

2019 年北京市普通高中会考

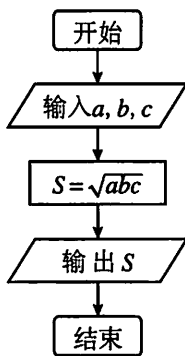
数 学 试 卷

考 生 须 知	<p>1. 考生要认真填写考场号和座位序号。</p> <p>2. 本试卷共 7 页，分为两个部分，第一部分为选择题，27 个小题(共 81 分)；第二部分为解答题，4 个小题(共 19 分)。</p> <p>3. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答，作图时必须使用 2B 铅笔。</p> <p>4. 考试结束后，考生应将试卷、答题卡放在桌面上，待监考员收回。</p>
------------------	---

第一部分 选择题 (每小题 3 分, 共 81 分)

在每个小题给出的四个备选答案中，只有一个是符合题目要求的。

- 已知集合  $A = \{0, 1, 2\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ , 那么  $A \cap B$  等于  
 A.  $\{0\}$                       B.  $\{1, 2\}$                       C.  $\{1, 2, 3\}$                       D.  $\{0, 1, 2, 3\}$
- 已知向量  $a = (1, -2)$ ,  $b = (2, m)$ , 且  $a \perp b$ , 那么  $m$  等于  
 A.  $-4$                       B.  $-1$                       C.  $1$                       D.  $4$
- 不等式  $x^2 + 2x - 3 > 0$  的解集为  
 A.  $\{x | -3 < x < 1\}$                       B.  $\{x | -1 < x < 3\}$   
 C.  $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > 1\}$                       D.  $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$
- 某程序框图如图所示, 如果输入  $a, b, c$  的值分别是 3, 1, 9, 那么输出的  $S$  的值是  
 A.  $\sqrt{2}$   
 B. 2  
 C.  $3\sqrt{3}$   
 D. 9
- 把函数  $y = \sin x$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度, 所得图象的函数关系式为  
 A.  $y = \sin(x - \frac{\pi}{6})$                       B.  $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$   
 C.  $y = \cos(x - \frac{\pi}{6})$                       D.  $y = \cos(x + \frac{\pi}{6})$



6.  $(\frac{1}{2})^{-2} + \log_2 2$  等于

- A.  $\frac{5}{4}$                       B. 3                      C. 4                      D. 5

7. 已知 1, a, b, 8 是等比数列, 那么 ab 的值等于

- A. 1                      B. 4                      C. 8                      D. 16

8.  $\sin 45^\circ \cos 15^\circ - \cos 45^\circ \sin 15^\circ$  等于

- A. -1                      B.  $-\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D. 1

9. 给出下列四个函数:

- ①  $y = x^2$ ;                      ②  $y = x^3$ ;                      ③  $y = |x + 1|$ ;                      ④  $y = e^x$ .

其中偶函数的序号是

- A. ①                      B. ②                      C. ③                      D. ④

10. 某校共有学生 1000 人, 其中男生 600 人, 女生 400 人. 学校为检测学生的体质健康状况, 统一从学生学籍档案数据库(简称“CIMS 系统”)中随机选取参加测试的学生. 现采用分层抽样的方法从中抽取容量为 30 的样本进行测试, 那么应抽取女生的人数为

- A. 12                      B. 15                      C. 18                      D. 20

11. 已知直线  $l_1: 2x - y - 1 = 0$ ,  $l_2: ax - y + 2 = 0$ , 且  $l_1 // l_2$ , 那么实数 a 等于

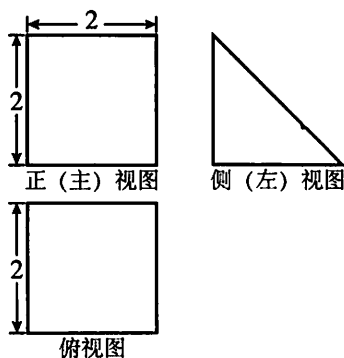
- A. -2                      B.  $-\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D. 2

12. 已知角  $\theta$  的终边过点  $P(1, -\sqrt{3})$ , 那么  $\tan \theta$  等于

- A.  $-\sqrt{3}$                       B.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       D.  $\sqrt{3}$

13. 已知一个几何体的三视图如图所示, 那么该几何体的体积是

- A. 1  
B. 2  
C. 4  
D. 8



14. 在  $\triangle ABC$  中,  $a = 1$ ,  $A = 30^\circ$ ,  $B = 45^\circ$ , 那么 b 的值为

- A. 1                      B.  $\sqrt{2}$                       C.  $\sqrt{3}$                       D. 2

15. 函数  $f(x) = \frac{1}{x} - 2^x$  的零点的个数为

- A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3

16. 当实数  $x, y$  满足条件  $\begin{cases} x \leq 0, \\ y \geq 0, \\ 2x - y + 2 \geq 0 \end{cases}$  时,  $z = x + y$  的最小值为
- A. -2                      B. -1                      C. 0                      D. 2
17. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = a_n - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$ , 且  $a_1 = 4$ , 那么  $\{a_n\}$  的前 4 项和为
- A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 4
18. 已知  $a > 0, b > 0, ab = 4$ , 那么  $a + b$  的最小值是
- A.  $2\sqrt{2}$                       B. 3                      C. 4                      D. 6
19. 如果向量  $a, b$  满足  $|a| = 2, a \cdot b = 3$ , 且  $a, b$  的夹角为  $\frac{\pi}{3}$ , 那么  $|b|$  等于
- A.  $\frac{1}{3}$                       B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       C.  $\sqrt{3}$                       D. 3
20. 某中学组织开展 3 项拓展活动, 要求每名学生必须参加其中一项活动. 该校甲、乙两名学生随机选择拓展活动, 恰好选择同一活动的概率为
- A.  $\frac{1}{4}$                       B.  $\frac{1}{3}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{2}{3}$
21. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n = \begin{cases} n+1, & n \leq 3, \\ 2n, & n > 3 \end{cases} (n \in \mathbf{N}^*)$ , 且  $a_n = 4$ , 那么  $n$  等于
- A. 2                      B. 3                      C. 4                      D. 2 或 3
22. 已知点  $P$  是圆  $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$  上的任意一点, 那么点  $P$  与原点距离的最小值为
- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4
23. 我国古代数学著作《九章算术》中有如下问题: “今有女子善织, 日自倍, 五日织五尺……” 其大意为: “有一位善于织布的女子, 每天织的布都是前一天的 2 倍, 5 天一共织了 5 尺布……”
- 那么该女子第一天织布的尺数为
- A.  $\frac{4}{31}$                       B.  $\frac{5}{31}$                       C.  $\frac{6}{31}$                       D.  $\frac{10}{31}$
24. 已知直线  $l$  过原点, 且与圆  $x^2 + (y - 2)^2 = 1$  有公共点, 那么直线  $l$  倾斜角的取值范围是
- A.  $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$                       B.  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$                       C.  $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$                       D.  $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$

25. 设  $m, n$  是两条不同的直线,  $\alpha, \beta, \gamma$  是三个不同的平面, 给出下列四个命题:

- ① 如果  $m // \alpha, n // \alpha$ , 那么  $m // n$ ;
- ② 如果  $m \perp \alpha, m \perp \beta$ , 那么  $\alpha // \beta$ ;
- ③ 如果  $\alpha \perp \beta, m \perp \alpha$ , 那么  $m // \beta$ ;
- ④ 如果  $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$ , 那么  $\alpha // \beta$ .

其中正确命题的序号是

- A. ①                      B. ②                      C. ③                      D. ④

26. 改革开放 40 年来, 我国经济社会发展取得举世瞩目的辉煌成就, 坚持巩固加强第一产业、优化升级第二产业、积极发展第三产业, 三次产业结构在调整中不断优化, 农业基础地位更趋巩固, 工业逐步迈向中高端, 服务业成长为国民经济第一大产业. 尤其是党的十八大以来, 经济增长由主要依靠第二产业带动转向依靠三次产业共同带动, 三次产业内部结构调整优化. 国家统计局发布的数据如下, 反映了从 2013 年到 2017 年三次产业对国内生产总值增长的拉动情况.

2013 ~ 2017 年三次产业对国内生产总值增长的拉动指标

指标(百分点)	2013 年	2014 年	2015 年	2016 年	2017 年
第一产业对国内生产总值增长的拉动	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30
第二产业对国内生产总值增长的拉动	3.80	3.50	2.90	2.60	2.50
第三产业对国内生产总值增长的拉动	3.70	3.50	3.70	3.90	4.00
三次产业对国内生产总值增长的拉动	7.80	7.30	6.90	6.80	6.80

说明: 我国的三次产业划分是: 第一产业是指农、林、牧、渔业(不含农、林、牧、渔服务业). 第二产业是指采矿业(不含开采辅助活动), 制造业(不含金属制品、机械和设备修理业), 电力、热力、燃气及水生产和供应业, 建筑业. 第三产业即服务业, 是指除第一产业、第二产业以外的其他行业.

根据上述信息, 下列结论中错误的是

- A. 2013 ~ 2017 年, 第一产业增加值占国内生产总值的比值保持不变
- B. 2013 ~ 2017 年, 第二产业增加值占国内生产总值的比值逐年减少
- C. 2014 ~ 2017 年, 第三产业增加值占国内生产总值的比值不断增加
- D. 2013 ~ 2017 年, 三次产业增加值占国内生产总值的比例保持不变

27. 设函数  $f(x) = x - [x] (x \geq 0)$ , 其中  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 如:  $[0.5] = 0, [2] = 2$ . 如果函数  $y = kx$  的图象与函数  $f(x)$  的图象恰有 3 个交点, 那么实数  $k$  的取值范围是

- A.  $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$               B.  $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$               C.  $[\frac{1}{5}, \frac{1}{4})$               D.  $[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}]$

## 第二部分 解答题(共19分)

28. (本小题满分5分)

某同学解答一道三角函数题：“已知函数  $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ . ①求  $f(\frac{\pi}{2})$  的值；②求函数  $f(x)$  在区间  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$  上的最大值和最小值.”

解答过程如下：

解：① 由题意得  $f(\frac{\pi}{2}) = \cos^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 \frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$ ；

② 由题意得  $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ .

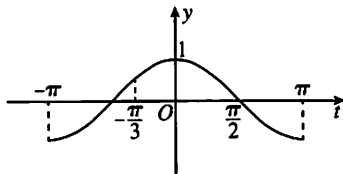
令  $t = 2x$ ,

因为  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ,

所以  $-\frac{\pi}{3} \leq 2x \leq \frac{\pi}{2}$ .

所以  $-\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .

画出函数  $y = \cos t$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上的图象.



由图象可知，

$y = \cos t$  在区间  $[-\frac{\pi}{3}, 0]$  上是增函数，在区间  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上是减函数，

且  $\cos(-\frac{\pi}{3}) > \cos \frac{\pi}{2}$ ,

所以当  $t = \frac{\pi}{2}$ ，即  $x = \frac{\pi}{4}$  时， $f(x)$  取得最小值 0.

当  $t = 0$ ，即  $x = 0$  时， $f(x)$  取得最大值 1.

下表列出了某些数学知识：

函数的概念
弧度制的概念
正弦定理、余弦定理
任意角的正弦、余弦的定义
两角和的正切公式
二倍角的余弦公式
$y = \cos x$ 的图象
函数的单调性、最大值、最小值及其几何意义

请写出在上述解答过程中，用到的此表中的数学知识。



长按识别关注

29. (本小题满分 5 分)

阅读下面题目及其证明过程,在横线处填写适当的内容.

如图,长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的底面  $ABCD$  是边长为 1 的正方形,点  $E, F$  分别为线段  $BD_1, CC_1$  的中点.

( I ) 求证:  $EF \parallel$  平面  $ABCD$ ;

( II ) 当  $DD_1 = \sqrt{2}$  时, 求证:  $DE \perp$  平面  $BFD_1$ .

证明:( I ) 如图, 连接  $AC, BD$ , 设  $AC \cap BD = O$ , 连接  $OE$ .

因为长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的底面  $ABCD$  是边长为 1 的正方形,

所以  $BO = OD$ .

又因为  $BE = ED_1$ ,

所以  $OE \parallel DD_1, OE = \frac{1}{2}DD_1$ .

因为  $F$  为线段  $CC_1$  中点,

所以  $CF \parallel DD_1, CF = \frac{1}{2}DD_1$ .

所以  $CF \parallel OE, CF = OE$ .

所以四边形  $OCFE$  为平行四边形.

所以  $EF \parallel OC$ .

又因为  $EF \not\subset$  平面  $ABCD, OC \subset$  平面  $ABCD$ ,

所以  $EF \parallel$  平面  $ABCD$ .

( II ) 因为  $F$  为线段  $CC_1$  中点,

所以  $BF = D_1F$ .

所以  $\triangle D_1FB$  是等腰三角形.

因为  $E$  为  $BD_1$  的中点,

所以  $EF \perp BD_1$ .

因为  $BD \perp OC, EF \parallel OC$ ,

所以  $EF \perp BD$ .

因为  $BD \cap BD_1 = B$ ,

所以①.

因为  $DE \subset$  平面  $BDD_1$ ,

所以②.

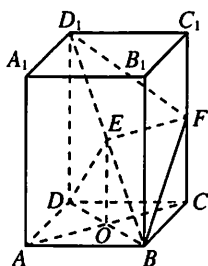
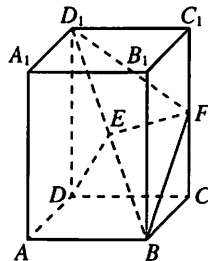
因为  $DD_1 = \sqrt{2}$ ,

所以  $DD_1 = BD$ .

所以③.

因为  $EF \cap D_1B = E$ ,

所以  $DE \perp$  平面  $BFD_1$ .



在上述证明过程中, ( I ) 的证明思路是: 先证明“④”, 再证明“⑤”.

30. (本小题满分5分)

已知直线  $l$  经过  $P(1, 0)$ ,  $Q(2, -1)$  两点, 圆  $C$  的方程是  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ .

(I) 求直线  $l$  的方程;

(II) 设直线  $l$  与圆  $C$  交于  $A, B$  两点, 求  $|AB|$  的值.

下面是某同学的解答过程:

解: (I) 因为直线  $l$  经过两点  $P(1, 0), Q(2, -1)$ ,

所以直线  $l$  的斜率  $k = \frac{-1-0}{2-1} = -1$ .

所以直线  $l$  的方程是  $y-0 = -(x-1)$ , 即  $x+y-1=0$ .

(II) 因为直线  $l$  与圆  $C$  交于  $A, B$  两点,

所以 
$$\begin{cases} x+y-1=0, \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4. \end{cases}$$

消去  $y$ , 整理得  $2x^2 - 4x + 1 = 0$ .

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,

则  $x_1 + x_2 = 2, x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$ .

所以 
$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]} \\ &= \sqrt{2(2^2 - 4 \times \frac{1}{2})} \\ &= 2. \end{aligned}$$

所以  $|AB|$  的值为 2.

指出上述解答过程中的错误之处, 并写出正确的解答过程.

31. (本小题满分4分)

铅酸电池是一种蓄电池, 电极主要由铅及其氧化物制成, 电解液是硫酸溶液. 这种电池具有电压稳定、价格便宜等优点, 在交通、通信、电力、军事、航海、航空等领域有着广泛的应用. 但是由于在实际生活中使用方法不当, 电池能量未被完全使用, 导致了能源的浪费, 因此准确预测铅酸电池剩余放电时间是使用中亟待解决的问题.

研究发现, 当电池以某恒定电流放电时, 电压  $U$  关于放电时间  $t$  的变化率  $y$  满足  $y = ae^{bt} + \frac{1}{2}$  (其中  $a, b$  为常数, 无理数  $e = 2.71828 \dots$ ).

实验数据显示, 当时间  $t$  的值为 0 和 5 时, 电压  $U$  关于放电时间  $t$  的变化率  $y$  分别为 -2 和 -752, 求  $a, b$  的值.

## 2019 年北京市普通高中会考

### 数学试卷答案及评分参考

**[说明]**

1. 第一部分选择题，机读阅卷。
2. 第二部分解答题。为了阅卷方便，解答题中的推导步骤写得较为详细，考生只要写明主要过程即可。若考生的解法与本解答不同，正确者可参照评分标准给分。解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

#### 第一部分 选择题（每小题 3 分，共 81 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
答案	B	C	C	C	B	D	C	C	A
题号	10	11	12	13	14	15	16	17	18
答案	A	D	A	C	B	B	B	D	C
题号	19	20	21	22	23	24	25	26	27
答案	D	B	B	A	B	D	B	D	A

#### 第二部分 解答题（共 19 分）

28.（本小题满分 5 分）

某同学解答一道三角函数题：“已知函数  $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ 。①求  $f(\frac{\pi}{2})$  的值；

②求函数  $f(x)$  在区间  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$  上的最大值和最小值。”

解答过程如下：

解：①由题意得  $f(\frac{\pi}{2}) = \cos^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 \frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$ ；

②由题意得  $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ 。

令  $t = 2x$ ，

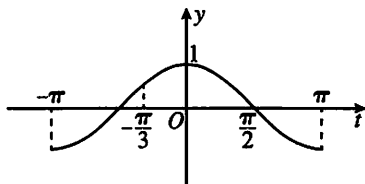
因为  $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$ ，

所以  $-\frac{\pi}{3} < 2x < \frac{\pi}{2}$ 。

所以  $-\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{2}$ 。

画出函数  $y = \cos t$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上的图象。





由图象可知,

$y = \cos t$  在区间  $[-\frac{\pi}{3}, 0]$  上是增函数, 在区间  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上是减函数,

且  $\cos(-\frac{\pi}{3}) > \cos \frac{\pi}{2}$ ,

所以当  $t = \frac{\pi}{2}$ , 即  $x = \frac{\pi}{4}$  时,  $f(x)$  取得最小值 0.

当  $t = 0$ , 即  $x = 0$  时,  $f(x)$  取得最大值 1.

下表列出了某些数学知识:

函数的概念
弧度制的概念
正弦定理、余弦定理
任意角的正弦、余弦的定义
两角和的正切公式
二倍角的余弦公式
$y = \cos x$ 的图象
函数的单调性、最大值、最小值及其几何意义

请写出在上述解答过程中, 用到的此表中的数学知识.

答: 在上述解答过程中, 用到的此表中的数学知识是: 二倍角的余弦公式;  $y = \cos x$  的图象; 函数的单调性、最大值、最小值及其几何意义. ....5分

29. (本小题满分 5 分)

阅读下面题目及其证明过程, 在横线处填写适当的内容.

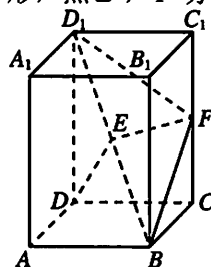
如图, 长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的底面  $ABCD$  是边长为 1 的正方形, 点  $E, F$  分别为线段  $BD_1, CC_1$  的中点.

(I) 求证:  $EF \parallel$  平面  $ABCD$ ;

(II) 当  $DD_1 = \sqrt{2}$  时, 求证:  $DE \perp$  平面  $BFD_1$ .

证明: (I) 如图, 连接  $AC, BD$ , 设  $AC \cap BD = O$ , 连接  $OE$ .

因为长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的底面  $ABCD$  是边长



为1的正方形,

所以  $BO = OD$ .

又因为  $BE = ED_1$ ,

所以  $OE \parallel DD_1$ ,  $OE = \frac{1}{2}DD_1$ .

因为  $F$  为线段  $CC_1$  中点,

所以  $CF \parallel DD_1$ ,  $CF = \frac{1}{2}DD_1$ .

所以  $CF \parallel OE$ ,  $CF = OE$ .

所以四边形  $OCFE$  为平行四边形.

所以  $EF \parallel OC$ .

又因为  $EF \not\subset$  平面  $ABCD$ ,  $OC \subset$  平面  $ABCD$ ,

所以  $EF \parallel$  平面  $ABCD$ .

(II) 因为  $F$  为线段  $CC_1$  中点,

所以  $BF = D_1F$ .

所以  $D_1FB$  是等腰三角形.

因为  $E$  为  $BD_1$  的中点,

所以  $EF \perp BD_1$ .

因为  $BD \perp OC$ ,  $EF \parallel OC$ ,

所以  $EF \perp BD$ .

因为  $BD \perp BD_1 = B$ ,

所以①.

因为  $DE \subset$  平面  $BDD_1$ ,

所以②.

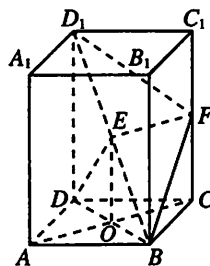
因为  $DD_1 = \sqrt{2}$ ,

所以  $DD_1 = BD$ .

所以③.

因为  $EF \perp D_1B = E$ ,

所以  $DE \perp$  平面  $BFD_1$ .



在上述证明过程中, (I) 的证明思路是: 先证明“④”, 再证明“⑤”.

答: ①  $EF \perp$  平面  $BDD_1$ ;

②  $EF \perp DE$  \_\_\_\_\_;

③  $DE \perp BD_1$  \_\_\_\_\_;

④ 线线平行 \_\_\_\_\_;

⑤ 线面平行 \_\_\_\_\_.

.....5 分

30. (本小题满分5分)

已知直线  $l$  经过  $P(1,0)$ ,  $Q(2,-1)$  两点, 圆  $C$  的方程是  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ .

(I) 求直线  $l$  的方程;

(II) 设直线  $l$  与圆  $C$  交于  $A$ ,  $B$  两点, 求  $|AB|$  的值.

下面是某同学的解答过程:

解: (I) 因为直线  $l$  经过两点  $P(1,0)$ ,  $Q(2,-1)$ ,

所以直线  $l$  的斜率  $k = \frac{-1-0}{2-1} = -1$ .

所以直线  $l$  的方程是  $y-0 = -(x-1)$ , 即  $x+y-1=0$ .

(II) 因为直线  $l$  与圆  $C$  交于  $A$ ,  $B$  两点,

所以  $\begin{cases} x+y-1=0, \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4. \end{cases}$

消去  $y$ , 整理得  $2x^2 - 4x + 1 = 0$ .

设  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,

则  $x_1 + x_2 = 2$ ,  $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$ .

所以  $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$   
 $= \sqrt{2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]}$   
 $= \sqrt{2(2^2 - 4 \times \frac{1}{2})}$   
 $= 2$ .

所以  $|AB|$  的值为 2.

指出上述解答过程中的错误之处, 并写出正确的解答过程.

答: 第 (II) 问中“消去  $y$ , 整理得  $2x^2 - 4x + 1 = 0$ ”出错, 应是“消去  $y$ , 整理得  $2x^2 - 6x + 1 = 0$ ”.  
 .....2 分

本题正确的解答过程为:

(I) 解: 因为直线  $l$  经过两点  $P(1,0)$ ,  $Q(2,-1)$ ,

所以直线  $l$  的斜率  $k = \frac{-1-0}{2-1} = -1$ .

所以直线  $l$  的方程是  $y-0 = -(x-1)$ , 即  $x+y-1=0$ .

(II) 解：由题意，直线  $l$  与圆  $C$  交于  $A, B$  两点，

$$\text{可得} \begin{cases} x+y-1=0, \\ (x-1)^2+(y+1)^2=4. \end{cases}$$

消去  $y$ ，整理得  $2x^2-6x+1=0$ .

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,

$$\text{则 } x_1+x_2=3, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |AB| &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]} \\ &= \sqrt{2(3^2-4 \times \frac{1}{2})} \\ &= \sqrt{14}. \end{aligned}$$

所以  $|AB|$  的值为  $\sqrt{14}$ . .....5 分

31. (本小题满分 4 分)

铅酸电池是一种蓄电池，电极主要由铅及其氧化物制成，电解液是硫酸溶液。这种电池具有电压稳定、价格便宜等优点，在交通、通信、电力、军事、航海、航空等领域有着广泛的应用。但是由于在实际生活中使用方法不当，电池能量未被完全使用，导致了能源的浪费，因此准确预测铅酸电池剩余放电时间是使用中亟待解决的问题。

研究发现，当电池以某恒定电流放电时，电压  $U$  关于放电时间  $t$  的变化率  $y$  满足

$$y = ae^{bt} + \frac{1}{2} \quad (\text{其中 } a, b \text{ 为常数, 无理数 } e=2.71828 \dots).$$

实验数据显示，当时间  $t$  的值为 0 和 5 时，电压  $U$  关于放电时间  $t$  的变化率  $y$  分别为 -2 和 -752，求  $a, b$  的值。

解：由题意可得

$$\begin{cases} a + \frac{1}{2} = -2, \\ ae^{5b} + \frac{1}{2} = -752. \end{cases}$$

$$\text{解得 } a = -\frac{5}{2}, \quad b = \frac{\ln 301}{5}. \quad \text{.....4 分}$$