2020年高考模拟高考数学模拟试卷（一）

一、选择题

1．若集合 $A=\{x|x^2+2x<0\}$，$B=\{x||x|>1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{x|-2<x<-1\}$　B．$\{x|-1<x<0\}$　C．$\{x|0<x<1\}$　D．$\{x|1<x<2\}$

2．已知 a，$b\in\mathrm{R}$，且 $a>b$，则（　　）

A．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B．$\sin a>\sin b$

C．$\left(\frac{1}{3}\right)^a<\left(\frac{1}{3}\right)^b$　　D．$a^2>b^2$

3．已知直线 $x+y+2=0$ 与圆 $x^2+y^2+2x-2y+a=0$ 没有公共点，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$(-\infty,0]$　B．$[0,+\infty)$　C．$(0,2)$　D．$(-\infty,2)$

4．设 $\vec{a}$ 是单位向量，$\vec{b}$ 是非零向量，则“$\vec{a}\perp\vec{b}$”是“$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=1$”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

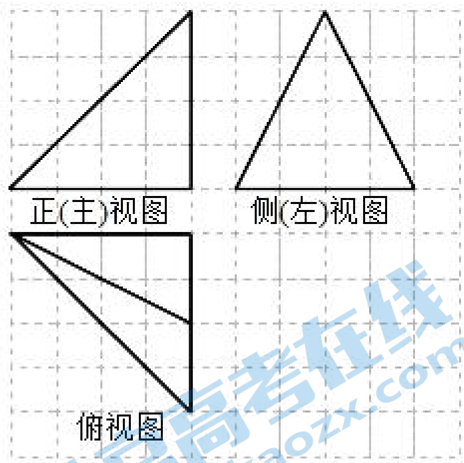
C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．设α，β是两个不同的平面，m，n 是两条不同的直线，则下列结论中正确的是（　　）

A．若 $m\perp\alpha$，$m\perp n$，则 $n\parallel\alpha$　　B．若 $\alpha\perp\beta$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，则 $m\perp n$

C．若 $n\parallel\alpha$，$m\perp n$，则 $m\perp\alpha$　　D．若 $\alpha\parallel\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则 $m\parallel n$

6．在正方形网格中，某四面体的三视图如图所示．如果小正方形网格的边长为1，那么该四面体最长棱的棱长为（　　）



A．$2\sqrt{5}$　B．$4\sqrt{2}$　C．6　D．$4\sqrt{3}$

7．数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，公比 $q>1$，且 $a_5=b_5$，则（　　）

A．$a_3+a_7>b_4+b_6$　　B．$a_3+a_7\geq b_4+b_6$

C．$a_3+a_7<b_4+b_6$　　D．$a_3+a_7=b_4+b_6$

8．A、B两种品牌各三种车型 2017 年 7 月的销量环比（与 2017 年 6 月比较）增长率如表：

A品牌车型	A_1	A_2	A_3
环比增长率	－7.29%	10.47%	14.70%

B品牌车型	B_1	B_2	B_3
环比增长率	－8.49%	－28.06%	13.25%

根据此表中的数据，有如下关于 7 月份销量的四个结论：

①A_1车型销量比 B_1车型销量多；

②A 品牌三种车型总销量环比增长率可能大于 14.70%；

③B 品牌三款车型总销量环比增长率可能为正；

④A 品牌三种车型总销量环比增长率可能小于 B 品牌三种车型总销量环比增长率.

其中正确结论的个数是（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

9．设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\phi)$，$A>0$，$\omega>0$，若 $f(x)$ 在区间$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$上单调，且 $f(\frac{\pi}{2})=f(\frac{2\pi}{3})=-f(\frac{\pi}{6})$，则 $f(x)$ 的最小正周期为　（　　）

A．$\frac{\pi}{2}$　　B．2π　　C．4π　　D．π

10．已知某校运动会男生组田径综合赛以选手三项运动的综合积分高低决定排名. 具体积分规则如表 1

所示，某代表队四名男生的模拟成绩如表 2.

表 1 田径综合赛项目及积分规则

项目	积分规则
100 米跑	以 13 秒得 60 分为标准，每少 0.1 秒加 5 分，每多 0.1 秒扣 5 分
跳高	以 1.2 米得 60 分为标准，每多 0.02 米加 2 分，每少 0.02 米扣 2 分
掷实心球	以 11.5 米得 60 分为标准，每多 0.1 米加 5 分，每少 0.1 米扣 5 分

表 2 某队模拟成绩明细

姓名	100 米跑（秒）	跳高（米）	掷实心球（米）
甲	13.3	1.24	11.8
乙	12.6	1.3	11.4
丙	12.9	1.26	11.7
丁	13.1	1.22	11.6

根据模拟成绩，该代表队应选派参赛的队员是（　　）

A．甲　　B．乙　　C．丙　　D．丁

二、填空题（共 5 小题）

11．已知复数 z 满足（1 - i）z＝2i（i 是虚数单位），则复数 z 的共轭复数 $\overline{z}$＝_______．

12．已知点 F 为抛物线 y^2＝8x 的焦点，则点 F 坐标为_______；若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{2}=1$（$a$＞0）的一个焦点与点 F 重合，则该双曲线的渐近线方程是_______．

13．已知 $(x-\frac{a}{x})^7$ 展开式中 x^5 的系数为 21，则实数 a 的值为_______．

14．已知函数 f（x）＝sin$x$ 若对任意的实数 $\alpha\in(-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{6})$，都存在唯一的实数 $\beta\in$（0，m），使 f（α）+f（β）＝0，则实数 m 的最大值是_______．

15．已知函数 $f(x)=\begin{cases}a^x, & x>1\\ x+\frac{a}{2}, & x\leqslant 1\end{cases}$ 其中 a＞0，且 a≠1．

（i）当 a＝2 时，若 f（x）＜f（2），则实数 x 的取值范围是_______；

（ii）若存在实数 m 使得方程 f(x) - m＝0 有两个实根，则实数 a 的取值范围是_______．

三、解答题（共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16．若△ABC 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，$b=1$，$c=\sqrt{6}$，且∠A 为锐角．

（Ⅰ）求 cos$A$ 的值；

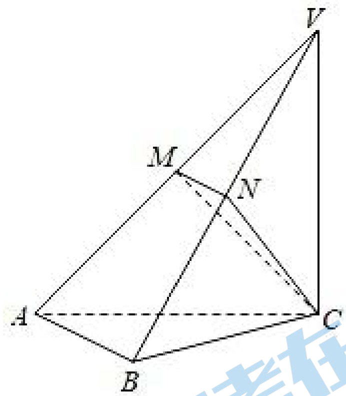
（Ⅱ）求 $\frac{\sin 2A}{\sin C}$ 的值．

17．如图，在三棱锥 V - ABC 中，平面 VAC⊥平面 ABC，△ABC 和△VAC 均是等腰直角三角形，AB＝BC，AC＝CV＝2，M，N 分别为 VA，VB 的中点．

（Ⅰ）求证：AB// 平面 CMN；

（Ⅱ）求证：$AB\perp VC$；

（Ⅲ）求直线 VB 与平面 CMN 所成角的正弦值．



18．某汽车品牌为了了解客户对于其旗下的五种型号汽车的满意情况，随机抽取了一些客户进行回访，调查结果如，表：

汽车型号	I	II	III	IV	V
回访客户（人数）	250	100	200	700	350
满意率	0.5	0.3	0.6	0.3	0.2

满意率是指：某种型号汽车的回访客户中，满意人数与总人数的比值．

假设客户是否满意互相独立，且每种型号汽车客户对于此型号汽车满意的概率与表格中该型号汽车的满意率相等．

（Ⅰ）从所有的回访客户中随机抽取 1 人，求这个客户满意的概率；

（Ⅱ）从 I 型号和 V 型号汽车的所有客户中各随机抽取 1 人，设其中满意的人数为 ξ，求 ξ 的分布列和期望；

（Ⅲ）用“$\eta_1=1$”，“$\eta_2=1$”，“$\eta_3=1$”，“$\eta_4=1$”，“$\eta_5=1$”分别表示 I，II，III，IV，V 型号汽车让客户满意，“$\eta_1=0$”，“$\eta_2=0$”，“$\eta_3=0$”，“$\eta_4=0$”，“$\eta_5=0$”分别表示 I，II，III，IV，V 型号汽车让客户不满意．写出方差 $D\eta_1$，$D\eta_2$，$D\eta_3$，$D\eta_4$，$D\eta_5$ 的大小关系．

19．已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2+2ax$．

（Ⅰ）若 $a=-1$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1，f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $f(x)\leqslant x$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

20．已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，右焦点为 $F(c，0)$，左顶点为 A，

右顶点 B 在直线 l：$x=2$ 上．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设点 P 是椭圆 C 上异于 A，B 的点，直线 AP 交直线 l 于点 D，当点 P 运动时，判断以 BD 为直径的圆与直线 PF 的位置关系，并加以证明．

21．设有限数列A：a_1，a_2，…，a_n（$n\in N^*$），定义集合 $M=\{a_i+a_j|1\leqslant i<j\leqslant n\}$ 为数列 A 的伴随集合．

（Ⅰ）已知有限数列 P：-1，0，1，2 和数列 Q：1，3，9，27．分别写出 P 和 Q 的伴随集合；

（Ⅱ）已知有限等比数列 A：2，2^2，…，2^n（$n\in N^*$），求 A 的伴随集合 M 中各元素之和 S；

（Ⅲ）已知有限等差数列 A：a_1，a_2，…，a_{2019}，判断 0，$\dfrac{50}{3}$，$\dfrac{7}{100}$ 是否能同时属于 A 的伴随集合 M，并说明理由．

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1．若集合 $A=\{x|x^2+2x<0\}$，$B=\{x||x|>1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{x|-2<x<-1\}$　B．$\{x|-1<x<0\}$　　C．$\{x|0<x<1\}$　　D．$\{x|1<x<2\}$

解：$A=\{x|-2<x<0\}$，$B=\{x|x<-1$，或 $x>1\}$；

$\therefore A\cap B=\{x|-2<x<-1\}$．

故选：A．

2．已知 a，$b\in$R，且 $a>b$，则（　　）

A．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　　　B．$\sin a>\sin b$

C．$(\frac{1}{3})^a<(\frac{1}{3})^b$　　　　D．$a^2>b^2$

解：设 $y=(\frac{1}{3})^x$，由指数函数的性质知，函数 $y=(\frac{1}{3})^x$ 为 R 上的减函数，

又 $a>b$，故 $(\frac{1}{3})^a<(\frac{1}{3})^b$．

故选：C．

3．已知直线 $x+y+2=0$ 与圆 $x^2+y^2+2x-2y+a=0$ 没有公共点，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$(-\infty, 0]$　　B．$[0, +\infty)$　　C．$(0, 2)$　　D．$(-\infty, 2)$

解：依题意可知，直线与圆相离．

圆 $x^2+y^2+2x-2y+a=0$ 即为 $(x+1)^2+(y-1)^2=2-a$．

由 $\frac{|-1+1+2|}{\sqrt{2}}>\sqrt{2-a}>0$，解得 $0<a<2$．

∴实数 a 的取值范围为 $(0, 2)$．

故选：C．

4．设 $\vec{a}$ 是单位向量，$\vec{b}$ 是非零向量，则“$\vec{a}\perp\vec{b}$”是“$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=1$”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

解：$\vec{a}$ 是单位向量，$\vec{b}$ 是非零向量，则 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=1\Leftrightarrow\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=1\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$，

故“$\vec{a}\perp\vec{b}$”是“$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=1$”的充分必要条件，

故选：C．

5．设 α，β 是两个不同的平面，m，n 是两条不同的直线，则下列结论中正确的是（　　）

A．若 $m\perp\alpha$，$m\perp n$，则 $n\parallel\alpha$　　B．若 $\alpha\perp\beta$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，则 $m\perp n$

C．若 $n\parallel\alpha$，$m\perp n$，则 $m\perp\alpha$　　D．若 $\alpha\parallel\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则 $m\parallel n$

解：对于 A，垂直于同一直线的直线和平面可能平行，也有可能是 $n\subset\alpha$，所以 A 错误；

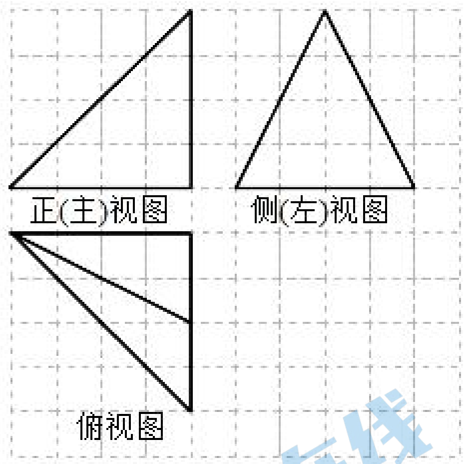
对于 B，若 $\alpha\perp\beta$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，则 $m\perp n$，故 B 正确．

对于 C，若 $n\parallel\alpha$，$m\perp n$，则 $m\perp\alpha$ 或 $m\parallel n$，故 C 错误；

对于 D，若 $\alpha\parallel\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则 $m\parallel n$ 或异面，故 D 错误．

故选：B．

6．在正方形网格中，某四面体的三视图如图所示．如果小正方形网格的边长为 1，那么该四面体最长棱的棱长为（　　）



A. $2\sqrt{5}$　　　　B. $4\sqrt{2}$　　　　C. 6　　　　D. $4\sqrt{3}$

解：由三视图可得，该几何体为三棱锥，直观图为侧棱垂直于底面，侧棱长为 4，底面为底边长，为 4，高为 4 的等腰三角形，

∴多面体的最长的棱长为$\sqrt{16+4+16}$=6.

故选：C.

7．数列$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是各项均为正数的等比数列，公比 $q>1$，且 $a_5=b_5$，则（　　）

A. $a_3+a_7>b_4+b_6$　　　　B. $a_3+a_7\geqslant b_4+b_6$

C. $a_3+a_7<b_4+b_6$　　　　D. $a_3+a_7=b_4+b_6$

解：数列$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是各项均为正数的等比数列，公比 $q>1$，

由 $a_3+a_7=2a_5=2b_5$，

$b_4+b_6\geqslant 2\sqrt{b_4b_6}=2b_5$，

$a_3+a_7\leqslant b_4+b_6$，

由于 $q>1$ 可得 $a_3+a_7<b_4+b_6$，

故选：C.

8．A、B 两种品牌各三种车型 2017 年 7 月的销量环比（与 2017 年 6 月比较）增长率如表：

A 品牌车型	A_1	A_2	A_3
环比增长率	－7.29%	10.47%	14.70%

B 品牌车型	B_1	B_2	B_3
环比增长率	－8.49%	－28.06%	13.25%

根据此表中的数据，有如下关于 7 月份销量的四个结论：

①A_1车型销量比 B_1车型销量多；

②A品牌三种车型总销量环比增长率可能大于 14.70%；

③B品牌三款车型总销量环比增长率可能为正；

④A品牌三种车型总销量环比增长率可能小于 B品牌三种车型总销量环比增长率.

其中正确结论的个数是（　　）

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

解：根据表中数据，对关于 7 月份销量的四个结论：

对于①，A_1车型销量增长率比 B_1车型销量增长率高，但销量不一定多，①错误；

对于②，A品牌三种车型中增长率最高为 14.70%，

所以总销量环比增长率不可能大于 14.70%，②错误；

对于③，B品牌三款车型中有销量增长率为 13.25%，

所以它的总销量环比增长率也可能为正，③正确；

对于④，由题意知 A品牌三种车型总销量环比增长率，

也可能小于 B品牌三种车型总销量环比增长率，④正确；

综上所述，其中正确的结论序号是③④.

故选：B.

9. 设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\phi)$，$A>0$，$\omega>0$，若 $f(x)$ 在区间$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$上单调，且 $f(\frac{\pi}{2})=f(\frac{2\pi}{3})=-f(\frac{\pi}{6})$，则 $f(x)$ 的最小正周期为（　　）

A. $\frac{\pi}{2}$　　　　B. 2π　　　　C. 4π　　　　D. π

解：∵函数 $f(x)=\sin(\omega x+\phi)$，$A>0$，$\omega>0$，若 $f(x)$ 在区间$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$上单调，

$\therefore \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{T}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{\omega}$，即$\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{\omega}$，$\therefore 0<\omega\leqslant 3$.

$\because f(\frac{\pi}{2})=f(\frac{2\pi}{3})=-f(\frac{\pi}{6})$，

$\therefore x=\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{7\pi}{12}$，为 $f(x)=\sin(\omega x+\phi)$ 的一条对称轴，

且$(\frac{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}}{2},0)$即$(\frac{\pi}{3},0)$为 $f(x)=\sin(\omega x+\phi)$ 的一个对称中心，

$\therefore \frac{T}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$，解得 $\omega=2\in(0,3]$，$\therefore T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

故选：D.

10．已知某校运动会男生组田径综合赛以选手三项运动的综合积分高低决定排名．具体积分规则如表 1

所示，某代表队四名男生的模拟成绩如表 2．

表 1 田径综合赛项目及积分规则

项目	积分规则
100 米跑	以 13 秒得 60 分为标准，每少 0.1 秒加 5 分，每多 0.1 秒扣 5 分
跳高	以 1.2 米得 60 分为标准，每多 0.02 米加 2 分，每少 0.02 米扣 2 分
掷实心球	以 11.5 米得 60 分为标准，每多 0.1 米加 5 分，每少 0.1 米扣 5 分

表 2 某队模拟成绩明细

姓名	100 米跑（秒）	跳高（米）	掷实心球（米）
甲	13.3	1.24	11.8
乙	12.6	1.3	11.4
丙	12.9	1.26	11.7
丁	13.1	1.22	11.6

根据模拟成绩，该代表队应选派参赛的队员是（　　）

A．甲　　B．乙　　C．丙　　D．丁

解：由题意知，四名运动员的各项得分成绩如下；

姓名	100 米跑（秒）	跳高（米）	掷实心球（米）	合计
甲	45	64	75	184
乙	80	70	55	205
丙	65	66	70	201
丁	55	62	65	182

由表中数据知，乙的综合得分最高，应选乙参加比赛．

故选：B.

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11．已知复数 z 满足（1－i）z＝2i（i 是虚数单位），则复数 z 的共轭复数 $\overline{z}$＝__－1－i__．

解：由（1－i）z＝2i，得 $z=\frac{2i}{1-i}=\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-1+i$，

∴$\overline{z}=-1-i$．

故答案为：－1－i．

12．已知点 F 为抛物线 y^2＝8x 的焦点，则点 F 坐标为__（2，0）__；若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{2}=1$（$a$＞0）的一个焦点与点 F 重合，则该双曲线的渐近线方程是__y＝±x__．

解：点 F 为抛物线 y^2＝8x 的焦点，2p＝8，即 p＝4，

由焦点坐标（$\frac{p}{2}$，0），即有 F（2，0），

双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{2}=1$（$a$＞0）的一个焦点与点 F（2，0）重合，

可得 a^2+2＝4，可得 $a=\sqrt{2}$，

即有双曲线的方程为 x^2－y^2＝2，

可得渐近线方程为 y＝±x．

故答案为：（2，0），y＝±x．

13．已知 $(x-\frac{a}{x})^7$ 展开式中 x^5 的系数为 21，则实数 a 的值为__－3__．

解：$(x-\frac{a}{x})^7$ 展开式中的通项公式 $T_{r+1}=C_7^r x^{7-r}(-\frac{a}{x})^r=(-a)^r C_7^r x^{7-2r}$，

令 7－2r＝5，解得 r＝1．

∴－a• C_7^1＝21，解得 a＝－3．

故答案为：－3．

14．已知函数 f（x）＝sin$x$ 若对任意的实数 $\alpha\in(-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{6})$，都存在唯一的实数 β∈（0，$m$），使 f（α）+f（β）＝0，则实数 m 的最大值是__$\frac{3\pi}{4}$__．

解：由 f（x）＝sinα $\alpha\in(-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{6})$，则 $f(\alpha)\in(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2})$，存在唯一的实数 β∈（0，$m$），使 f（α）+f（β）＝0

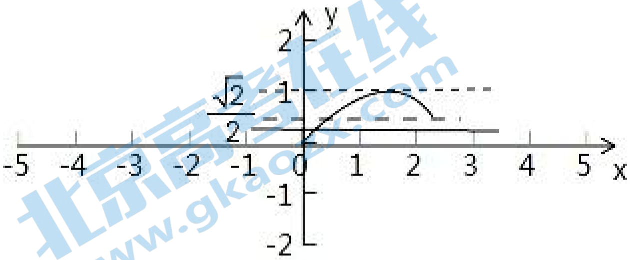
即 $f(\beta)=k$，$k\in(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 有且仅有一个解，

作函数图象 $y=f(\beta)$ 与直线 $x=k$，$k\in(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，

当两图象只有一个交点时，由图知，$\frac{\pi}{4}<m\leqslant\frac{3\pi}{4}$，

故实数 m 的最大值是 $\frac{3\pi}{4}$，

故答案为：$\frac{3\pi}{4}$.



15．已知函数 $f(x)=\begin{cases}a^x, & x>1\\ x+\frac{a}{2}, & x\leqslant 1\end{cases}$ 其中 $a>0$，且 $a\neq 1$.

（i）当 $a=2$ 时，若 $f(x)<f(2)$，则实数 x 的取值范围是 <u>$(-\infty, 2)$</u>；

（ii）若存在实数 m 使得方程 $f(x)-m=0$ 有两个实根，则实数 a 的取值范围是 <u>$(0, 1)\cup(1, 2)$</u>.

解：（1）当 $a=2$ 时，$f(x)=\begin{cases}2^x, & x>1\\ x+1, & x\leqslant 1\end{cases}$，

则 $f(2)=2^2=4$，

①当 $x>1$ 时，解不等式 $2^x<4$，解得：$1<x<2$，

②当 $x\leqslant 1$ 时，解不等式 $x+1<4$，解得：$x\leqslant 1$，

综合①②得：

实数 x 的取值范围是：$(-\infty, 2)$，

（2）①当 $0<a<1$ 时，由图一知，

存在直线 $y=m$ 与 $y=f(x)$ 有两个交点，

即 $0<a<1$ 满足题意，

②当 $a\geqslant 1$ 时，由图二知，当 $a<m\leqslant 1+\frac{a}{2}$ 时，

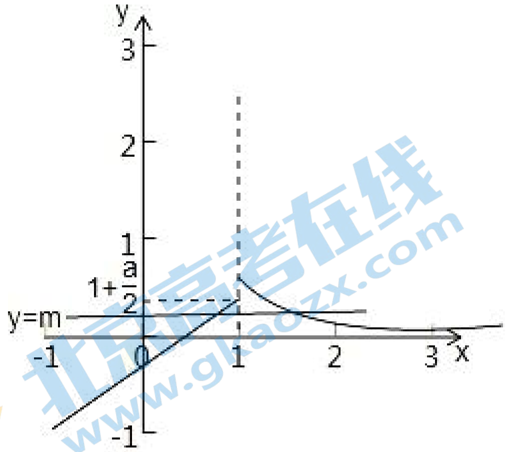
存在直线 $y=m$ 与 $y=f(x)$ 有两个交点，

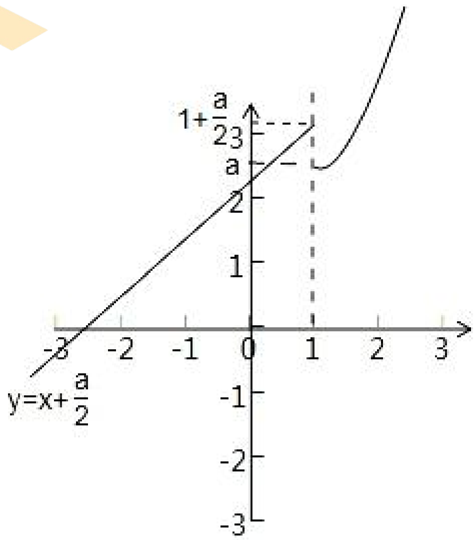
即 $a\leqslant 1+\frac{a}{2}$即 $1<a<2$

综合①②得：

实数 a 的取值范围是为：$0<a<1$ 或 $1<a<2$，

故答案为：（－∞，2），（0，1）∪（1，2）





三、解答题（共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16．若△ABC的面积为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$b=1$，$c=\sqrt{6}$，且∠A 为锐角．

（Ⅰ）求 $\cos A$ 的值；

（Ⅱ）求$\frac{\sin 2A}{\sin C}$的值．

解：（Ⅰ）因为△ABC 的面积为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$b=1$，$c=\sqrt{6}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{6}\times\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

因为△ABC 中，∠A 为锐角，

所以$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. …………

（ II ） 在 △ ABC 中 ， 由 余 弦 定 理 ，

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=1^2+(\sqrt{6})^2-2\times1\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=3$,

所以 $a=\sqrt{3}$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,

所以$\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{a}{c}$.

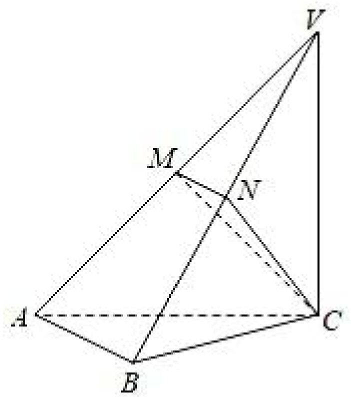
所以$\frac{\sin 2A}{\sin C}=\frac{2\sin A\cdot\cos A}{\sin C}=\frac{2a}{c}\cdot\cos A=\frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ……

17．如图，在三棱锥 $V-ABC$ 中，平面 $VAC\perp$ 平面 ABC，△ABC 和△VAC 均是等腰直角三角形，$AB=BC$，$AC=CV=2$，M，N 分别为 VA，VB 的中点．

（Ⅰ）求证：$AB//$ 平面 CMN;

（Ⅱ）求证：$AB\perp VC$;

（Ⅲ）求直线 VB 与平面 CMN 所成角的正弦值．



解：（Ⅰ）证明：∵M，N 分别为 VA，VB 的中点，

∴$MN// AB$,

∵$AB\not\subset$ 平面 CMN，$MN\subset$ 平面 CMN,

∴$AB//$ 平面 CMN.

（Ⅱ）证明：∵△ABC 和△VAC 均是等腰直角三角形，

$AB=BC$，$AC=CV=2$，M，N 分别为 VA，VB 的中点．

∴$AB\perp BC$，$VC\perp AC$,

∵平面 $VAC\perp$ 平面 ABC，平面 $VAC\cap$ 平面 $ABC=AC$,

∴$VC\perp$ 平面 ABC,

∵$AB\subset$平面 ABC，∴$AB\perp VC$.

（Ⅲ）解：以 B 为原点，BC 为 x 轴，BA 为 y 轴，过 B 作平面 ABC 的垂线为 z 轴，建立空间直角坐标系，

$V(\sqrt{2}, 0, 2)$，$B(0, 0, 0)$，$C(\sqrt{2}, 0, 0)$，$N(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 1)$，$A(0, \sqrt{2}, 0)$，

$M(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$，

$\overrightarrow{BV}=(\sqrt{2}, 0, 2)$，$\overrightarrow{CM}=(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$，$\overrightarrow{CN}=(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 1)$，

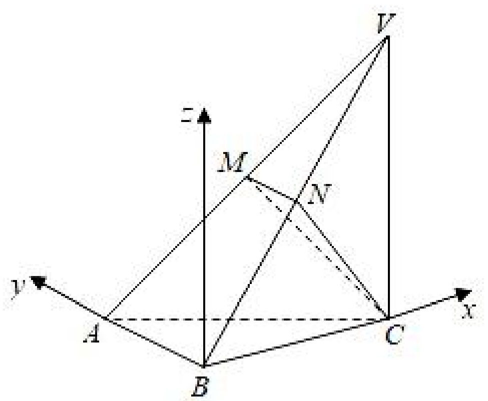
设平面 CMN 的法向量 $\vec{n}=(x, y, z)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CM}=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y+z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CN}=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+z=0\end{cases}$，取 $x=2$，得 $\vec{n}=(2, 0, \sqrt{2})$，

设直线 VB 与平面 CMN 所成角为 θ，

则直线 VB 与平面 CMN 所成角的正弦值为：

$$\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{BV}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{BV}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$



18. 某汽车品牌为了了解客户对于其旗下的五种型号汽车的满意情况，随机抽取了一些客户进行回访，调查结果如，表：

汽车型号	*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*
回访客户（人数）	250	100	200	700	350
满意率	0.5	0.3	0.6	0.3	0.2

满意率是指：某种型号汽车的回访客户中，满意人数与总人数的比值.

假设客户是否满意互相独立，且每种型号汽车客户对于此型号汽车满意的概率与表格中该型号汽车的满意率相等.

（Ⅰ）从所有的回访客户中随机抽取 1 人，求这个客户满意的概率；

（Ⅱ）从 I 型号和 V 型号汽车的所有客户中各随机抽取 1 人，设其中满意的人数为 ξ，求 ξ 的分布列和期望；

（Ⅲ）用“$\eta_1=1$”，“$\eta_2=1$”，“$\eta_3=1$”，“$\eta_4=1$”，“$\eta_5=1$”分别表示 I，II，III，IV，V 型号汽车让客户满意，“$\eta_1=0$”，“$\eta_2=0$”，“$\eta_3=0$”，“$\eta_4=0$”，“$\eta_5=0$”分别表示 I，II，III，IV，V 型号汽车让客户不满意．写出方差 $D\eta_1$，$D\eta_2$，$D\eta_3$，$D\eta_4$，$D\eta_5$ 的大小关系．

【解答】（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由题意知，样本中的回访客户的总数是 $250+100+200+700+350=1600$，

满意的客户人数 $250\times0.5+100\times0.3+200\times0.6+700\times0.3+350\times0.2=555$，

故所求概率为 $\dfrac{555}{1600}=\dfrac{111}{320}$．　　　　　　　　……

（Ⅱ）$\xi=0$，1，2．

设事件 A 为“从 I 型号汽车所有客户中随机抽取的人满意”，

事件 B 为“从 V 型号汽车所有客户中随机抽取的人满意”，且 A、B 为独立事件．

根据题意，$P(A)$ 估计为 0.5，$P(B)$ 估计为 0.2．

则 $P(\xi=0)=P(\overline{A}\overline{B})=(1-P(A))(1-P(B))=0.5\times0.8=0.$，

$P(\xi=1)=P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)(1-P(B))+(1-P(A))P(B)=0.5\times0.8+0.5\times0.2=0.5$，

$P(\xi=2)=P(AB)=P(A)P(B)=0.5\times0.2=0.1$．

∴ ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	0.4	0.5	0.1

ξ 的期望 $E(\xi)=0\times0.4+1\times0.5+2\times0.1=0.7$．……

（Ⅲ）用“$\eta_1=1$”，“$\eta_2=1$”，“$\eta_3=1$”，“$\eta_4=1$”，“$\eta_5=1$”分别表示 I，II，III，IV，V 型号汽车让客户满意，

“$\eta_1=0$”，“$\eta_2=0$”，“$\eta_3=0$”，“$\eta_4=0$”，“$\eta_5=0$”分别表示 I，II，III，IV，V 型号汽车让客户不满意．

∴方差 $D\eta_1$，$D\eta_2$，$D\eta_3$，$D\eta_4$，$D\eta_5$ 的大小关系为：$D\eta_1>D\eta_3>D\eta_2=D\eta_4>D\eta_5$．　　　　……

19．已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2+2ax$.

（Ⅰ）若 $a=-1$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $f(x)\leqslant x$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

解：（I）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$．

当 $a=-1$ 时，$f(x)=\ln x+x^2-2x$.

$\therefore f'(x)=\dfrac{1}{x}+2x-2$，

$f'(0)=1$，且 $f(1)=-1$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y-(-1)=x-1$，即 $x-y-2=0$.

（II）若 $f(x)\leqslant x$ 恒成立，即 $f(x)-x\leqslant 0$ 恒成立．

设 $g(x)=f(x)-x=\ln x-ax^2+(2a-1)x$．只要 $g(x)_{max}\leqslant 0$ 即可；

$g'(x)=\dfrac{-2ax^2+(2a-1)x+1}{x}=-\dfrac{(2a+1)(x-1)}{x}$.

①当 $a=0$ 时，令 $g'(x)=0$，得 $x=1$.

x，$g'(x)$，$g(x)$ 变化情况如下表：

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗	极大值	↘

所以 $g(x)_{max}=g(1)=-1<0$，故满足题意．

②当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=0$，得 $x=-\dfrac{1}{2a}$（舍），或 $x=1$；

x，$g'(x)$，$g(x)$ 变化情况如下表：

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗	极大值	↘

所以 $g(x)_{max}=g(1)=a-1\leqslant 0$，得 $0<a\leqslant 1$.

③当 $a<0$ 时，存在 $x=2-\dfrac{1}{a}>1$，满足 $g\left(2-\dfrac{1}{a}\right)=\ln\left(2-\dfrac{1}{a}\right)>0$，所以 $f(x)<0$ 不能恒成立，所以 $a<0$ 不满足题意．

综上，实数 a 的取值范围为$[0, 1]$.

20．已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，右焦点为$F(c,0)$，左顶点为$A$，右顶点$B$在直线$l$：$x=2$上．

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）设点P是椭圆C上异于A，B的点，直线AP交直线l于点D，当点P运动时，判断以BD为直径的圆与直线PF的位置关系，并加以证明．

解：（Ⅰ）依题可知$B(a,0)$，$a=2$

因为$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，

所以$c=1$，$b=\sqrt{3}$

故椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．

（Ⅱ）方法一：以BD为直径的圆与直线PF相切．

证明如下：由题意可设直线AP的方程为$y=k(x+2)$（$k\neq 0$）．

则点D坐标为$(2,4k)$，BD中点E的坐标为$(2,2k)$，

直线方程代入椭圆方程，可得$(3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$．

设点P的坐标为(x_0,y_0)，则$-2x_0=\frac{16k^2-12}{3+4k^2}$．

所以$x_0=\frac{6-8k^2}{3+4k^2}$，$y_0=\frac{12k}{3+4k^2}$．

因为点F坐标为$(1,0)$，

①当$k=\pm\frac{1}{2}$时，点P的坐标为$(1,\pm\frac{3}{2})$，直线PF的方程为$x=1$，D的坐标为$(2,\pm 2)$．

此时以BD为直径的圆$(x-2)^2+(y-1)^2=1$与直线PF相切．

②当$k\neq\pm\frac{1}{2}$时，则直线PF的斜率$k_{PF}=\frac{y_0}{x_0-1}=\frac{4k}{1-4k^2}$．

所以直线PF的方程为$y=\frac{4k}{1-4k^2}(x-1)$，即$x-\frac{1-4k^2}{4k}y-1=0$．

点 E 到直线 PF 的距离 $d=\dfrac{\left|2-\dfrac{1-4k^2}{4k}\times 2k-1\right|}{\sqrt{1+\left(\dfrac{1-4k^2}{4k}\right)^2}}=\dfrac{\dfrac{1+4k^2}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{1+4k^2}{4k}\right)^2}}=|2k|$

又因为 $|BD|=2R=4|k|$，故以 BD 为直径的圆与直线 PF 相切.

综上得，当直线 AP 绕点 A 转动时，以 BD 为直径的圆与直线 PF 相切

综上得，当点 P 运动时，以 BD 为直径的圆与直线 PF 相切.

方法二：以 BD 为直径的圆与直线 PF 相切.

证明如下：设点 $P(x_0,y_0)$，则 $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1(y_0\neq 0)$

①当 $x_0=1$ 时，点 P 的坐标为（1，$\pm\dfrac{3}{2}$），直线 PF 的方程为 $x=1$，

D 的坐标为（2，±2）.

此时以 BD 为直径的圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ 与直线 PF 相切.

②当 $x°\neq 1$ 时直线 AP 的方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，

点 D 的坐标为 $D\left(2,\dfrac{4y_0}{x_0+2}\right)$，$BD$ 中点 E 的坐标为 $\left(2,\dfrac{2y_0}{x_0+2}\right)$，故 $|BE|=\left|\dfrac{2y_0}{x_0+2}\right|$

直线 PF 的斜率为 $k_{PF}=\dfrac{y_0}{x_0-1}$，

故直线 PF 的方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0-1}(x-1)$，即 $x-\dfrac{x_0-1}{y_0}y-1=0$，

所以点 E 到直线 PF 的距离 $d=\dfrac{\left|2-\dfrac{x_0-1}{y_0}\times\dfrac{2y_0}{x_0+2}-1\right|}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x_0-1}{y_0}\right)^2}}=\left|\dfrac{2y_0}{x_0+2}\right|=|BE|$

故以 BD 为直径的圆与直线 PF 相切.

综上得，当点 P 运动时，以 BD 为直径的圆与直线 PF 相切.

21．设有限数列 A：a_1，a_2，…，$a_n(n\in N^*)$，定义集合 $M=\{a_i+a_j|1\leqslant i<j\leqslant n\}$ 为数列 A 的伴随集合.

（Ⅰ）已知有限数列 P：－1，0，1，2 和数列 Q：1，3，9，27．分别写出 P 和 Q 的伴随

集合；

（Ⅱ）已知有限等比数列 A：2，2^2，…，2^n（$n\in N^*$），求 A 的伴随集合 M 中各元素之和 S；

（Ⅲ）已知有限等差数列 A：a_1，a_2，…，a_{2019}，判断 0，$\frac{50}{3}$，$\frac{7}{100}$ 是否能同时属于 A 的伴随集合 M，并说明理由.

解：（Ⅰ）由数列 A 的伴随集合定义可得，

数列 P 的伴随集合为{-1，0，1，2，3}，

数列 Q 的伴随集合为{4，10，12，28，30，36}；

（Ⅱ）先证明对任意 $i\neq k$ 或 $j\neq l$，则 $a_i+a_j\neq a_k+a_l$（$1\leqslant i<j\leqslant n$，$1\leqslant k<l\leqslant n$）.

假设 $a_i+a_j=a_k+a_l$（$1\leqslant i<j\leqslant n$，$1\leqslant k<l\leqslant n$）.

当 $i=k$ 且 $j\neq l$，因为 $a_i+a_j=a_k+a_l$，则 $a_j=a_l$，即 $2^j=2^l$，

所以 $j=l$，与 $j\neq l$ 矛盾.

同理，当 $i\neq k$ 且 $j=l$ 时，也不成立.

当 $i\neq k$ 且 $j\neq l$ 时，不妨设 $i<k$，因为 $a_i+a_j=a_k+a_l$，则 $2^i+2^j=2^k+2^l$，

所以 $1+2^{j-i}=2^{k-i}+2^{l-i}$，

左边为奇数，右边为偶数，所以 $1+2^{j-i}\neq2^{k-i}+2^{l-i}$，

综上，对任意 $i\neq k$ 或 $j\neq l$，则 $a_i+a_j\neq a_k+a_l$（$1\leqslant i<j\leqslant n$，$1\leqslant k<l\leqslant n$）

所以求集合 M 中各元素之和时，每个 a_i（$1\leqslant i\leqslant n$）均出现 $n-1$ 次，

所以 $S=(n-1)(2+2^2+\cdots+2^n)=(n-1)\frac{2(1-2^n)}{1-2}=(n-1)(2^{n+1}-2)$；

（Ⅲ）假设 0，$\frac{50}{3}$，$\frac{7}{100}$ 同时属于数列 A 的伴随集合 M.

设数列 A 的公差为 d（$d\neq0$），

则$\begin{cases}a_{i_1}+a_{j_1}=0\\ a_{i_2}+a_{j_2}=\frac{50}{3}\\ a_{i_3}+a_{j_3}=\frac{7}{100}\end{cases}$ 即$\begin{cases}2a_1+(i_1+j_1-2)d=0, & ①\\ 2a_1+(i_2+j_2-2)d=\frac{50}{3}, & ②\\ 2a_1+(i_3+j_3-2)d=\frac{7}{100}, & ③\end{cases}$，

②-①得，$((i_2+j_2)-(i_1+j_1))d=\frac{50}{3}$，

③-①得，$((i_3+j_3)-(i_1+j_1))d=\frac{7}{100}$，

两式相除得，$\frac{(i_2+j_2)-(i_1+j_1)}{(i_3+j_3)-(i_1+j_1)}=\frac{5000}{21}$，

因为 i_1，j_1，i_2，j_2，i_3，$j_3 \in N^*$，

所以 $(i_2+j_2)-(i_1+j_1)=5000k$，$(i_3+j_3)-(i_1+j_1)=21k$（$k\in Z$，$k\neq 0$），

所以 $|(i_2+j_2)-(i_1+j_1)|\geqslant 5000$.

又因为 $1\leqslant i_1$，j_1，i_2，$j_2\leqslant 2019$，

所以 $(i_2+j_2)-(i_1+j_1)\leqslant(2019+2018)-(2+1)=4034$，

$(i_2+j_2)-(i_1+j_1)\geqslant(1+2)-(2018+2019)=-4034$，

所以 $|(i_2+j_2)-(i_1+j_1)|\leqslant 4034$，与 $|(i_2+j_2)-(i_1+j_1)|\geqslant 5000$ 矛盾，

所以 0，$\frac{50}{3}$，$\frac{7}{100}$ 不能同时属于数列 A 的伴随集合 M.

关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。
北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯（ID：bj-gaokao）
扫码关注获取更多