2023 北京交大附中高二（下）期中

数　　学

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．数列 1，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{7}$，$\frac{5}{9}$…的一个通项公式是（　　）

A．$a_n=\frac{n}{2n+1}$　　B．$a_n=\frac{n}{2n-1}$　　C．$a_n=\frac{n}{2n-3}$　　D．$a_n=\frac{n}{2n+3}$

2．若函数 $f(x)=3^x+\sin 2x$，则（　　）

A．$f'(x)=3^x\ln 3+2\cos 2x$　　B．$f'(x)=3^x+2\cos 2x$

C．$f'(x)=3^x\ln 3+\cos 2x$　　D．$f'(x)=3^x\ln 3-\cos 2x$

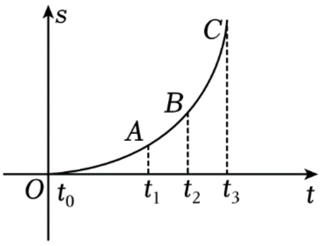
3．二项式 $(x+2)^7$ 的展开式中含 x^5 项的系数是（　　）

A．21　　B．35　　C．84　　D．280

4．函数 $f(x)=x-2\ln x+1$ 的单调递减区间为（　　）

A．（0，2）　　B．（0，e）　　C．（$\frac{1}{e}$，$+\infty$）　　D．（2，$+\infty$）

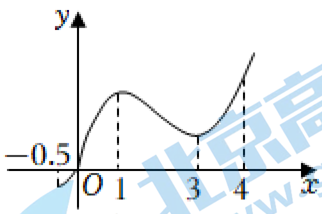
5．汽车行驶的路程 s 和时间 t 之间的函数图象如图，在时间段$[t_0, t_1]$，$[t_1, t_2]$，$[t_2, t_3]$上的平均速度分别为$\overline{v}_1$，$\overline{v}_2$，$\overline{v}_3$，则三者的大小关系为（　　）



A．$\overline{v}_1<\overline{v}_2<\overline{v}_3$　　B．$\overline{v}_1<\overline{v}_3<\overline{v}_2$

C．$\overline{v}_3<\overline{v}_2<\overline{v}_1$　　D．$\overline{v}_2<\overline{v}_3<\overline{v}_1$

6．定义在区间$[-\frac{1}{2}, 4]$上的函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示，则下列结论错误的是（　　）



A．函数 $f(x)$ 在区间（0，4）单调递增

B．函数 $f(x)$ 在区间$(-\frac{1}{2}, 0)$单调递减

C．函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值

D．函数 $f(x)$ 在 $x=3$ 处取得极小值

7．已知曲线 $y=ae^{x}+x\ln x$ 在点（1，ae）处的切线方程为 $y=2x+b$，则（　　）

A．$a=e$，$b=-1$　　B．$a=e$，$b=1$　　C．$a=e^{-1}$，$b=1$　　D．$a=e^{-1}$，$b=-1$

8．设$\{a_n\}$是首项为正数的等比数列，公比为 q，则“$q<0$”是“对任意的正整数 n，$a_{2n-1}+a_{2n}<0$”的（　　）

A．充要条件　　B．充分而不必要条件

C．必要而不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

9．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x, & x\leqslant 0\\ \ln(x+1), & x>0\end{cases}$，若$|f(x)|\geqslant ax$，则 a 的取值范围是（　　）

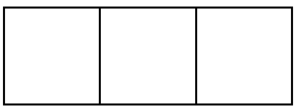
A．$(-\infty,0]$　　B．$(-\infty,1]$　　C．$[-2,1]$　　D．$[-2,0]$

10．几位大学生响应国家的创业号召，开发了一款应用软件．为激发大家学习数学的兴趣，他们推出了“解数学题获取软件激活码”的活动．这款软件的激活码为下面数学问题的答案：已知数列 1，1，2，1，2，4，1，2，4，8，1，2，4，8，16，…，其中第一项是 2^0，接下来的两项是 2^0，2^1，再接下来的三项是 2^0，2^1，2^2，依此类推．求满足如下条件的最小整数 N：$N>100$ 且该数列的前 N 项和为 2 的整数幂．那么该款软件的激活码是（　　）

A．440　　B．330　　C．220　　D．110

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11．（5 分）用红、黄、蓝三种颜色对如图所示的三个方格进行涂色．若要求每个小方格涂一种颜色，且涂成红色的方格数为偶数，则不同的涂色方案种数是______．（用数字作答）



12．（5 分）若等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$满足 $a_1=b_1=-1$，$a_4=b_4=8$，则$\frac{a_2}{b_2}=$______．

13．（5 分）已知数列$\{a_n\}$是递增的等比数列，$a_1+a_4=9$，$a_2a_3=8$，则数列$\{a_n\}$的前 n 项和等于_______．

14．（5 分）函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，$f(-1)=2$，对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f'(x)>2$，则 $f(x)>2x+4$ 的解集为________．

（多选）15．（5 分）设函数 $f(x)=\frac{x+e^{|x|}}{x}$，则下列选项正确的是（　　）

A．$f(x)$ 为奇函数

B．$f(x)$ 的图象关于点（0，1）对称

C．$f(x)$ 的最小值为 $e+1$

D．若$\frac{f(x)}{f(x)-1}=k$ 有两个不等实根，则 $1-\frac{1}{e}<k<1+\frac{1}{e}$，且 $k\neq 1$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 55 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16．已知等差数列$\{a_n\}$满足 $a_3=-9$，$a_{10}=5$．

（1）①求公差 d；

②求数列$\{a_n\}$的通项公式；

③设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，求使得 S_n 最小的 n 的值．

（2）若数列$\{a_n+b_n\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列．

①求数列$\{b_n\}$的通项公式；

②求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n．

17．已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+b$．

（1）当 $a=3$ 时，求 $f(x)$ 的单调性和极值；

（2）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（3）若 $a>0$，求 $f(x)$ 在区间$[0,1]$的最小值．

18．已知函数 $f(x)=x^2-1$ 与函数 $g(x)=a\ln x$（$a\neq0$）．

（1）若 $f(x)$，$g(x)$ 的图像在点（1，0）处有公共的切线，求实数 a 的值；

（2）设 $F(x)=f(x)-2g(x)$．

①求函数 $F(x)$ 的极值；

②试判断函数 $F(x)$ 零点的个数．

19．已知 $f(x)=x-ae^x$，$a\in\mathbf{R}$．

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点（0，$f(0)$）处的切线；

（2）若函数 $f(x)$ 在区间（1，$+\infty$）上存在极值，求 a 的取值范围；

（3）设 $g(x)=f(2-x)$，在（2）的条件下，试判断函数 $g(x)$ 在区间（1，$+\infty$）上的单调性，并说明理由．

20．已知二次函数 $f(x)=x^2-ax+a$（$x\in\mathbf{R}$）同时满足：

①不等式 $f(x)\leqslant0$ 的解集有且只有一个元素；

②在定义域内存在 $0<x_1<x_2$，使得不等式 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立．设数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=f(n)$．

（1）求 $f(x)$ 的表达式；

（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（3）设 $b_n=(\sqrt{3})^{a_n+5}$，$c_n=\dfrac{6b_n^2+b_{n+1}-b_n}{b_nb_{n+1}}$，$\{c_n\}$的前 n 项和为 T_n，若 $T_n>2n+t$ 对任意 $n\in\mathbf{N}$，$n\geqslant2$ 恒成立，求实数 t 的取值范围．

参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．【解答】解：$1=\frac{1}{1}$，由数列$\frac{1}{1}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{7}$，$\frac{5}{9}$…，观察到：分子为项数 n，分母为奇数 $2n-1$．

可得的一个通项公式是 $a_n=\frac{n}{2n-1}$．

故选：B．

2．【解答】解：因为 $f(x)=3^x+\sin 2x$，所以 $f'(x)=(3^x)'+(\sin 2x)'=3^x\ln 3+2\cos 2x$．

故选：A．

3．【解答】解：二项式 $(x+2)^7$ 的展开式中含 x^5 项的系数 $C_7^5\times 2^2=84$．

故选：C．

4．【解答】由题可知，函数定义域为（0，+∞），

由 $f'(x)=1-\frac{2}{x}<0$，

解得 $0<x<2$，

所以函数单调递减区间为（0，2）．

故选：A．

5．【解答】解：$\overline{v_1}=\frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}$，$\overline{v_2}=\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$，$\overline{v_3}=\frac{s(t_3)-s(t_2)}{t_3-t_2}$，

可以看作两点间连线的斜率，

所以$\overline{v_1}<\overline{v_2}<\overline{v_3}$．

故选：A．

6．【解答】解：由题意可知 $x\in(-\frac{1}{2},0)$ 时，$f'(x)<0$，函数是减函数，

$x\in(0,4)$ 时，$f'(x)>0$，函数是增函数，所以 A、B、C 正确，

D 不正确；

故选：D．

7．【解答】解：$y'=ae^x+\ln x+1$，

$k=y'|_{x=1}=ae+1=2$，$\therefore a=e^{-1}$

将（1，1）代入 $y=2x+b$，得 $2+b=1$，$b=-1$．

故选：D．

8．【解答】解：$\{a_n\}$是首项为正数的等比数列，公比为 q，

若“$q<0$”是“对任意的正整数 n，$a_{2n-1}+a_{2n}<0$”不一定成立，

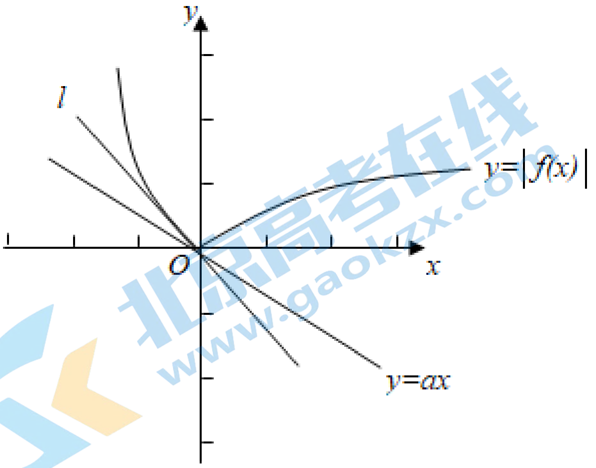
例如：当首项为 2，$q=-\frac{1}{2}$时，各项为 2，-1，$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{4}$，…，此时 $2+(-1)=1>0$，$\frac{1}{2}+(-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}>0$；

而“对任意的正整数 n，$a_{2n-1}+a_{2n}<0$”，前提是“$q<0$”，

则“$q<0$”是“对任意的正整数 n，$a_{2n-1}+a_{2n}<0$”的必要而不充分条件，

故选：C.

9.【解答】解：由题意可作出函数 $y=|f(x)|$的图象，和函数 $y=ax$ 的图象，



由图象可知：函数 $y=ax$ 的图象为过原点的直线，当直线介于 l 和 x 轴之间符合题意，直线 l 为曲线的切线，且此时函数 $y=|f(x)|$在第二象限的部分解析式为 $y=x^2-2x$，

求其导数可得 $y'=2x-2$，因为 $x\leqslant 0$，故 $y'\leqslant -2$，故直线 l 的斜率为 -2，

故只需直线 $y=ax$ 的斜率 a 介于 -2 与 0 之间即可，即 $a\in[-2，0]$

故选：D.

10.【解答】解：方法一、设该数列为$\{a_n\}$，设 $b_n=a_{\frac{(n-1)n}{2}+1}+\cdots+a_{\frac{n(n+1)}{2}}=2^n-1$，$(n\in\mathbf{N}_+)$，则

$\sum\limits_{i=1}^{n} b_i=\sum\limits_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} a_i$，

由题意可设数列$\{a_n\}$的前 N 项和为 S_N，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，则 $T_n=2^1-1+2^2-1+\cdots+2^{n+1}-1=2^{n+1}-n-2$，

可知当 N 为$\frac{n(n+1)}{2}$时$(n\in\mathbf{N}_+)$，数列$\{a_n\}$的前 N 项和为数列$\{b_n\}$的前 n 项和，即为 $2^{n+1}-n-2$，

容易得到 $N>100$ 时，$n\geqslant 14$，

A 项，由$\frac{29\times 30}{2}=435$，$440=435+5$，可知 $S_{440}=T_{29}+b_5=2^{30}-29-2+2^5-1=2^{30}$，故 A 项符合题意.

B 项，仿上可知$\frac{25\times 26}{2}=325$，可知 $S_{330}=T_{25}+b_5=2^{26}-25-2+2^5-1=2^{26}+4$，显然不为 2 的整数幂，

故 B 项不符合题意.

C 项，仿上可知$\frac{20\times 21}{2}=210$，可知 $S_{220}=T_{20}+b_{10}=2^{21}-20-2+2^{10}-1=2^{21}+2^{10}-23$，显然不为 2 的整数幂，故 C 项不符合题意．

D 项，仿上可知$\frac{14\times 15}{2}=105$，可知 $S_{110}=T_{14}+b_5=2^{15}-14-2+2^5-1=2^{15}+15$，显然不为 2 的整数幂，故 D 项不符合题意．

故选 A．

方法二：由题意可知：$\underbrace{2^0}_{\text{第一项}}$，$\underbrace{2^0,\ 2^1}_{\text{第二项}}$，$\underbrace{2^0,\ 2^1,\ 2^2}_{\text{第三项}}$，…$\underbrace{2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^{n-1}}_{\text{第n项}}$，

根据等比数列前 n 项和公式，求得每项和分别为：2^1-1，2^2-1，2^3-1，…，2^n-1，

每项含有的项数为：1，2，3，…，n，

总共的项数为 $N=1+2+3+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2}$，

所有项数的和为 S_n：$2^1-1+2^2-1+2^3-1+\cdots+2^n-1=(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n)-n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-2-n$，

由题意可知：2^{n+1} 为 2 的整数幂．只需将 $-2-n$ 消去即可，

则①$1+2+(-2-n)=0$，解得：$n=1$，总共有$\frac{(1+1)\times 1}{2}+2=3$，不满足 $N>100$，

②$1+2+4+(-2-n)=0$，解得：$n=5$，总共有$\frac{(1+5)\times 5}{2}+3=18$，不满足 $N>100$，

③$1+2+4+8+(-2-n)=0$，解得：$n=13$，总共有$\frac{(1+13)\times 13}{2}+4=95$，不满足 $N>100$，

④$1+2+4+8+16+(-2-n)=0$，解得：$n=29$，总共有$\frac{(1+29)\times 29}{2}+5=440$，满足 $N>100$，

∴该款软件的激活码 440．

故选：A．

方法三、要使$\frac{k(k+1)}{2}>100$，有 $k\geqslant 14$，此时 $k+2<2^{k+1}$，

∴$k+2$ 是之后的等比数列 1，2，…，2^{k+1} 的部分和，

即 $k+2=1+2+\ldots+2^{s-1}=2^s-1$，∴$k=2^s-3\geqslant 14$，$s$ 的最小值为 5，

此时 $k=2^5-3=29$．

对应最小的满足条件的 $N=\frac{29\times 30}{2}+5=440$．

故选：A．

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11．【解答】解：因为涂成红色的方格数为偶数，即涂成红色的方格数为 0，或 2，

3 个格涂一种颜色，有 2 种，（全黄或全蓝）

3 个格涂 2 颜色且涂 0 个红色时，$C_2^1C_3^2=6$ 种，

3 格涂 2 颜色且涂 2 个红色时，$C_2^1C_3^2=6$ 种，

根据分类计数原理，可得共有 2+6+6＝14 种，

故答案为：14．

12．【解答】解：等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$满足 $a_1=b_1=-1$，$a_4=b_4=8$，

设等差数列的公差为 d，等比数列的公比为 q．

可得：$8=-1+3d$，$d=3$，$a_2=2$；

$8=-q^3$，解得 $q=-2$，$\therefore b_2=2$．

可得$\frac{a_2}{b_2}=1$．

故答案为：1．

13．【解答】解：数列$\{a_n\}$是递增的等比数列，$a_1+a_4=9$，$a_2a_3=8$，

可得 $a_1a_4=8$，解得 $a_1=1$，$a_4=8$，

$\therefore 8=1\times q^3$，$q=2$，

数列$\{a_n\}$的前 n 项和为：$\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$．

故答案为：2^n-1．

14．【解答】解：设 $F(x)=f(x)-(2x+4)$，

则 $F(-1)=f(-1)-(-2+4)=2-2=0$，

又对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f'(x)>2$，所以 $F'(x)=f'(x)-2>0$，

即 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

则 $F(x)>0$ 的解集为 $(-1，+\infty)$，

即 $f(x)>2x+4$ 的解集为 $(-1，+\infty)$．

故答案为：$(-1，+\infty)$

15．【解答】解：根据题意，$f(x)=\frac{x+e^{|x|}}{x}=\begin{cases}1+\frac{e^x}{x}, & x>0\\ 1+\frac{e^{-x}}{x}, & x<0\end{cases}$，

据此依次分析选项：

对于 A，$f(1)=1+e$，$f(-1)=1-e$，$f(-1)\neq-f(1)$，$f(x)$ 不是奇函数，A 错误；

对于 B，$f(x)=\begin{cases}1+\frac{e^x}{x}, & x>0\\ 1+\frac{e^{-x}}{x}, & x<0\end{cases}$，有 $f(x)+f(-x)=2$，则 $f(x)$ 的图象关于点（0，1）对称，B 正确；

对于 C，$f(-1)=1-e<1+e$，则 $f(x)$ 的最小值不是 $e+1$，C 错误；

对于 D，$f(x)=\dfrac{x+e^{|x|}}{x}$，则$\dfrac{f(x)}{f(x)-1}=\dfrac{1+\dfrac{e^{|x|}}{x}}{1+\dfrac{e^{|x|}}{x}-1}=1+\dfrac{x}{e^{|x|}}$，

设 $g(x)=\dfrac{x}{e^{|x|}}$，$(x\neq 0)$，则 $g(-x)=-\dfrac{x}{e^{|x|}}=-g(x)$，则函数 $g(x)$ 为奇函数，

当 $x>0$ 时，$g(x)=\dfrac{x}{e^{x}}$，其导数 $g'(x)=\dfrac{1-x}{e^{x}}$，

在区间（0，1）上，$g(x)$ 为增函数，在区间（1，$+\infty$）上，$g(x)$ 为减函数，

则在区间（0，$+\infty$）上，有 $0<g(x)<g(1)=\dfrac{1}{e}$，

则在区间（$-\infty$，0）上，有 $-\dfrac{1}{e}<g(x)<0$，

故在区间（0，$+\infty$）上，有 $1<1+\dfrac{x}{e^{|x|}}<1+\dfrac{1}{e}$，

则在区间（$-\infty$，0）上，有 $1-\dfrac{1}{e}<g(x)<1$，

若若$\dfrac{f(x)}{f(x)-1}=k$ 有两个不等实根，则 $1-\dfrac{1}{e}<k<1+\dfrac{1}{e}$，且 $k\neq 1$，D 正确；

故选：BD.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 55 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16.【解答】解：（1）①因为 $a_3=-9$，$a_{10}=5$，则 $d=\dfrac{a_{10}-a_3}{10-3}=\dfrac{5+9}{7}=2$；

②$a_n=a_3+(n-3)d=-9+2(n-3)=2n-15$；

③ $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(2-15+2n-15)}{2}=n^2-14n=(n-7)^2-49$，

由二次函数的基本性质可知，当 $n=7$ 时，S_n 取最小值．

（2）①因为数列$\{a_n+b_n\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列，则 $a_n+b_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$，

所以，$b_n=2^{n-1}-a_n=2^{n-1}-(2n-15)$；

②$T_n=(2^0-a_1)+(2^1-a_2)+\cdots+(2^{n-1}-a_n)=(1+2^1+\cdots+2^{n-1})-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$

$=\dfrac{1-2^n}{1-2}-S_n=2^n-1-n^2+14n$.

17.【解答】解：（1）当 $a=3$ 时 $f(x)=2x^3-3x^2+b$ 定义域为 **R**，且 $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$，

所以当 $x<0$ 或 $x>1$ 时 $f'(x)>0$，当 $0<x<1$ 时 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为（$-\infty$，0），（1，$+\infty$），单调递减区间为（0，1），

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，在 $x=1$ 处取得极小值，

即 $f(x)_{极大值}=f(0)=b$，$f(x)_{极小值}=f(1)=-1+b$.

（2）函数 $f(x)=2x^3-ax^2+b$ 定义域为 **R**，则 $f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$ 或 $x=\frac{a}{3}$，

①当 $a>0$ 时，则当 $x<0$ 或 $x>\frac{a}{3}$ 时，$f'(x)>0$，

当 $0<x<\frac{a}{3}$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, 0)$，$(\frac{a}{3}, +\infty)$，单调减区间为 $(0, \frac{a}{3})$；

②当 $a=0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增；

③当 $a<0$ 时，当 $x<\frac{a}{3}$ 或 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，当 $\frac{a}{3}<x<0$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, \frac{a}{3})$，$(0, +\infty)$，单调递减区间为 $(\frac{a}{3}, 0)$．

综上，当 $a>0$ 时 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, 0)$，$(\frac{a}{3}, +\infty)$，单调减区间为 $(0, \frac{a}{3})$；

当 $a=0$ 时 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增；

当 $a<0$ 时 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, \frac{a}{3})$，$(0, +\infty)$，单调递减区间为 $(\frac{a}{3}, 0)$．

（3）因为 $a>0$，由（2）可得 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, 0)$，$(\frac{a}{3}, +\infty)$，单调减区间为 $(0, \frac{a}{3})$，

若 $\frac{a}{3}\geqslant 1$，即 $a\geqslant 3$ 时 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值为 $f(x)_{min}=f(1)=2-a+b$；

若 $0<\frac{a}{3}<1$，即 $0<a<3$ 时，$f(x)$ 在 $(0, \frac{a}{3})$ 单调递减，在 $(\frac{a}{3}, 1)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 的最小值为 $f(x)_{min}=f(\frac{a}{3})=-\frac{a^3}{27}+b$，

所以 $f(x)_{min}=\begin{cases}2-a+b, & a\geqslant 3\\ -\frac{a^3}{27}+b, & 0<a<3\end{cases}$．

18.【解答】解：（1）因为 $f(x)=x^2-1$，$g(x)=a\ln x$（$a\neq 0$），所以 $f(1)=0$，$g(1)=0$．

所以点 $(1, 0)$ 同时在函数 $f(x)$，$g(x)$ 的图像上，

因为 $f(x)=x^2-1$，$g(x)=a\ln x$，所以 $f'(x)=2x$，$g'(x)=\frac{a}{x}$，

由已知，得 $f'(1)=g'(1)$，所以 $2=\frac{a}{1}$，即 $a=2$．

（2）①因为 $F(x)=f(x)-2g(x)=x^2-1-2a\ln x$，$(x>0)$，

所以$F'(x)=2x-\frac{2a}{x}=\frac{2(x^2-a)}{x}$.

i. 当$a<0$时，

因为$x>0$，且$x^2-a>0$，所以$F'(x)>0$对$x>0$恒成立，

所以$F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$F(x)$无极值；

ii. 当$a>0$时，

令$F'(x)=0$，解得$x_1=\sqrt{a}$，$x_2=-\sqrt{a}$（舍）.

列表得：

x	$(0,\sqrt{a})$	$\sqrt{a}$	$(\sqrt{a},+\infty)$
$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$	减函数	极小值	增函数

所以当$x=\sqrt{a}$时，$F(x)$取得极小值，且$F(\sqrt{a})=(\sqrt{a})^2-1-2a\ln\sqrt{a}=a-1-a\ln a$.

综上，当$a<0$时，函数$F(x)$在$(0,+\infty)$上无极值；

当$a>0$时，函数$F(x)$在$x=\sqrt{a}$处取得极小值$a-1-a\ln a$.

②当$a<0$时，$F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$F(1)=1^2-1-2a\ln 1=0$，函数$F(x)$零点的个数为1；

当$a>0$时，$F(x)$在$(0,\sqrt{a})$上单调递，$F(x)$在$(\sqrt{a},+\infty)$上单调递增，

函数$F(x)$在$x=\sqrt{a}$处取得极小值$a-1-a\ln a$.

设$g(a)=a-1-a\ln a$，$g'(a)=1-\ln a-1=-\ln a$，$a\in(0,1)$，$g'(a)>0$，$g(a)$单调递增，$a\in(1,+\infty)$，$g'(a)<0$，$g(a)$单调递减，

又$g(1)=1-1-\ln 1=0$，$g(a)=a-1-a\ln a\leqslant g(1)=0$，

当$1>a>0$时，x趋近于0时，$F(x)=x^2-1-2a\ln x$趋近于正无穷大，

$\exists x_1\in(0,\sqrt{a})$，$F(x_1)=0$，

$1\in(\sqrt{a},+\infty)$，$F(1)=1^2-1-2a\ln 1=0$，函数$F(x)$零点的个数为2；

当$a>1$时，x趋近于正无穷大时，$F(x)=x^2-1-2a\ln x$趋近于正无穷大，

$\exists x_2\in(\sqrt{a},+\infty)$，$F(x_2)=0$，

$1\in(0,\sqrt{a})$，$F(1)=1^2-1-2a\ln 1=0$，函数$F(x)$零点的个数为2；

当$a=1$时，$F(x)$在$(0,1)$上单调递，$F(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，函数$F(x)$在$x=1$处取得极小值$a-1-a\ln a=1-1-\ln 1=0$，

函数$F(x)$零点的个数为1；

综上，当$a<0$或$a=1$时，函数$F(x)$零点的个数1；当$a>1$或$1>a>0$时，函数$F(x)$零点的个数2.

19.【解答】解：(1) 因为$f(x)=x-ae^x$，所以$f(0)=-a$，$f'(x)=1-ae^x$，则$f'(0)=1-a$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 出的切线方程为 $y+a=(1-a)x$，即 $y=(1-a)x-a$.

（2）由（1）得 $f'(x)=1-ae^x$，

因为函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上存在极值，

所以 $f'(x)=1-ae^x$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上有变号零点，

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)=1-ae^x$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增，$f'(1)=1-ae>0$，故不符合题意；

当 $a>0$ 时，$f'(x)=1-ae^x$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减，且当 x 趋近于 $+\infty$ 时，$f'(x)$ 趋近于 $-\infty$，

故要使 $f'(x)=1-ae^x$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上有变号零点，则 $f'(1)=1-ae>0$，即 $0<a<\frac{1}{e}$，

综上，$a\in(0, \frac{1}{e})$，即 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{e})$.

（3）函数 $g(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减，理由如下：

$g(x)=f(2-x)=2-x-ae^{2-x}$，$a\in(0, \frac{1}{e})$，$x\in(1, +\infty)$，

所以 $g'(x)=-1+ae^{2-x}$，

令 $y=-1+ae^{2-x}$，$x>1$，则 $y'=-ae^{2-x}<0$ 在 $x\in(1, +\infty)$ 恒成立，

所以函数 $g'(x)=-1+ae^{2-x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减，

由于 $g'(1)=-1+ae<-1+\frac{1}{e}\cdot e=0$，

所以函数 $g'(x)=-1+ae^{2-x}<0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立，

所以函数 $g(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上的单调递减.

20.【解答】解：（1）由不等式 $f(x)\leqslant 0$ 的解集有且只有一个元素得 $\Delta=a^2-4a=0$，

解得 $a=0$ 或 $a=4$.

当 $a=0$ 时，$f(x)=x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，故不存在 $0<x_1<x_2$，使得不等式 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立；

当 $a=4$ 时，$f(x)=x^2-4x+4$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减，故存在 $0<x_1<x_2$，使得不等式 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立.

综上，$f(x)=x^2-4x+4$.

（2）由（1）知：$S_n=n^2-4n+4$.

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-4n+4)-[(n-1)^2-4(n-1)+4]=2n-5$.

$\therefore a_n=\begin{cases}1, & n=1\\ 2n-5, & n\geqslant 2.\end{cases}$

（3）$\because b_n=(\sqrt{3})^{a_n+5}=\begin{cases}27, & n=1\\ 3^n, & n\geqslant 2.\end{cases}$，$\therefore b_1=27$，$b_2=9$，$c_1=18-\frac{2}{27}$，

∴当 $n\geqslant 2$ 时，$c_n=\dfrac{6\times 3^{2n}+3^{n+1}-3^n}{3^n\times 3^{n+1}}=2+2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$，

∴当 $n\geqslant 2$ 时，$T_n=18-\dfrac{2}{27}+2(n-1)+2\dfrac{\dfrac{1}{27}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right)}{1-\dfrac{1}{3}}\ 16+\dfrac{1}{27}+2n-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$，

$T_n>2n+t$ 对 $n\in\mathbf{N}$，$n\geqslant 2$ 恒成立等价于 $t<16+\dfrac{1}{27}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$ 对 $n\in\mathbf{N}$，$n\geqslant 2$ 恒成立，

而 $16+\dfrac{1}{27}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$ 是关于 n 的增函数，∴当 $n=2$ 时，$(T_n)_{min}=16$，

∴实数 t 的取值范围是 $t<16$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。