北京一零一中 2022-2023 学年度第二学期期中考试

高 二 数 学

(本试卷满分 120 分，考试时间 100 分钟)

命题：高二数学备课组　审稿：贺丽珍

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，若 $a_5=5, a_8=11$，则公差 d 等于（　　）

(A) 3　　(B) -3　　(C) 2　　(D) -2

2. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，前 n 项和为 S_n. 若 $q=2, S_2=6$，则 $a_1=$（　　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

3. 已知函数 $f(x)=e^x-x$，则函数 $f(x)$ 的最小值为（　　）

(A) $\frac{1}{e}$　　(B) 1　　(C) $e-1$　　(D) e

4. 函数 $y=x\ln x$ 的单调递减区间是（　　）

(A) $(e^{-1},+\infty)$　　(B) $(-\infty,e^{-1})$　　(C) $(0,e^{-1})$　　(D) $(e,+\infty)$

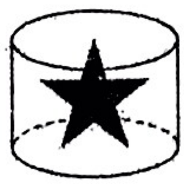
5. 函数 $y=\sin x+x$ 的零点个数为（　　）

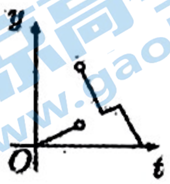
(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

6. 设曲线 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ 在点 $(3,2)$ 处的切线与直线 $ax+y+1=0$ 垂直，则 $a=$（　　）

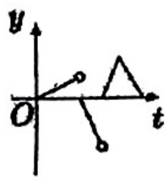
(A) 2　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $-\frac{1}{2}$　　(D) -2

7. 如图，一个正五角星薄片（其对称轴与水面垂直）匀速地升出水面，记 t 时刻五角星露出水面部分的图形面积为 $S(t)$，$S(0)=0$，则导函数 $y=S'(t)$ 的图象大致为（　　）

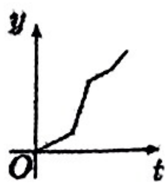




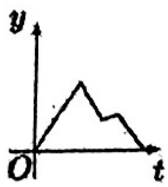
(A)



(B)



(C)



(D)

8. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 则 "$a_1<0$" 是 "$S_{2023}<0$" 的 (　　)

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

9. 已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$, 当 $1<x<3$ 时, 下列关系正确的是 (　　)

(A) $f(\sqrt{x})<f(x)<f^2(x)$　　(B) $f(x)<f(\sqrt{x})<f^2(x)$

(C) $f^2(x)<f(\sqrt{x})<f(x)$　　(D) $f^2(x)<f(x)<f(\sqrt{x})$

10. 对任意 $m\in\mathbf{N}_+$, 若递增数列 $\{a_n\}$ 中不大于 $2m$ 的项的个数恰为 m, 且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=100$, 则 n 的最小值为 (　　)

(A) 10　　(B) 9　　(C) 8　　(D) 7

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

11. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, 则 $f'(1)=$ __________.

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $2S_n-a_n=5$, 则 $a_{101}=$ __________.

13. 用铁皮围成一个容积为 4 m^3 的无盖正四棱柱形水箱, 需用铁皮的面积至少为 __________ m^2. (注: 铁皮厚度不计, 接缝处损耗不计)

14. 已知函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+m$ 在区间 $(n,+\infty)$ 上的极小值也是最小值, 则 n 的取值范围是 __________.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3^n$, 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, $(S_n+\dfrac{3}{2})k\geqslant 3n-6$ 恒成立, 则实数 k 的取值范围是 __________.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n-\dfrac{1}{2}a_n^2$. 给出下列四个结论:

①数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n<2$;

②数列 $\{a_n\}$ 的每一项 a_n 都满足 $0<a_n\leqslant 1$ $(n\in\mathbf{N}^*)$;

③数列 $\{a_n\}$ 的每一项 a_n 都满足 $a_n\geqslant(\dfrac{1}{2})^{n-1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$;

④存在 $n\in\mathbf{N}^*$, 使得 $a_n>\dfrac{2}{n+1}$ 成立.

其中, 所有正确结论的序号是 __________.

三、解答题共 4 小题，共 50 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

17. (本小题 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_{n+1}=a_n+2$，$S_2=a_3$.

(1) 若 a_1,a_3,a_m 成等比数列，求 m 的值;

(2) 设 $b_n=a_n-2^{a_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18. (本小题 12 分)

已知函数 $f(x)=a\ln x+x^2-(2a+1)x$，其中 $a>0$.

(1) 当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的极小值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 证明：当 $a\in(0,\dfrac{1}{2})$ 时，函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点.

19. (本小题 14 分)

已知函数 $f(x)=e^x(x^2-a)$，$a\in\mathbf{R}$.

(1) 当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(-3,0)$ 上存在单调递减区间，求 a 的取值范围;

(3) 若函数 $f(x)$ 的最小值为 $-2e$，求 a 的值.

20. (本小题 14 分)

在无穷数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n\in\mathbf{N}^*$，$a_n<a_{n+1}$. 设 $m\in\mathbf{N}^*$，记使得 $a_n\leqslant m$ 成立的 n 的最大值为 b_m.

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 为 $1,4,7,10,\cdots$，写出 b_1,b_2,b_3,b_4 的值;

(2) 若 $\{b_n\}$ 为等差数列，求出所有可能的数列 $\{a_n\}$;

(3) 设 $a_p=q$，$a_1+a_2+\cdots+a_p=A$，求 $b_1+b_2+\cdots+b_q$ 的值. (用 p,q,A 表示)

北京一零一中2022-2023学年度第二学期期中考试高二数学参考答案

一、选择题（每题4分，共10题，共40分）

1. C
2. B
3. B
4. C
5. B
6. D
7. A
8. C
9. A
10. A

二、填空题（每题5分，共6题，共30分）

11. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

12. 5.

13. 12.

14. $[-3,3)$.

15. $[\dfrac{2}{27},+\infty)$.

16. ②③. （0分，3分，5分）

三、解答题（共4题，共50分）

17.（共10分）

(1) （5分）因为 $a_{n+1}=a_n+2$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为2的等差数列，设公差为 d，则 $d=2$． …………1分

又因为 $S_2=a_3$，所以 $a_1+a_2=a_3$，得 $a_1=d=2$． …………2分

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n(n\in\mathbf{N}^*)$． …………3分

又因为 a_1,a_3,a_m 成等比数列，所以 $a_3^2=a_1\times a_m$， …………4分

即 $36=2\times 2m$，得 $m=9$． …………5分

(2) （5分）因为 $b_n=2n-2^{2n}=2n-4^n$， …………6分

$T_n=(2\times1-4^1)+(2\times2-4^2)+\cdots+(2\times n-4^n)$

所以 $=2\times(1+2+\cdots+n)-(4^1+4^2+\cdots+4^n)$.

$=2\times\dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{4\times(1-4^n)}{1-4}=n(n+1)-\dfrac{4}{3}\times(4^n-1)=n^2+n+\dfrac{4}{3}-\dfrac{4^{n+1}}{3}$

…………10分

18. （共12分）

(1)（3分）当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x+x^2-3x$，$x>0$．

$f'(x)=\dfrac{1}{x}+2x-3=\dfrac{(2x-1)(x-1)}{x}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{1}{2}$ 或 $x=1$． …………1分

所以 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{1}{2},1)$ 上单调递减，

在 $(1,+\infty)$ 上单调递增． …………2分

所以 $f(x)$ 极小值为 $f(1)=-2$． …………3分

(2)（4分） $f'(x)=\frac{a}{x}+2x-(2a+1)=\frac{(2x-1)(x-a)}{x}$，其中 $x>0$，$a>0$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=a$． ……………………………………………4分

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)\geq 0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，无单调递减区间． …………5分

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\frac{1}{2})$，$(a,+\infty)$，单调递减区间为 $(\frac{1}{2},a)$． ……………………………………………………………………………6分

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 单调递增区间为在 $(0,a)$，$(\frac{1}{2},+\infty)$，单调递减区间为 $(a,\frac{1}{2})$． ……………………………………………………………………………7分

(3)（5分）当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增，

在 $(a,\frac{1}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增．

所以 $f(x)$ 极大值为 $f(a)=a\ln a+a^2-(2a+1)a=a(\ln a-a-1)$． ……………8分

设 $g(x)=\ln x-x-1$，$0<x<\frac{1}{2}$．

$g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)>0$ 恒成立，

所以 $g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递增，所以 $g(x)<g(\frac{1}{2})=\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1<0$

所以 $g(x)<0$ 恒成立，所以 $f(a)<0$ 恒成立．

所以在 $(0,\frac{1}{2})$ 上，$f(x)$ 无零点． ……………………………………………10分

因为 $f(\frac{1}{2})<f(a)<0$，$f(e)=a+e^2-(2a+1)e=e^2+a-e(2a+1)>a>0$．

所以存在唯一 $x_0\in(\frac{1}{2},+\infty)$，使得 $f(x_0)=0$． ……………………………12分

综上，当 $a\in(0,\frac{1}{2})$ 时，函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点．

19. （共14分）

(1)（3分） 由题意可知 $f'(x)=e^x(x^2+2x-a)$．

因为 $a=1$，则 $f(0)=-1$，$f'(0)=-1$， …………………………… 2分

所以函数 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-(-1)=-(x-0)$．

即 $x+y+1=0$． …………………………………………………………………3分

(2)（3分） 因为函数 $f(x)$ 在 $(-3,0)$ 上存在单调递减区间，

所以当 $x\in(-3,0)$ 时，$f'(x)=e^x(x^2+2x-a)<0$ 存在性成立．

即当 $x\in(-3,0)$ 时，$x^2+2x-a<0$ 存在性成立．

显然，当 $x\in(-3,-1)$ 时，函数 $g(x)=x^2+2x-a$ 单调递减，

当 $x\in(-1,0)$ 时，函数 $g(x)=x^2+2x-a$ 单调递增. ……………………………4分

所以要使得“当 $x\in(-3,0)$ 时，$x^2+2x-a<0$ 存在性成立”，

等价于 $g(-1)<0$，所以 $a>-1$. ……………………………………………………6分

(3) （8分）设 $g(x)=x^2+2x-a$，则 $\Delta=4+4a$.

①当 $\Delta=4+4a\le 0$，即 $a\le -1$ 时，$g(x)\ge 0$，所以 $f'(x)\ge 0$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单增，所以函数 $f(x)$ 没有最小值. ………………7分

②当 $\Delta=4+4a>0$，即 $a>-1$ 时，令 $f'(x)=e^x(x^2+2x-a)=0$ ………8分（求导）

得 $x^2+2x-a=0$， 解得 $x_1=-1-\sqrt{a+1}$，$x_2=-1+\sqrt{a+1}$，

当 x 变化时，$f(x)$ 和 $f'(x)$ 的变化情况如下:

x	$(-\infty,-1-\sqrt{1+a})$	$-1-\sqrt{1+a}$	$(-1-\sqrt{1+a},-1+\sqrt{1+a})$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

x	$-1+\sqrt{1+a}$	$(-1+\sqrt{1+a},+\infty)$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	极小值	↗

……………………………………………………………………………………………9分

方法一：当 $x\in(-\infty,-1-\sqrt{1+a}]$ 时，$x^2\ge(-1-\sqrt{1+a})^2=2+a+2\sqrt{1+a}$，

所以 $x^2-a\ge 2+2\sqrt{1+a}>0$，

所以 $f(x)=e^x(x^2-a)>0$.

又因为函数 $f(x)$ 的最小值为 $-2e<0$， ……………………………………………11分

所以函数 $f(x)$ 的最小值只能在 $x_2=-1+\sqrt{a+1}$ 处取得.

∴ $f(-1+\sqrt{a+1})=e^{-1+\sqrt{a+1}}[(-1+\sqrt{a+1})^2-a]=2e^{-1+\sqrt{a+1}}(1-\sqrt{a+1})=-2e$. ……12分

所以 $e^{-1+\sqrt{a+1}}(\sqrt{a+1}-1)=e$.

设 $h(x)=xe^x$，$x>-1$.

则 $h'(x)=e^x(x+1)$，$h'(x)>0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $h(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $h(1)=e$，所以 $xe^x=e$ 在 $(-1,+\infty)$ 上有唯一解 $x=1$. …………13分（唯一性）

所以 $\sqrt{a+1}-1=1$.

解得 $a=3$. ……………………………………………………………………………14分

方法二：函数 $f(x)$ 的最小值只能在 $x_2=-1+\sqrt{a+1}$ 处取得.

所以 $f(-1+\sqrt{a+1})=e^{-1+\sqrt{a+1}}[(-1+\sqrt{a+1})^2-a]=2e^{-1+\sqrt{a+1}}(1-\sqrt{a+1})=-2e$ ……10分

所以 $e^{-1+\sqrt{a+1}}(\sqrt{a+1}-1)=e$.

设 $h(x)=xe^x$，$x>-1$.

则 $h'(x)=e^x(x+1)$，$h'(x)>0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $h(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $h(1)=e$，所以 $xe^x=e$ 在 $(-1,+\infty)$ 上有唯一解 $x=1$. …………11分（唯一性）

所以 $\sqrt{a+1}-1=1$.

解得 $a=3$． ……………………………………………………………………12分

下面验证：当 $a=3$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值为 $-2\mathrm{e}$．

当 $a=3$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x(x^2-3)$，$f'(x)=\mathrm{e}^x(x^2+2x-3)$．

令 $f'(x)=0$，$x=-3$ 或 $x=1$．

在 $(-\infty,-3)$ 上，$x^2-3>0$ 恒成立，所以 $f(x)>0$ 恒成立，所以 $f(x)>-2\mathrm{e}$．所以 $a=3$． ……………………………………………………………14分

20.（共14分）

(1) （3分）$b_1=1$，$b_2=1$，$b_3=1$，$b_4=2$． ……………………………………3分

(2) （6分）由题意，得 $1=a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots$，

结合条件 $a_n\in\mathbf{N}^*$，得 $a_n\geq n$． ……………………………………………4分

又因为使得 $a_n\leq m$ 成立的 n 的最大值为 b_m，使得 $a_n\leq m+1$ 成立的 n 的最大值为 b_{m+1}，

所以 $b_1=1$，$b_m\leq b_{m+1}(m\in\mathbf{N}^*)$． ……………………………………5分

设 $a_2=k$，则 $k\geq 2$．

假设 $k>2$，即 $a_2=k>2$，

则当 $n\geq 2$ 时，$a_n>2$；当 $n\geq 3$ 时，$a_n\geq k+1$．

所以 $b_2=1$，$b_k=2$．

因为 $\{b_n\}$ 为等差数列，

所以公差 $d=b_2-b_1=0$，

所以 $b_n=1$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$．

这与 $b_k=2(k>2)$ 矛盾，所以 $a_2=2$． ……………………………………6分

又因为 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots$，

所以 $b_2=2$， ……………………………………………………………7分

由 $\{b_n\}$ 为等差数列，得 $b_n=n$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$．

因为使得 $a_n\leq m$ 成立的 n 的最大值为 b_m，所以 $a_n\leq n$， ……………8分

由 $a_n\geq n$，得 $a_n=n$． ………………………………………………9分

(3) （5分）设 $a_2=k(k>1)$，

因为 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots$，

所以 $b_1=b_2=\cdots=b_{k-1}=1$，且 $b_k=2$，

所以数列 $\{b_n\}$ 中等于1的项有 $k-1$ 个，即 a_2-a_1 个； ……………………10分

设 $a_3=l(l>k)$，则 $b_k=b_{k+1}=\cdots=b_{l-1}=2$，且 $b_l=3$，

所以数列 $\{b_n\}$ 中等于2的项有 $l-k$ 个，即 a_3-a_2 个；

…

以此类推，数列 $\{b_n\}$ 中等于 $p-1$ 的项有 a_p-a_{p-1} 个． ……………………11分

所以 $b_1+b_2+\cdots+b_q=(a_2-a_1)+2(a_3-a_2)+\cdots+(p-1)(a_p-a_{p-1})+p$

$=-a_1-a_2-\cdots-a_{p-1}+(p-1)a_p+p$

$=pa_p+p-(a_1+a_2+\cdots+a_{p-1}+a_p)$

$=p(q+1)-A$， ……………………………………………………………13分

即 $b_1+b_2+\cdots+b_q=p(q+1)-A$． ……………………………………………14分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。