# 2023 北京怀柔一中高二 10 月月考

# 数　　学

**考试时间：120 分钟**

## 第一部分　（选择题　共 40 分）

**一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）**

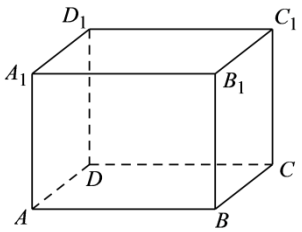
1.在复平面内，复数 $z$ 对应的点的坐标为 $(-2,-1)$，则复数 $z$ 的共轭复数 $\bar{z}=$（　）

A．$-2-\mathrm{i}$　　B．$-2+\mathrm{i}$　　C．$2+\mathrm{i}$　　D．$2-\mathrm{i}$

2．在空间直角坐标系中，已知 $M(-1,0,2)$，$N(3,2,-4)$，则 $MN$ 的中点 $P$ 到坐标原点 $O$ 的距离为（　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．3

3. 如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{C_1C}=$（　）



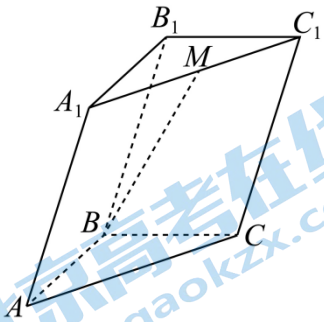

A．$\overrightarrow{AC_1}$　B．$\overrightarrow{A_1C}$　C．$\overrightarrow{C_1B}$　　D．$\overrightarrow{DB_1}$

4.已知 $a\in R$，$(1+ai)i=3+i$，($i$ 为虚数单位)，则 $a=$（　）

A．$-1$　　B．1　　C．$-3$

D．3

5．如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$M$ 为 $A_1C_1$ 的中点，若 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，则 $\overrightarrow{BM}$ 可表示为（　）




A．$-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　B．$\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　C．$-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　D．$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

6．若直线 $l$ 的方向向量为 $\vec{a}=(2,1,m)$，平面 $\alpha$ 的法向量为 $\vec{n}=\left(1,\frac{1}{2},2\right)$，且 $l//\alpha$，则（　）

A．$-\frac{4}{5}$　　B．$-\frac{5}{4}$　　C．4　　D．$\frac{5}{2}$

7.i 为虚数单位，则 $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2023}=$（　）

A．i　　B．$-\mathrm{i}$　　C．$-1$　　D．1

8. 已知复数 $z_1=1+2i, z_2=2-i, z_3=-1-2i$，在复平面上对应的点是一个正方形的 3 个顶点，则这个正方形的第 4 个顶点所对应的复数 $z_4=$

A．$2-\mathrm{i}$　　B．$-2+\mathrm{i}$　　C．$2+\mathrm{i}$　　D．$-2-\mathrm{i}$

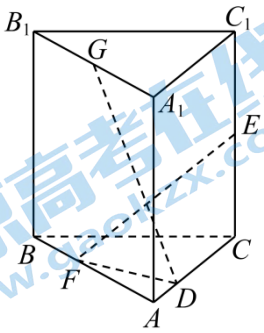
9.已知复数 $z\neq 0$，则“$|z|=1$”是“$z+\frac{1}{z}\in \mathrm{R}$”的（　）.

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

10．如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle BAC=\frac{\pi}{2}$，$AB=AC=AA_1=1$，已知 $G$ 与 $E$ 分别为 $A_1B_1$ 和 $CC_1$ 的中点，$D$ 与 $F$ 分别为线 $AC$ 和 $AB$ 上的动点（不包括端点），若 $GD\perp EF$、则线段 $DF$ 长度的取值范围为（　）




A．$[\frac{\sqrt{5}}{5},1)$　B．$[\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{5}]$　C．$[\frac{\sqrt{2}}{5},\sqrt{2})$　D．$[\sqrt{2},\sqrt{3}]$

## 第二部分　（非选择题　共 110 分）

### 二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11.已知复数 $z$ 满足 $z=\frac{1+i}{i}$，则 $|z|=$_____.

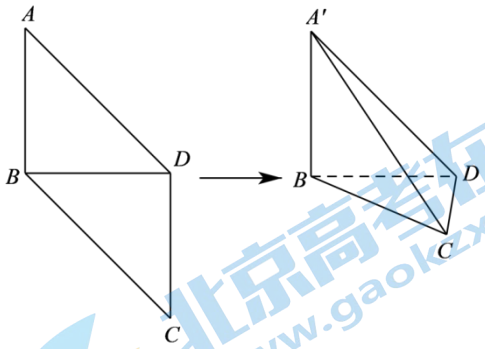
12. 已知向量 $\vec{a}=(0,1,-1)$，$\vec{b}=(1,1,0)$，若 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})\perp\vec{b}$，则实数 $\lambda$ 等于____.

13.i 为虚数单位，则 $1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{2016}=$_____.

14．在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$P$ 是棱 $CC_1$ 上一动点，点 $O$ 是面 $AC$ 的中心，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AO}$ 的值为___.

15．如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=BD=DC=1, AD=BC=\sqrt{2}$，将平行四边形 $ABCD$ 沿对角线 $BD$ 折成三棱锥 $A'-BCD$，使平面 $A'BD\perp$ 平面 $BCD$，在下列结论中：①直线 $CD\perp$ 平面 $A'BD$；②平面 $A'BC\perp$ 平面 $BCD$；③ $BC$ 与 $A'D$ 成角的大小为 $45^\circ$；④棱 $A'C$ 上存在一点到顶点 $A'$、$B$、$C$、$D$ 的距离相等；⑤点 $B$ 到平面 $A'CD$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$；

所有正确结论的编号是_____.




### 三、解答题（共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16.已知复数 $z_1=a+i$，$z_2=1-i$，$a\in R$.

（I）当 $a=1$ 时，求 $z_1\cdot\overline{z}_2$ 的值；

（II）若 $z_1-z_2$ 是纯虚数，求 $a$ 的值；

（III）若 $\frac{z_1}{z_2}$ 在复平面上对应的点在第二象限，求 $a$ 的取值范围.

17.已知向量 $\vec{a}=(1,0,-1)$，$\vec{b}=(3,t,0)$.

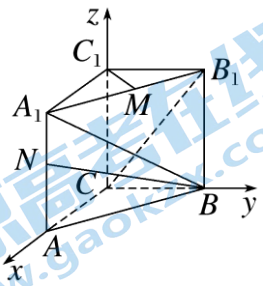
(1)若 $t=3$，求 $<\vec{a},\vec{b}>$；

(2)求证：对任意 $t\in\mathbf{R}$，$2\vec{a}+\vec{b}$ 与 $2\vec{a}-\vec{b}$ 不垂直；

(3)若 $\lambda\vec{a}+\vec{b}$ 与 $z$ 轴平行，求 $\lambda$、$t$ 的值

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

18.如图所示，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CA=CB=1$，$\angle BCA=90°$，棱 $AA_1=2$，$M$，$N$ 分别是 $A_1B_1$，$A_1A$ 的中点，以 $C$ 为原点，建立如图所示空间直角坐标系.

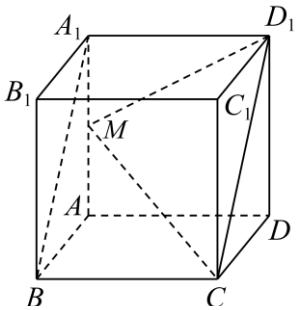



(1)求$\overrightarrow{BN}$的长；

(2)求 cos〈$\overrightarrow{BA_1}$，$\overrightarrow{CB_1}$〉的值；

(3)求证：$A_1B\perp C_1M$.

19．如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $M$ 为线段 $AA_1$ 的中点.

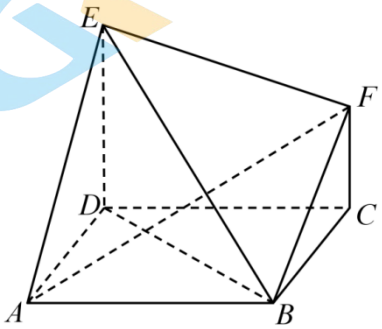


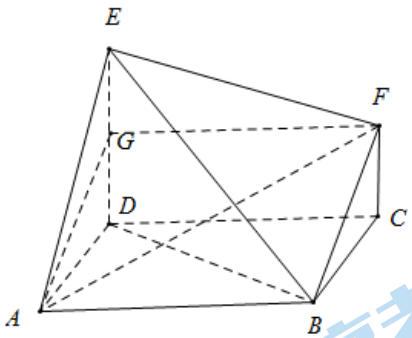

(1)求证：$A_1C\perp BC_1$；

(2)求平面 $ADD_1A_1$ 与平面 $MCD_1$ 夹角的余弦值；

(3)求点 $D$ 到平面 $MCD_1$ 的距离.

20．如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，$ABCD$ 为正方形，$DE\perp$平面 $ABCD$，$CF//DE$，$DE=DC=2CF=2$.

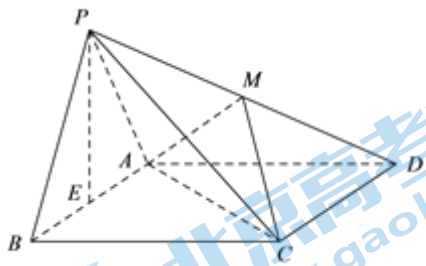



(1)求证：$BF//$平面$ADE$；

(2)求直线 $BD$ 与平面 $AEF$ 所成角的大小.

21．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle ABC=60°$，$\Delta PAB$ 为正三角形，且侧面 $PAB\perp$底面 $ABCD$，$E$ 为线段 $AB$ 的中点，$M$ 在线段 $PD$ 上.




（I）当 $M$ 是线段 $PD$ 的中点时，求证：$PB//$平面 $ACM$；

（II）求证：$PE\perp AC$；

（III）是否存在点 $M$，使二面角 $M-EC-D$ 的大小为 60°，若存在，求出 $\dfrac{PM}{PD}$ 的值；若不存在，请说明

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

理由.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

# 参考答案

## 第一部分 （选择题 共 40 分）

**一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）**

1.【答案】B

2.【详解】$\because M(-1,0,2)$，$N(3,2,-4)$，由中点坐标公式，得 $P(1,1,-1)$，所以 $|OP|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$.

故选：A

3.【答案】A

【详解】$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{C_1C}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{C_1C}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}$. 故选：A

4.【答案】C

5.【答案】A

【详解】由题意可知，$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1A_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$，

因为 $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，所以 $\overrightarrow{BM}=\vec{b}+\vec{c}+\frac{1}{2}(-\vec{a}-\vec{b})=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$.

故选：A.

6.【答案】B

【详解】若 $l//\alpha$，则有 $\vec{a}\perp\vec{n}$，即 $\vec{a}\cdot\vec{n}=2+\frac{1}{2}+2m=0$，解得 $m=-\frac{5}{4}$.故选：B

7.【答案】B

【分析】根据复数除法运算法则和 i 的幂运算的周期性直接求解即可.

【详解】$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2023}=\left[\frac{(1+\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}\right]^{2023}=\left(\frac{2\mathrm{i}}{2}\right)^{2023}=\mathrm{i}^{2023}=\mathrm{i}^{4\times505+3}=\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$.

故选：B.

8.【答案】B

设复数 $z_1=1+2\mathrm{i},z_2=2-\mathrm{i},z_3=-1-2\mathrm{i}$ 在复平面上分别对应点 $A(1,2),B(2,-1),C(-1,-2)$，

设正方形的第四个顶点对应的坐标是 $D(x,y)$，则其对应的复数为 $x+y\mathrm{i},x,y\in\mathrm{R}$，

结合对应点的位置特征知：$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，又 $\overrightarrow{AD}=(x-1,y-2),\overrightarrow{BC}=(-3,-1)$，

$\therefore (x-1,y-2)=(-3,-1)$，$\therefore x-1=-3,y-2=-1$，

$\therefore x=-2,y=1$，故这个正方形的第四个顶点对应的复数是 $-2+\mathrm{i}$.

故选：B

9.【答案】A

【详解】设 $z=a+b\mathrm{i}$，$a,b\in\mathrm{R}$，当 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=1$ 时，即 $a^2+b^2=1$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

$z+\frac{1}{z}=a+bi+\frac{1}{a+bi}=a+bi+\frac{a-bi}{a^2+b^2}=2a\in R$，充分性；

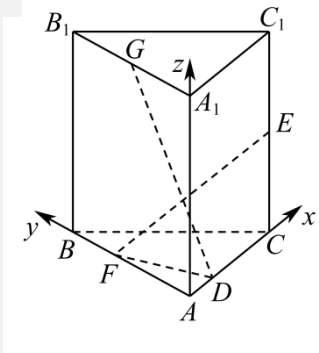
取 $z=2$，则 $z+\frac{1}{z}=\frac{5}{2}\in R$，$|z|=2$，不必要性.

综上所述："$|z|=1$"是"$z+\frac{1}{z}\in R$"的充分不必要条件.

故选：A

10.【答案】A

【详解】建立如图所示的空间直角坐标系，




则 $E\left(1,0,\frac{1}{2}\right),G\left(0,\frac{1}{2},1\right)$，设点 $D$ 坐标为 $(m,0,0),F(0,n,0)$，

$0<m<1,0<n<1$，

故 $\overrightarrow{EF}=\left(-1,n,-\frac{1}{2}\right),\overrightarrow{GD}=\left(m,-\frac{1}{2},-1\right)$，因为 $GD\perp EF$，

故可得 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GD}=-m-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}=0$，则 $n=-2m+1$，由 $n\in(0,1)$ 可得

$m\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，

又 $\overrightarrow{DF}=(-m,n,0)$，故 $|\overrightarrow{DF}|=\sqrt{m^2+n^2}=\sqrt{5m^2-4m+1}=\sqrt{5\left(m-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}}$，

故当 $m=\frac{2}{5}$ 时，$|\overrightarrow{DF}|$ 取得最小值 $\frac{\sqrt{5}}{5}$；又当 $m=0$ 时，$|\overrightarrow{DF}|=1$，但无法取到 $m=0$，则 $|\overrightarrow{DF}|$ 无法取到1；

综上，线段 $DF$ 长度的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{5}}{5},1\right)$.

故选：A

## 第二部分 （非选择题 共 110 分）

### 二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11.【答案】$\sqrt{2}$

12.【答案】$-\frac{1}{2}$/-0.5

【分析】根据给定条件求出 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 及 $\vec{b}^2$，再利用给定的垂直关系列式计算作答.

【详解】因向量 $a=(0,1,-1)$，$b=(1,1,0)$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\vec{b}^2=2$，

又 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})\perp\vec{b}$，则 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\lambda\vec{b}^2=0$，即 $1+2\lambda=0$，解得 $\lambda=-\frac{1}{2}$，

所以实数 $\lambda$ 等于 $-\frac{1}{2}$.

故答案为：$-\frac{1}{2}$

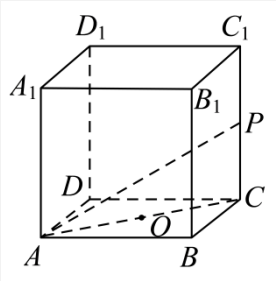
关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

13.【答案】1

【详解】$1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\cdots+\mathrm{i}^{2016}=1+504(\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4)=1$，故答案为：1.

14.【答案】4

【详解】如图所示：




因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，所以 $CP\perp AC$，$AC=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$，所以 $AO=\sqrt{2}$，

由图可知：$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AO}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP})\cdot\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AO}=2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4$.

故答案为：4

15.【答案】①②④

【分析】利用面面垂直的性质可判断①的正误；利用面面垂直的判定定理可判断②的正误；利用直角三角形的几何性质可判断④的正误；以点 $B$ 为坐标原点，$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{BD}$、$\overrightarrow{BA'}$ 的方向分别为 $x$、$y$、$z$ 轴的正方向建立空间直角坐标系，利用空间向量法可判断③⑤的正误.

【详解】对于①，因为 $BD=CD=1$，$BC=\sqrt{2}$，则 $BD^2+CD^2=BC^2$，所以，$BD\perp CD$，

$\because$ 平面 $A'BD\perp$ 平面 $BCD$，平面 $A'BD\cap$ 平面 $BCD=BD$，$CD\subset$ 平面 $BCD$，

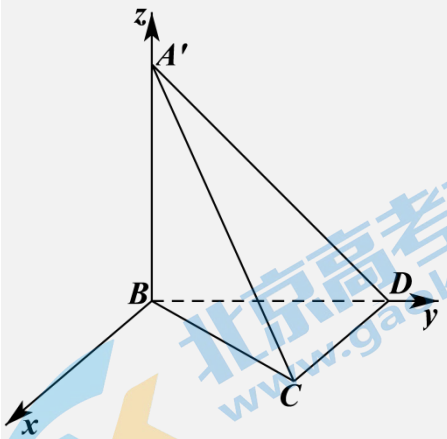
所以，$CD\perp$ 平面 $A'BD$，①对；

对于②，$\because A'B=BD=1$，$A'D=\sqrt{2}$，则 $A'B^2+BD^2=A'B^2$，则 $A'B\perp BD$，

$\because CD\perp$ 平面 $A'BD$，$A'B\subset$ 平面 $A'BD$，则 $A'B\perp CD$，

$\because BD\cap CD=D$，$\therefore A'B\perp$ 平面 $BCD$，$\because A'B\subset$ 平面 $A'BC$，故平面 $A'BC\perp$ 平面 $BCD$，②对；

以点 $B$ 为坐标原点，$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{BD}$、$\overrightarrow{BA'}$ 的方向分别为 $x$、$y$、$z$ 轴的正方向建立如下图所示的空间直角坐标系，




则 $A'(0,0,1)$、$B(0,0,0)$、$C(1,1,0)$、$D(0,1,0)$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

对于③，$\overrightarrow{BC}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{A'D}=(0,1,-1)$，$\cos<\overrightarrow{BC},\overrightarrow{A'D}>=\dfrac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{A'D}}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{A'D}|}=\dfrac{1}{2}$，

所以，直线 $BC$ 与 $A'D$ 成角的大小为 $60^\circ$，③错；

对于④，因为 $CD\perp$ 平面 $A'BD$，$A'D\subset$ 平面 $A'BD$，则 $CD\perp A'D$，同理 $A'B\perp BC$，

所以，线段 $A'C$ 的中点到顶点 $A'$、$B$、$C$、$D$ 的距离相等，④对；

对于⑤，$\overrightarrow{A'D}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{DC}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{BA'}=(0,0,1)$，

设平面 $A'CD$ 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A'D}=y-z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=x=0\end{cases}$，取 $y=1$，则 $\vec{n}=(0,1,1)$，

所以，点 $B$ 到平面 $A'CD$ 的距离为 $d=\dfrac{|\overrightarrow{BA'}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，⑤错.

故答案为：①②④.

## 三、解答题（共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16.【详解】（I）由题意 $z_1\cdot\overline{z_2}=(1+i)(1+i)=1+2i+i^2=2i$；

（II）由题意 $z_1-z_2=(a-1)+2i$ 为纯虚数，则 $a-1=0$，所以 $a=1$；

（III）$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a+i}{1-i}=\dfrac{(a+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{a+ai+i+i^2}{2}=\dfrac{a-1}{2}+\dfrac{a+1}{2}i$，对应点 $(\dfrac{a-1}{2},\dfrac{a+1}{2})$，它是第二象限点，则

$\begin{cases}\dfrac{a-1}{2}<0\\ \dfrac{a+1}{2}>0\end{cases}$，解得 $-1<a<1$．故 $a$ 的范围是 $(-1,1)$．

17.【详解】（1）解：当 $t=3$ 时，$\vec{b}=(3,3,0)$，$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{3}{\sqrt{2}\times3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

因为 $0\le<\vec{a},\vec{b}>\le\pi$，故 $<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）解：对任意 $t\in\mathbf{R}$，$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=4\vec{a}^2-\vec{b}^2=4\times2-(9+t^2)=-t^2-1<0$，故 $2\vec{a}+\vec{b}$ 与 $2\vec{a}-\vec{b}$ 不垂直.

（3）解：$\lambda\vec{a}+\vec{b}=\lambda(1,0,-1)+(3,t,0)=(\lambda+3,t,-\lambda)$，因为 $\lambda\vec{a}+\vec{b}$ 与 $z$ 轴平行，则 $\begin{cases}\lambda+3=0\\ t=0\end{cases}$，解得 $\lambda=-3$，

$t=0$.

18.(1)解　$B(0,1,0)$，$N(1,0,1)$，$\therefore\overrightarrow{BN}=(1,\ -1,1)$，$\therefore|\overrightarrow{BN}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$.

(2)解　$\because A_1(1,0,2)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,0)$，$B_1(0,1,2)$，$\therefore\overrightarrow{BA_1}=(1,\ -1,2)$，$\overrightarrow{CB_1}=(0,1,2)$，

$\therefore\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{CB_1}=3$，$|\overrightarrow{BA_1}|=\sqrt{6}$，$|\overrightarrow{CB_1}|=\sqrt{5}$.　$\therefore\cos\langle\overrightarrow{BA_1},\ \overrightarrow{CB_1}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{CB_1}}{|\overrightarrow{BA_1}||\overrightarrow{CB_1}|}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

(3)证明　$\because C_1(0,0,2)$，$M\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 2\right)$，$\therefore\overrightarrow{A_1B}=(-1,1,\ -2)$，$\overrightarrow{C_1M}=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\therefore\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{C_1M}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+0=$

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

0.$\therefore \overrightarrow{A_1B}\perp\overrightarrow{C_1M}$，$\therefore A_1B\perp C_1M$.

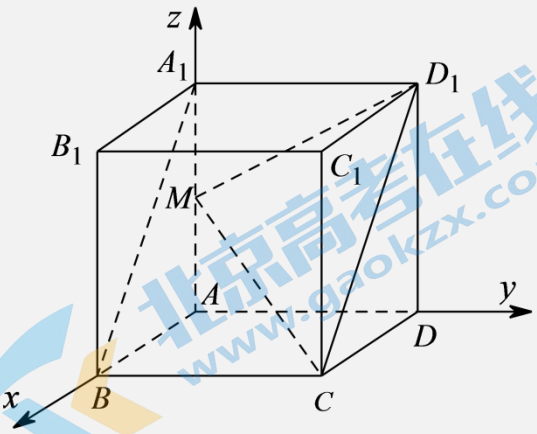
19.【详解】(1) 证明：如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$ .

因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，$M$ 是 $AA_1$ 的中点，

所以 $A(0,0,0),C(2,2,0),D(0,2,0),M(0,0,1),D_1(0,2,2),A_1(0,0,2),B(2,0,0)$，$C_1(2,2,2)$.

所以 $\overrightarrow{A_1C}=(2,2,-2),\overrightarrow{BC_1}=(0,2,2)$，

所以 $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BC_1}=2\times0+2\times2+(-2)\times2=0$，所以 $\overrightarrow{A_1C}\perp\overrightarrow{BC_1}$，即 $A_1C\perp BC_1$；




(2) 解：由 (1) 可得 $\overrightarrow{MD_1}=(0,2,1),\overrightarrow{MC}=(2,2,-1)$. 设平面 $MCD_1$ 的法向量为 $\vec{u}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{MD_1}=2y+z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{MC}=2x+2y-z=0\end{cases}$，令 $y=1$，则 $z=-2$，$x=-2$，所以 $\vec{u}=(-2,1,-2)$，

显然平面 $ADD_1A_1$ 的法向量可以为 $\vec{n}=(1,0,0)$，

设平面 $ADD_1A_1$ 与平面 $MCD_1$ 夹角为 $\theta$，所以 $\cos\theta=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{u}|}=\dfrac{2}{3}$，所以平面 $ADD_1A_1$ 与平面 $MCD_1$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{2}{3}$.

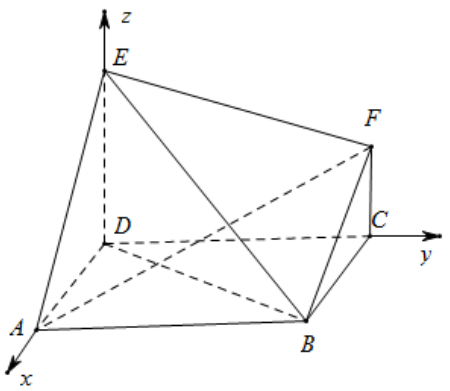
(3) 解：因为 $\overrightarrow{D_1D}=(0,0,-2)$，设点 $D$ 到平面 $MCD_1$ 的距离为 $d$，则 $d=\dfrac{|\overrightarrow{D_1D}\cdot\vec{u}|}{|\vec{u}|}=\dfrac{4}{3}$，故点 $D$ 到平面 $MCD_1$ 的距离为 $\dfrac{4}{3}$.

20.【详解】(1) 设 $G$ 为 $DE$ 的中点，连接 $FG$，$AG$，由已知 $CF//DE$，且 $CF=DG$，所以四边形 $CFGD$ 是平行四边形，又 $ABCD$ 为正方形，所以 $ABFG$ 为平行四边形，所以 $BF//AG$，又 $AG\subset$ 平面 $ADE$，$BF\not\subset$ 平面 $ADE$，所以 $BF//$ 平面 $ADE$ .

(2) 因为 $ABCD$ 为正方形，$DE\perp$ 平面 $ABCD$，以 $D$ 为坐标原点建立如图空间直角坐标系，

所以 $A(2,0,0),E(0,0,2)$，$F(0,2,1),B(2,2,0)$，$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{AE}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{AF}=(-2,2,1)$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。



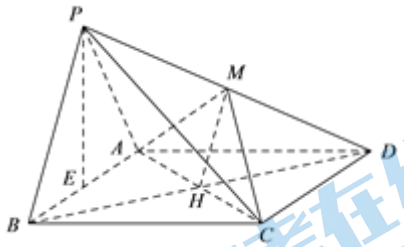

设平面 $AEF$ 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+2z=0,\\ -2x+2y+z=0.\end{cases}$

令 $z=2$，得 $x=2,y=1$.于是 $\vec{n}=(2,1,2)$.设直线 $BD$ 与平面 $AEF$ 所成角为 $\theta$，则

$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{DB}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DB}\right|}$，即 $\sin\theta=\left|\dfrac{(2,1,2)\cdot(2,2,0)}{3\times2\sqrt{2}}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以直线 $BD$ 与平面 $AEF$ 所成的角为 $\dfrac{\pi}{4}$.

21．试题解析：（I）证明：连接 $BD$ 交 $AC$ 于 $H$ 点，连接 $MH$，




因为四边形 $ABCD$ 是菱形，

所以点 $H$ 为 $BD$ 的中点.

又因为 $M$ 为 $PD$ 的中点，

所以 $MH$ // $BP$.

又因为 $BP\not\subset$ 平面 $ACM$, $MH\subset$ 平面 $ACM$.

所以 $PB$ // 平面 $ACM$.

（II）证明：因为 $\Delta PAB$ 为正三角形，$E$ 为 $AB$ 的中点，

所以 $PE\perp AB$ .

因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$PE\subset$ 平面 $PAB$，

所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$.

又因为 $AC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PE\perp AC$ .

(III) 因为 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=60°$，$E$ 是 $AB$ 的中点，

所以 $CE\perp AB$ .

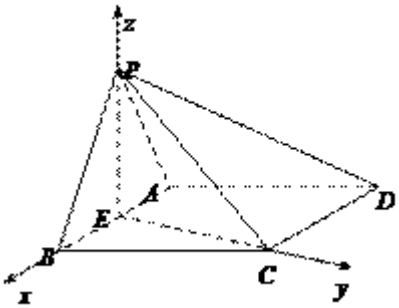
又因为 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，

以 $E$ 为原点，分别以 $EB,EC,EP$ 为 $x,y,z$ 轴，

建立空间直角坐标系 $E-xyz$，

则 $E(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，

$P(0,0,\sqrt{3})$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$D(-2,\sqrt{3},0)$.




关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

假设棱 $PD$ 上存在点 $M$，设点 $M$ 坐标为 $(x,y,z)$，$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PD}(0\le\lambda\le1)$，

则 $(x,y,z-\sqrt{3})=\lambda(-2,\sqrt{3},-\sqrt{3})$，

所以 $M(-2\lambda,\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}(1-\lambda))$，

所以 $\overrightarrow{EM}=(-2\lambda,\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}(1-\lambda))$，$\overrightarrow{EC}=(0,\sqrt{3},0)$，

设平面 $CEM$ 的法向量为 $n=(x,y,z)$，则

$\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{EM}=-2\lambda x+\sqrt{3}\lambda y+\sqrt{3}(1-\lambda)z=0 \\ n\cdot\overrightarrow{EC}=\sqrt{3}y=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} y=0 \\ 2\lambda x=\sqrt{3}(1-\lambda)z \end{cases}$.

令 $z=2\lambda$，则 $x=\sqrt{3}(1-\lambda)$，得 $n=(\sqrt{3}(1-\lambda),0,2\lambda)$.

因为 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，

所以平面 $ABCD$ 的法向量 $m=(0,0,1)$，

所以 $\cos\langle n,m\rangle=\dfrac{n\cdot m}{|n|\cdot|m|}=\dfrac{2\lambda}{\sqrt{4\lambda^2+3(1-\lambda)^2}}=\dfrac{2\lambda}{\sqrt{7\lambda^2-6\lambda+3}}$.

因为二面角 $M-EC-D$ 的大小为 $60°$，

所以 $\dfrac{2\lambda}{\sqrt{7\lambda^2-6\lambda+3}}=\dfrac{1}{2}$，

即 $3\lambda^2+2\lambda-1=0$，

解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，或 $\lambda=-1$（舍去）

所以在棱 $PD$ 上存在点 $M$，当 $\dfrac{PM}{PD}=\dfrac{1}{3}$ 时，二面角 $M-EC-D$ 的大小为 $60°$.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

微信搜一搜
京考一点通