

宜宾市普通高中 2019 级第二次诊断测试

理科数学

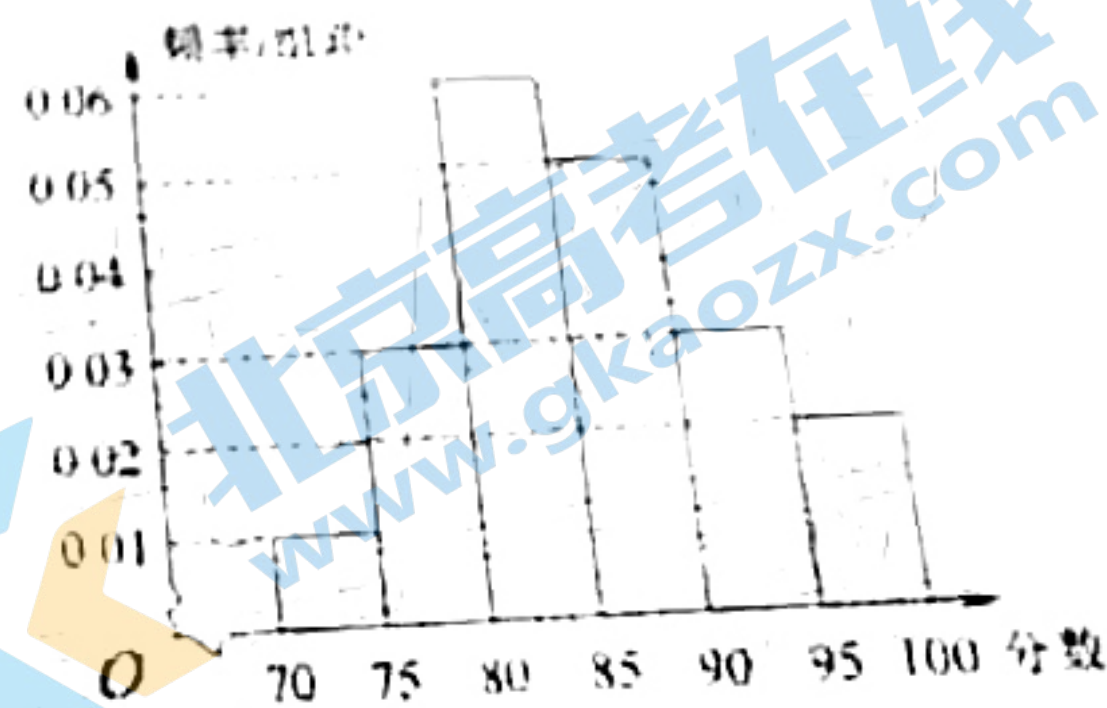
(考试时间: 120 分钟 全卷满分: 150 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必用黑色签字笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上, 并认真核准条形码上的准考证号、姓名、考场号、座位号及科目, 在规定的位罝贴好条形码.
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦擦干净后, 再选涂其它答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后, 将答题卡交回.

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合要求的.

1. 集合 $A = \{x \mid x^2 = 2x\}$, $B = \{1, 2\}$, 则 $A \cup B =$
A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{2\}$ D. $\{1, 2\}$
2. 已知 i 是虚数单位, 复数 z 满足 $z \cdot (1+i) = 1-i$, 则 z 的虚部是
A. 1 B. -1 C. i D. $-i$
3. 为落实党中央的“三农”政策, 某市组织该市所有乡镇干部进行了一期“三农”政策专题培训, 并在培训结束时进行了结业考试. 右图是该次考试成绩随机抽样样本的频率分布直方图, 则下列关于这次考试成绩的估计错误的是
A. 众数为 82.5
B. 中位数为 85
C. 平均数为 86
D. 有一半以上干部的成绩在 80~90 分之间
4. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两个顶点为 A_1, A_2 , 双曲线 C 上任意一点 P (与 A_1, A_2 不重合) 都满足 PA_1, PA_2 的斜率之积为 $\frac{5}{4}$, 则双曲线 C 的离心率为
A. $\frac{9}{4}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$
5. 物理学家和数学家牛顿 (Issac Newton) 提出了物体在常温下温度变化的冷却模型: 设物体的初始温度是 T_1 (单位: $^{\circ}\text{C}$), 环境温度是 T_0 (单位: $^{\circ}\text{C}$), 且经过一定时间 t (单位: min) 后物体的温度 T (单位: $^{\circ}\text{C}$) 满足 $\frac{T_1 - T_0}{T - T_0} = e^{kt}$ (k 为正常数). 现有一杯 100°C 热水, 环境温度 20°C , 冷却到 40°C 需要 16 min, 那么这杯热水要从 40°C 继续冷却到 30°C , 还需要的时间为
A. 6 min B. 7 min C. 8 min D. 9 min



关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯 (微信号: bjgkzx) 获取更多试题资料及最新信息。

6. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 已知 $\cos 2A = \cos(B+C)$, 且 $b=2, c=6$,

则 $a =$

A. $\sqrt{13}$

B. $2\sqrt{13}$

C. $\sqrt{7}$

D. $2\sqrt{7}$

7. 已知点 $A(-\sqrt{5}, 2), B(\sqrt{5}, 6)$, 以 AB 为直径的圆 C 与直线 $x-y=0$ 交于 M, N 两点, 则 $\triangle MNC$ 的面积为

A. $4\sqrt{2}$

B. $3\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{2}$

D. $\sqrt{2}$

8. 已知 $f(x) = 2\sin^2(2x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3}\sin(4x - \frac{2\pi}{3})$, 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位得到函数 $g(x)$, 则使得 $g(x)$ 是偶函数的 φ 的最小值是

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$

D. $\frac{4\pi}{3}$

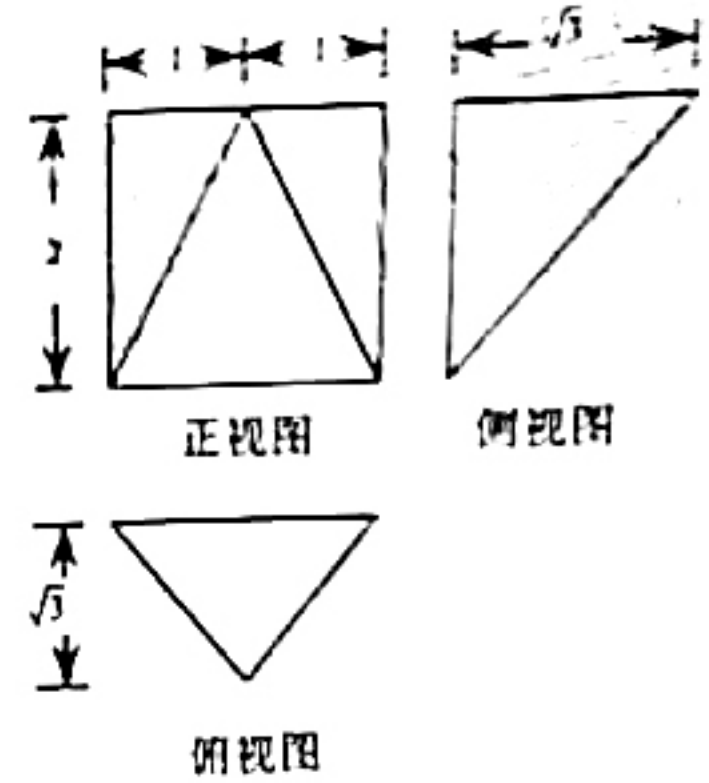
9. 已知一个几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为

A. $4\sqrt{3}$

B. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

C. $2\sqrt{3}$

D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$



10. 已知函数 $f(x) = (\frac{1}{3})^{|x-1|}$, 设 $a = f(\log_5 \frac{1}{6}), b = f(\frac{1}{2}), c = f(2^{\frac{3}{2}})$, 则 a, b, c 的大小关系为

A. $a < c < b$

B. $a < b < c$

C. $c < b < a$

D. $c < a < b$

11. 已知点 $M(-\frac{p}{2}, 0)$, 抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点是 F , 过 M 的直线 l 交抛物线于 A, B 两点, 点 N 是线段 AB 的中点, 若 $|NF| = p$, 则直线 l 的斜率为

A. $\pm p$

B. $\pm \frac{p}{2}$

C. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

D. ± 1

12. 三棱锥 $P-ABC$ 满足 $PA = AB = 2, PC + CB = 2\sqrt{3}, \angle APC = \angle ABC = 30^\circ$, 则三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值为

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\sqrt{2}$

二、填空题: 本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $f(x) = x^2 + 2x$, 则曲线 $f(x)$ 在点 $x = -\frac{1}{3}$ 处的切线方程为_____.

14. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB = 8, AD = 5, \overrightarrow{DP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 22$, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PB} =$ _____.

15. 2022 年冬奥会在北京、延庆、张家口三个区域布局赛场, 北京承办所有冰上项目, 延庆和张家口承办所有雪上项目. 现在组委会招聘了甲在内的 4 名志愿者, 准备分配到上述 3 个赛场参与赛后维护服务工作, 要求每个赛场至少分到一名志愿者, 则志愿者甲正好分到北京赛场的概率为_____.

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

16. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{3}$, 且满足 $2a_n a_{n+1} = a_{n-1}(3a_{n+1} - a_n)$ ($n \geq 2$), 则 $a_n =$ _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17—21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

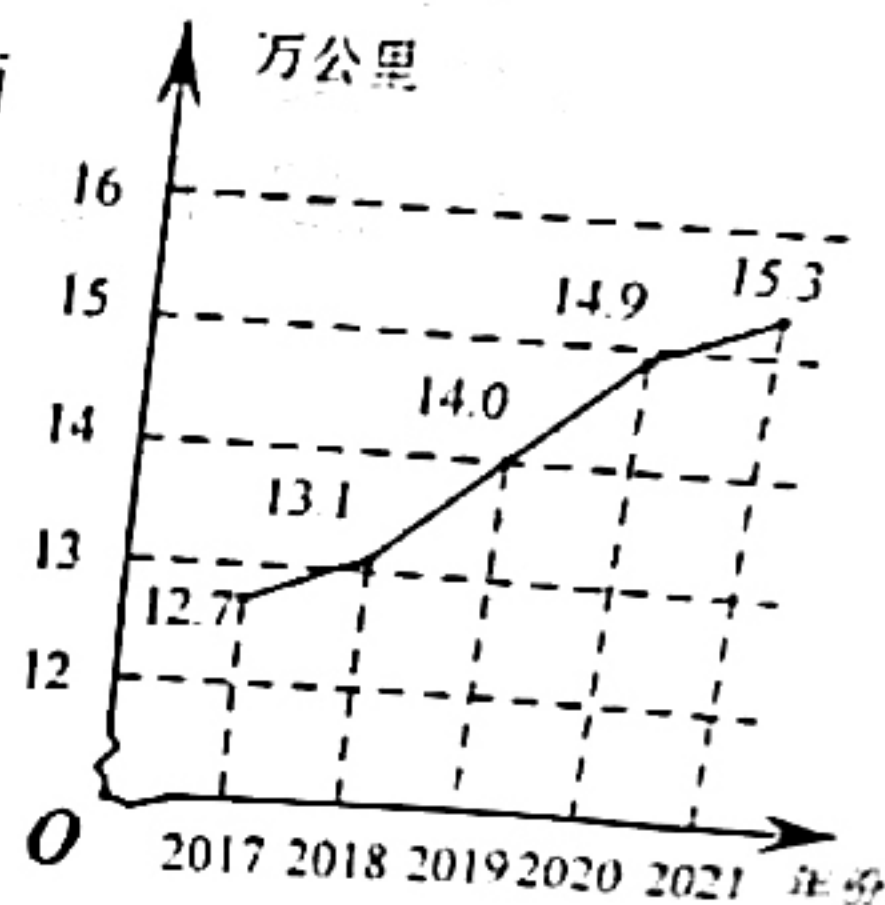
铁路作为交通运输的重要组成部分，是国民经济的大动脉，在我国经济发展中发挥着重要的作用。近年来，国家持续加大对铁路行业尤其是对高速铁路的投资力度，铁路行业得到了快速发展且未来仍具有较大的增长潜力。下图是我国 2017 至 2021 年铁路营业里程折线图。

(1) 为了使运算简单，用 x 表示年份数与 2016 的差，用 y 表示各年的营业里程数，由折线图易知 y 与 x 具有较强的线性关系，试用最小二乘法求 y 关于 x 的回归直线方程，并预测 2022 年营业里程为多少万公里；

(2) 从 2017 至 2021 年的五个营业里程数中随机抽取两个数，求所取得的两个数中，至少有一个超过 14 的概率。

附：回归直线的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$



18. (12 分)

在① $S_n = \frac{1}{2}(a_n - 1)(n + 2)$, ② $S_n^2 - (n^2 + 2n - 1)S_n - (n^2 + 2n) = 0$, $a_n > 0$ 这两个条件中任选一个，补充在下面问题中，并给出解答。

问题：已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，满足_____。记数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 的前 n 项和为 T_n 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求证： $\frac{1}{3} \leq T_n < \frac{3}{4}$ 。

注：如果两个条件都选择作答，则按照第一个解答评分。

19. (12 分)

如图 1，在梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AE \perp CD$ ，垂足为 E ， $AB = AE = \frac{1}{2}CE = 1$ ， $DE = \sqrt{2}$ 。将 $\triangle ADE$ 沿 AE 翻折到 $\triangle PAE$ ，如图 2 所示。 M 为线段 PB 的中点，且 $ME \perp PC$ 。

(1) 求证： $PE \perp EC$ ；

(2) 设 N 为线段 AE 上任意一点，当平面 BMN 与平面 PCE 所成锐二面角最小时，求 EN 的长。

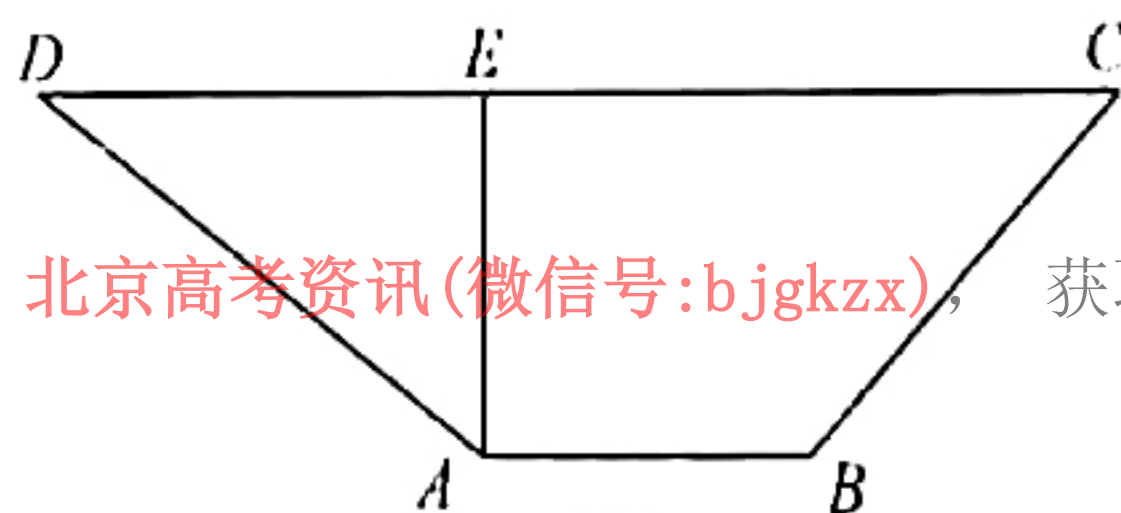


图1

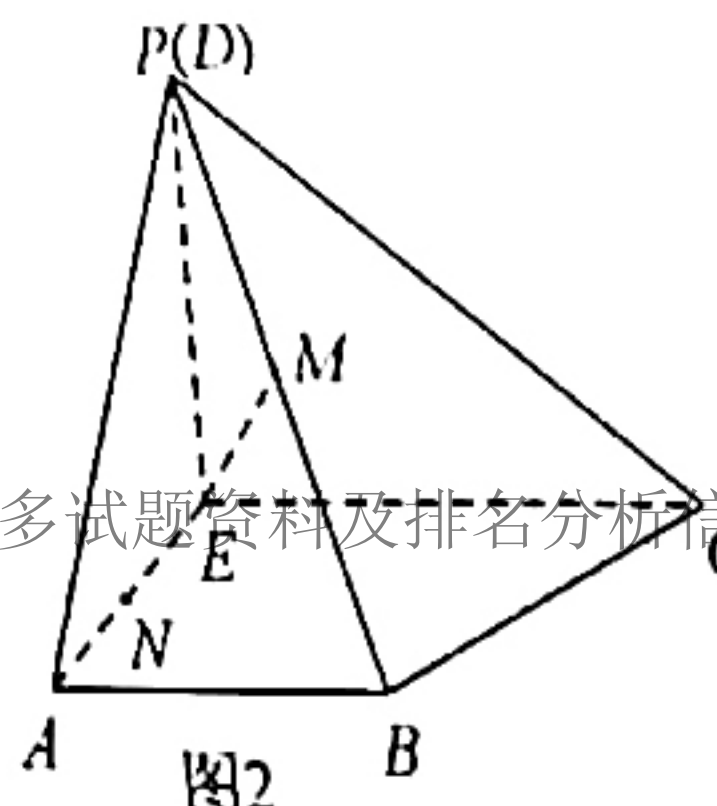


图2

20. (12分)

已知函数 $f(x) = a \ln x - 2\sqrt{x}$.

- (1) 若 $a = 2$, 求曲线 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处的切线方程;
- (2) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, 16]$ 上有两个零点, 求 a 的取值范围.

21. (12分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , G 为 E 的上顶点, 且 $\overrightarrow{F_1G} \cdot \overrightarrow{F_2G} = -2$.

- (1) 求 E 的方程;
- (2) 过坐标原点 O 作两条直线 l_1, l_2 分别交 E 于 A, B 和 C, D 两点, 直线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2 . 是否存在常数 t , 使 $k_1 k_2 = t$ 时, 四边形 $ACBD$ 的面积 S 为定值? 如果存在, 求出 t 的值; 如果不存在, 请说明理由.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (10分) [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 直线 m 的极坐标方程为 $\rho \sin \theta = -2$, 动点 P 在直线 m 上, 将射线 OP 按逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到射线 OP' , 射线 OP' 上一点 Q 满足 $|OQ| \cdot |OP| = 8$, 设点 Q 的轨迹为曲线 C .

- (1) 求曲线 C 的极坐标方程;
- (2) 直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{4} (\rho \in \mathbf{R})$, l 与曲线 C 相交于点 A (与 O 不重合), 若 $\triangle OAB$ 的顶点 B 也在曲线 C 上, 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值, 并求这时点 B 的直角坐标.

23. (10分) [选修 4-5: 不等式选讲]

已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, $a + b + c = 3$.

- (1) 求 $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1}$ 的最大值;
- (2) 求证: $\frac{a^2+c^2}{b} + \frac{b^2+a^2}{c} + \frac{c^2+b^2}{a} \geq 6$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: bjgkzx

官方网站: www.gaokzx.com

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjgkzx\)](https://www.gkzxx.com), 获取更多试题资料及排名分析信息。