 若对任意  $x \geq 0, f(x) \leq -1$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

21. (本小题满分 15 分)

设  $m$  为给定的正奇数, 定义无穷数列  $A_m: a_1=1, a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & (a_n \text{ 为偶数}) \\ a_n + m & (a_n \text{ 为奇数}) \end{cases}$ , 其中  $n \in \mathbf{N}^*$ . 若  $a_k$  是数列

$A_m$  中的项, 则记作  $a_k \in A_m$ .

(1) 若数列  $A_m$  的前 6 项各不相同, 写出  $m$  的最小值及此时数列的前 6 项;

(2) 求证: 集合  $B = \{k \in \mathbf{N}^* \mid a_k \in A_m, a_k > 2m\}$  是空集;

(3) 记集合  $S_m = \{x \mid x \in A_m\}, S = \{x \mid \forall \text{ 正奇数 } m, x \in S_m\}$ , 求集合  $S$ .

(若  $m$  为任意的正奇数, 求所有数列  $A_m$  的相同元素构成的集合  $S$ .)

## 参考答案

### 一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1.C

2.C

解析： $b+c = \lg 4 + \lg 5 = \lg 20 = \lg 2 + 1 = a + 1$ .

$b+2c = \lg 2 + 2\lg 5 = \lg 100 = 2 \neq 10$ .  $b = \lg 4 = 2\lg 2 = 2a \neq a^2$

3.B

解析： $z = \frac{2+ai}{2-i} \Rightarrow z = \frac{(2+ai)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{(4-a)+(2a+2)i}{5} = 2i-2$ .

4.A

解析： $\sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{2ab} = \sqrt{4 \cdot \left(\frac{1}{2}ab\right)} = 2$ .

5.A

解析： $g(x) = \cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin 2x$ .

6.D

7.D

解析： $f(-1) = -f(1) = 1 \Rightarrow f(1) = -1$ ,

当  $x > 0$  时， $f(x)$  单调递增， $f(1) < f(x) < f(2) \Rightarrow 1 < x < 2$ .

8.D

解析：非充分性： $\{a_n\}: 1, -1, 1, -1, \dots, \{b_n\}: 0, 0, 0, 0, \dots$ ;

非必要性： $\{a_n\}: 1, 1, 1, 1, \dots, \{a_n\}: 1, 0, 1, 0, \dots$ .

9.D

10.C

### 二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 解析： $(\vec{a} - k\vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} - k\vec{b}^2 \Leftrightarrow k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 2$ .

12. 解析： $S_5 = 5a_3 = -5 \Rightarrow a_3 = -1, a_4 = 2 \Rightarrow a_5 = 5 \Rightarrow S_9 = 9a_5 = 45$ .

13. 解析： $f'(x) = 2\cos 2x - 2\sin x = 2(1 - 2\sin^2 x) - 2\sin x < 0$ .

$2\sin^2 x + \sin x - 1 > 0, \sin x > 0 \Rightarrow \sin x > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$

14. 解析： $M\left(4 - \frac{p}{2}, 2\sqrt{3}\right) \Rightarrow 12 = 2p\left(4 - \frac{p}{2}\right) \Leftrightarrow p^2 - 8p + 12 = 0 \Leftrightarrow p = 2 \text{ 或 } p = 6$ .

15.②③④

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分）

16.解：(1)  $f(x) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) + 2 \cos x = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$ .

$f(x)$  的最小正周期  $T = 2\pi$ .

对称轴方程：  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ .

(2)  $x \in [-\pi, 0] \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} \in \left[ -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$ .

当  $x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4}$  时，  $f_{\min}(x) = -\sqrt{2}$ ;

当  $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 0$  时，  $f_{\max}(x) = 1$ .

17.解：(1) 在  $\triangle ABC$  中由正弦定理得：  $ab = c^2, b = 2a \Rightarrow c = \sqrt{2}a$ . (用一个字母表示).

在  $\triangle ABC$  中由余弦定理得：

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + 2a^2 - 4a^2}{2\sqrt{2}a^2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

(2)  $B \in (0, \pi), \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \frac{2}{16}} = \sqrt{\frac{14}{16}} = \frac{\sqrt{14}}{4}$ .

$$\frac{1}{2} ac \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 \times \frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow a = 1, b = 2, c = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BC} \Rightarrow BD = 3BC = 3a = 3.$$

在  $\triangle ABD$  中，由余弦定理得：

$$AD = \sqrt{AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos B} = \sqrt{2 + 9 - 2 \times \sqrt{2} \times 3 \times \left( -\frac{\sqrt{2}}{4} \right)} = \sqrt{14}$$

在  $\triangle ABD$  中，由正弦定理得：

$$\frac{AB}{\sin D} = \frac{AD}{\sin B} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sin D} = \frac{\sqrt{14}}{\frac{\sqrt{14}}{4}} \Rightarrow \sin D = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$AC = CD \Rightarrow \angle CAD = \angle D \Rightarrow \sin \angle CAD = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

18. (2) 求线段  $AP$  在平面  $MPN$  内的投影  $HP$  的长.

解：(1) 如图，取  $AB$  中点  $Q$ ，连接  $QA_1, QB$ ，

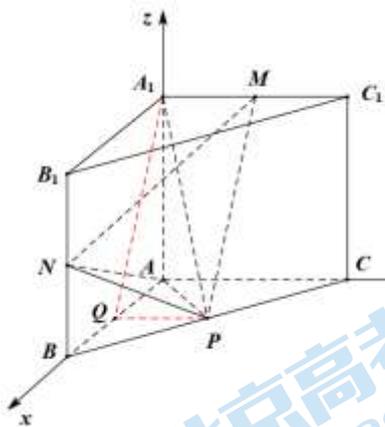
可证  $PQ \parallel A_1M, PQ = A_1M$ ,

判定四边形  $PQA_1M$  为平行四边形.

所以  $PM \parallel A_1Q$ ,

又因为  $A_1Q \subset$  平面  $ABB_1A_1$ ,  $MP \not\subset$  平面  $ABB_1A_1$ ,

因此,  $MP \parallel$  平面  $ABB_1A_1$



(2) 因为平面  $B_1BCC_1 \perp$  平面  $ABC$ ,

$AP \perp BC$ ,  $AP \subset$  平面  $ABC$ .

所以  $AP \perp$  平面  $B_1BCC_1$ .

所以  $AP \perp BB_1$ .

因为  $AA_1 \parallel BB_1$ , 所以  $AP \perp AA_1$ .

因为  $AA_1 \perp AB$ , 所以  $AA_1 \perp$  平面  $ABC$ .

再由  $AB \perp AC$ , 得  $AA_1, AB, AC$  两两垂直, 如图建系  $A-xyz$ .

有  $A_1(0,0,2), N(2,0,1), M(0,1,2), P(1,1,0)$ ,

$\overrightarrow{AP} = (1,1,0), \overrightarrow{A_1P} = (1,1,-2), \overrightarrow{PM} = (-1,0,2), \overrightarrow{PN} = (1,-1,1)$ .

设平面  $PMN$  的一个法向量  $\vec{n} = (x, y, z)$ .

$$\begin{cases} \overrightarrow{PM} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{PN} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = (2, 3, 1).$$

① 设所求线面角为  $\theta$ , 则  $\sin \theta = \left| \cos \angle \overrightarrow{A_1P}, \vec{n} \right| = \frac{|\overrightarrow{A_1P} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{A_1P}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{21}}{14}$ .

②  $AH = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{5}{\sqrt{14}}, HP = \sqrt{AP^2 - AH^2} = \frac{\sqrt{42}}{14}$ .

19.解: (1) 依题意:

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ bc = 2 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow a = \sqrt{5}, b = 1, c = 2.$$

椭圆  $C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ .

(2) ①当直线  $l$  的斜率不存在时, 不合题意.

②设  $l$  的方程为  $y = k(x-2) (k \neq 0), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ .

$$\begin{cases} y = k(x-2) \\ x^2 + 5y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow (5k^2 + 1)x^2 - 20k^2x + 20k^2 - 5 = 0.$$

由于点  $F$  在椭圆  $C$  内, 因此  $\Delta > 0$  恒成立,  $x_1x_2 = \frac{20k^2 - 5}{5k^2 + 1}$ .

直线  $AM: y = \frac{y_1}{x_1}x \Rightarrow y_M = \frac{y_1}{x_1}$ , 同理  $y_N = \frac{y_2}{x_2}$ .

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |OF| \cdot |y_1 - y_2| = |k(x_1 - x_2)|.$$

$$S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |y_M - y_N| = \frac{1}{2} \left| \frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{k(x_1 - 2)x_2 - k(x_2 - 2)x_1}{x_1x_2} \right| = \frac{|k(x_1 - x_2)|}{|x_1x_2|}.$$

所以  $|x_1x_2| = \left| \frac{20k^2 - 5}{5k^2 + 1} \right| = 1$ .

解得  $k = \pm \frac{\sqrt{10}}{5}$  或  $\pm \frac{2}{5}$ .

综上, 直线  $l$  的方程为  $y = \pm \frac{\sqrt{10}}{5}(x-2)$  或  $y = \pm \frac{2}{5}(x-2)$ .

20.解: (1) 当  $a = 1$  时,  $f(x) = xe^x - e^{2x}$ ,

$$f'(x) = (x+1)e^x - 2e^{2x}, f(0) = -1, f'(0) = -1, \text{切线 } y = -x - 1.$$

(2) 当  $a = -1$  时,  $f(x) = xe^{-x} - e^{-2x}, f'(x) = (1-x)e^{-x} + 2e^{-2x} = (1-x+2e^{-x})e^{-x}$ .

令  $g(x) = 1-x+2e^{-x}, g'(x) = -1-2e^{-x} < 0$ , 则  $g(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减.

又因为  $g(0) = 3 > 0, g(2) = -1 + \frac{2}{e^2} < 0$ ,

所以存在唯一  $x_0$  使得  $g(x_0) = 0$ , 且  $x_0 \in (0, 2)$ .

$x \in (0, x_0), g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  在  $(0, x_0)$  单调递增;

$x \in (x_0, +\infty), g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  在  $(x_0, +\infty)$  单调递减.

所以,  $f(x)$  有 1 个极大值点, 无极小值点.

(3) 结论:  $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ .

$f'(x) = (ax+1-2ae^{ax})e^{ax}$ , 令  $h(x) = ax+1-2ae^{ax}$ ,  $h'(x) = a-2a^2e^{ax} = a(1-2ae^{ax})$ .

① 当  $a \geq \frac{1}{2}$  时,  $h'(x) \leq a(1-e^{ax}) \leq 0$  恒成立,  $h(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递减,

$h(x) \leq h(0) \leq -1$ , 符合题意;

② 当  $0 < a < \frac{1}{2}$  时, 令  $h'(x) = 0$ , 得  $x = -\frac{\ln 2a}{a}$ .

$x$	$\left(0, -\frac{\ln 2a}{a}\right)$	$-\frac{\ln 2a}{a}$	$\left(-\frac{\ln 2a}{a}, +\infty\right)$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

当  $0 < x < -\frac{\ln 2a}{a}$  时,  $h(x) > h(0) = 1 - 2a > 0$ ,

故  $f(x)$  在  $\left(0, -\frac{\ln 2a}{a}\right)$  上单调递增, 此时  $f(x) > f(0) = -1$ , 不合题意;

③ 当  $a \leq 0$  时,  $f(1) = e^a - e^{2a} \geq 0$ , 不合题意.

综上,  $a$  的取值范围是  $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

21. 解: (1)  $m_{\min} = 5$ , 数列的前 6 项为: 1, 6, 3, 8, 4, 2.

(2) 证明: 假设集合  $B = \{k \in \mathbb{N}^* \mid a_k > 2m\}$  非空,

设  $B$  中元素的最小值为  $k$  (显然  $k \geq 3$ ). (关键技巧)

因为  $a_k > 2m \geq a_{k-1}$ , 所以  $a_k = a_{k-1} + m$ , 因此  $a_{k-1}$  为奇数, 且  $a_{k-1} > m$ .

若  $a_{k-1} = a_{k-2} + m$ , 则  $a_{k-2}$  为偶数,

但此时应有  $a_{k-1} = \frac{1}{2}a_{k-2}$ , 与  $a_{k-1} = a_{k-2} + m$  矛盾;

若  $a_{k-1} = \frac{1}{2}a_{k-2}$ , 则  $a_{k-2} > 2m$ , 即  $k-2 \in B$ , 与  $k$  的最小性矛盾.

因此假设不成立, 集合  $B$  为空集.

(3) 猜想  $S = \{1, 2\}$ .

因为  $S_1 = \{1, 2\}$ , 以下只需证  $\forall$  大于 1 的奇数  $m, 1, 2 \in S_m$ .

若  $a_j = 1, j > 1$ , 则  $a_{j-1} = 2$ , 故只需证必存在  $a_j = 1, j > 1$ .

由 (2) 知无穷数列  $A_m$  中所有的项都属于集合  $\{1, 2, \dots, 2m\}$ ,

因此必存在  $i < j$ , 使得  $a_i = a_j$ , 取其中  $i$  的值最小的一组.

若  $a_i > 1$ , 则  $a_i = a_j = K > 1$ .

若  $K > m$ , 则必有  $a_{i-1} = a_{j-1} = K - m > 1$ , 与  $i$  的最小性矛盾;

若  $K \leq m$ , 则必有  $a_{i-1} = a_{j-1} = 2K$ , 也与  $i$  的最小性矛盾.

因此只能  $a_i = 1$ , 因此  $a_j = a_1 = 1, j > 1, a_{j-1} = 2$ , 即  $1, 2 \in S_m$ .

综上,  $S = \{1, 2\}$ .

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：**京考一点通**，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

