20230607 项目第一次模拟测试卷

理科数学

本试卷共 4 页，23 小题，满分 150 分. 考试时间 120 分钟.

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填涂在答题卡上，并在相应位置贴好条形码.
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案信息涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案.
3. 非选择题必须用黑色水笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来答案，然后再写上新答案，不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答无效.
4. 考生必须保证答题卡整洁，考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.

一．选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

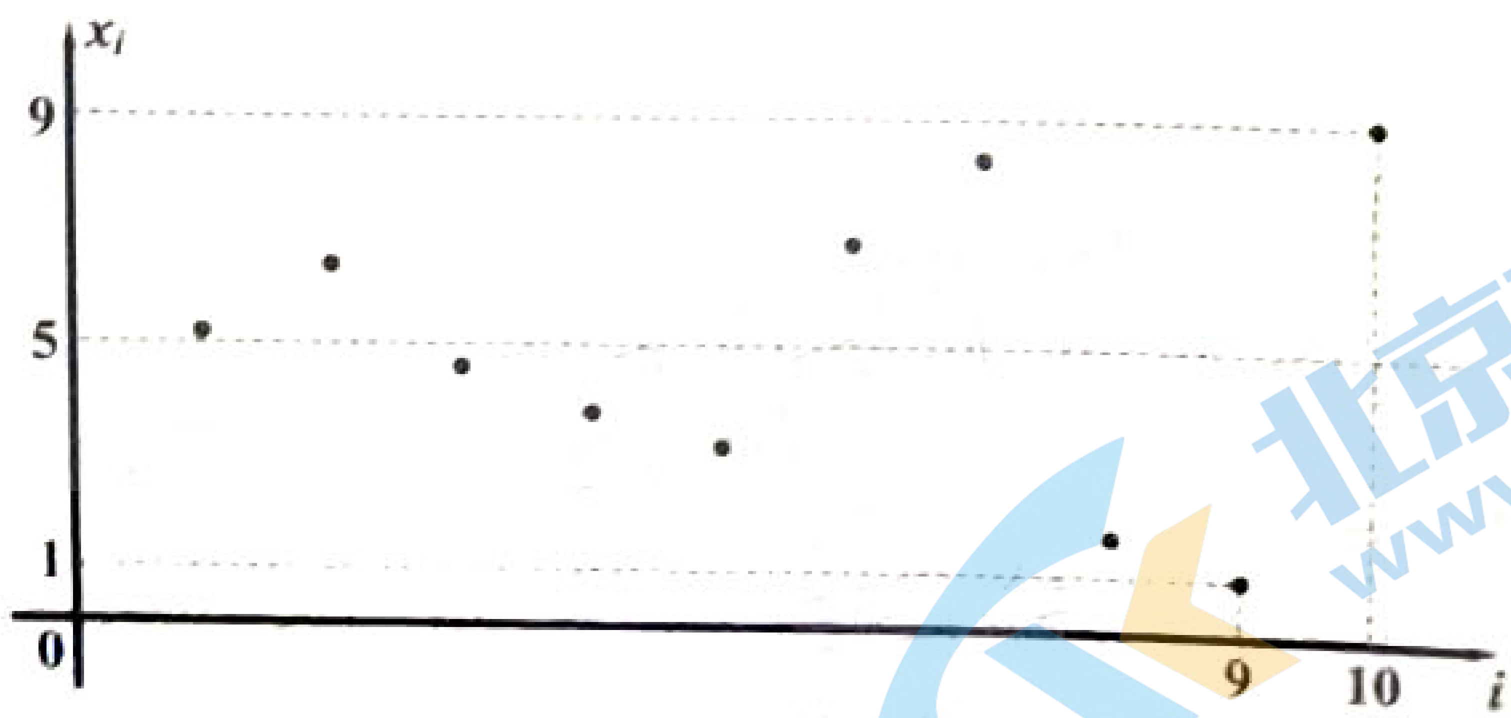
1. 已知集合 $A=\{y\mid y=x^2-4x+4, x\in \mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid y=\ln(4-x^2)\}$，则 $A\cap B=$

A. $[0,2)$　　B. $[-2,2]$　　C. $(-2,0)$　　D. $(-2,2)$

2. 设复数 z 满足 $z=\dfrac{1}{1-i}+i$，则 $|\overline{z}|=$

A. 2　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　D. $\sqrt{10}$

3. 如图，一组数据 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_9,x_{10}$ 的平均数为 5，方差为 s_1^2，去除 x_9,x_{10} 这两个数据后，平均数为 $\overline{x}$，方差为 s_2^2，则

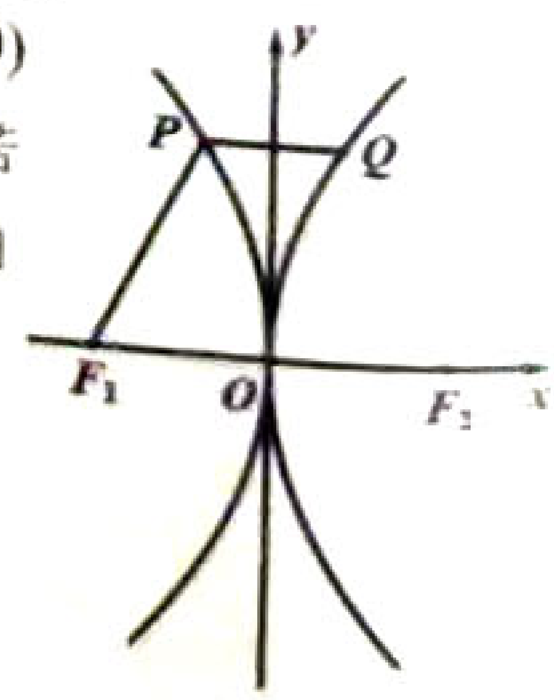


A. $\overline{x}>5$，$s_1^2>s_2^2$　　B. $\overline{x}<5$，$s_1^2<s_2^2$　　C. $\overline{x}=5$，$s_1^2<s_2^2$　　D. $\overline{x}=5$，$s_1^2>s_2^2$

4. 已知 $x>0, y>0$，则“$x+y>4$”是“$\ln x+\ln y>2\ln 2$”的

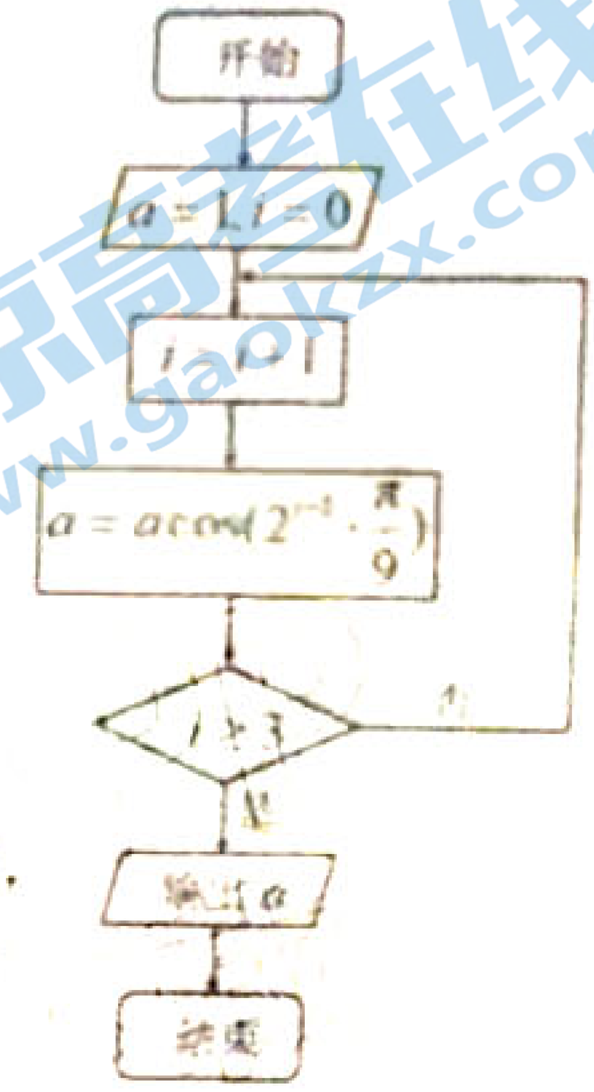
A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件
C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

5. “米”是象形字.数学探究课上，某同学用抛物线 $C_1: y^2=-2px(p>0)$ 和 $C_2: y^2=2px(p>0)$ 构造了一个类似“米”字型的图案，如图所示，若抛物线 C_1, C_2 的焦点分别为 F_1, F_2，点 P 在抛物线 C_1 上，过点 P 作 x 轴的平行线交抛物线 C_2 于点 Q，若 $PF_1=2PQ=4$，则 $p=$



A. 2　　B. 3
C. 4　　D. 6

6．执行如图所示的程序框图，则输出 a 的结果为



A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{8}$

C．$\frac{1}{16}$　　D．$\frac{1}{32}$

7．已知 $a=\log_3\frac{7}{5}, b=(\frac{26}{3})^{-\frac{1}{2}}, c=\frac{1}{2}\log_{27}9$，则

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$

C．$b<a<c$　　D．$c<a<b$

8．圆锥 OO_1 的底面半径为 1，母线长为 2，ΔOAB 是圆锥 OO_1 的轴截面，F 是 OA 的中点，E 为底面圆周上的一个动点（异于 A，B 两点），则下列说法正确的是

A．存在点 E，使得 $EF\perp EB$　　B．存在点 E，使得 $EF//OB$

C．$OB//$ 平面 EFO_1　　D．三棱锥 $F-ABE$ 体积最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

9．二项式定理，又称牛顿二项式定理，由艾萨克•牛顿提出．二项式定理可以推广到任意实数次幂，即广义二项式定理：

对于任意实数 α，$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}\cdot x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\cdot x^k+\ldots$

当 $|x|$ 比较小的时候，取广义二项式定理展开式的前两项可得：$(1+x)^{\alpha}\approx1+\alpha\cdot x$，并且 $|x|$ 的值越小，所得结果就越接近真实数据.用这个方法计算 $\sqrt{5}$ 的近似值，可以这样操作：$\sqrt{5}=\sqrt{4+1}=\sqrt{4(1+\frac{1}{4})}=2\sqrt{1+\frac{1}{4}}\approx2\times(1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4})=2.25$．用这样的方法，估计 $\sqrt[3]{25}$ 的近似值约为

A．2.922　　B．2.926　　C．2.928　　D．2.930

10．已知一簇圆 $C_n:(x-a_n)^2+(y-2a_n)^2=a_n^{\,2}(a_n\neq0)$，直线 $l:y=kx+b$ 是它们的一条公切线，则 $k+b=$

A．$\frac{3}{4}$　　B．1　　C．$\frac{5}{4}$　　D．2

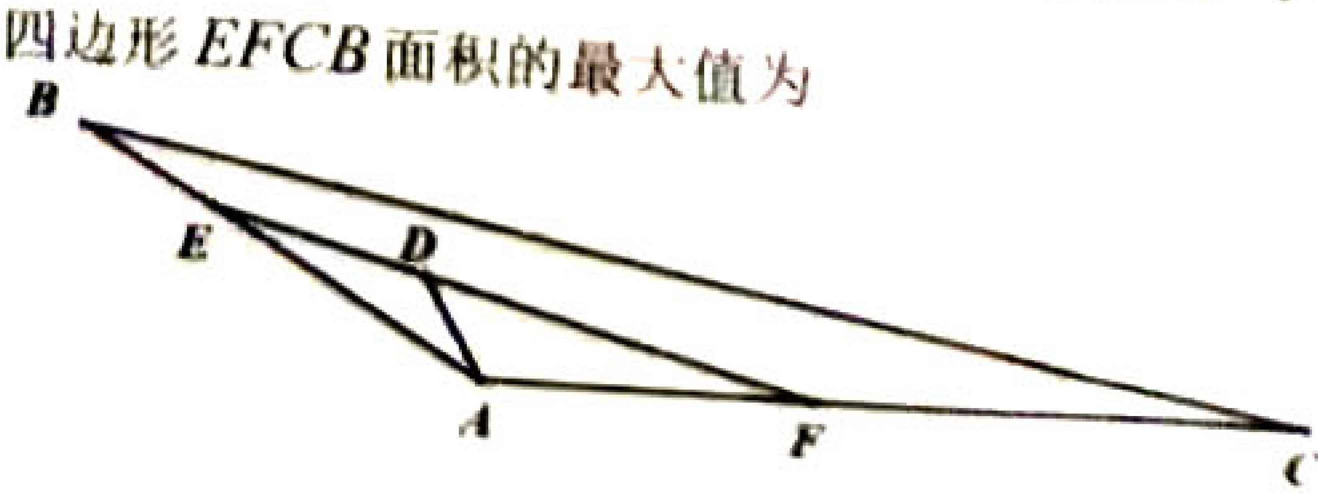
11．已知函数 $f(x)=(x-1)^{\frac{3}{5}}+\frac{1}{2}$，若对于任意的 $x\in[2,3]$，不等式 $f(x)+f(a-2x)\leq1$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是

A．$(-\infty,2)$　　B．$(-\infty,2]$　　C．$(-\infty,4)$　　D．$(-\infty,4]$

12．如图，一块三角形铁片 ABC，已知 $AB=4, AC=4\sqrt{3}, \angle BAC=\frac{5\pi}{6}$，现在这块铁片中间发现一个小洞，记为点 D，$AD=1$，$\angle BAD=\frac{\pi}{6}$．如果过点 D 作一条直线分别交 AB,AC 于点 E,F，并沿直线 EF 裁掉 ΔAEF，则剩下的四边形 $EFCB$ 面积的最大值为

A．$3\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{3}$

C．$\sqrt{6}$　　D．$\sqrt{3}$



二．填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $\vec{a}=(m,-2)$，$\vec{b}=(1,1)$，若 $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$，则 $m=$ ________.

14. 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{4a^2}=1(a>0)$ 的渐近线方程为 ________.

15. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为梯形，$AB\,//\,DC$，$AB=2CD$，点 M 在侧棱 PC 上，点 Q 在侧棱 AP 上运动，若三棱锥 $M-BDQ$ 的体积为定值，则 $\dfrac{PM}{MC}=$ ________.

16. 潮汐现象是地球上的海水在太阳和月球双重引力作用下产生的全球性的海水的周期性变化，人们可以利用潮汐进行港口货运.某港口具体时刻 t（单位：小时）与对应水深 y（单位：米）的函数关系式为 $y=3\sin\dfrac{\pi}{6}t+10(0\le t\le 24)$.某艘大型货船要进港，其相应的吃水深度（船底与水面的距离）为 7 米，船底与海底距离不小于 4.5 米时就是安全的，该船于 2 点开始卸货（一次卸货最长时间不超过 8 小时），同时吃水深度以 0.375 米/小时的速度减少，该船 8 小时内没有卸完货，要及时驶入深水区域，则该船第一次停止卸货的时刻为________.

三．解答题：共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答；第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_4=64$，且 $a_na_{n+2}=ka_{n+1}^2$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

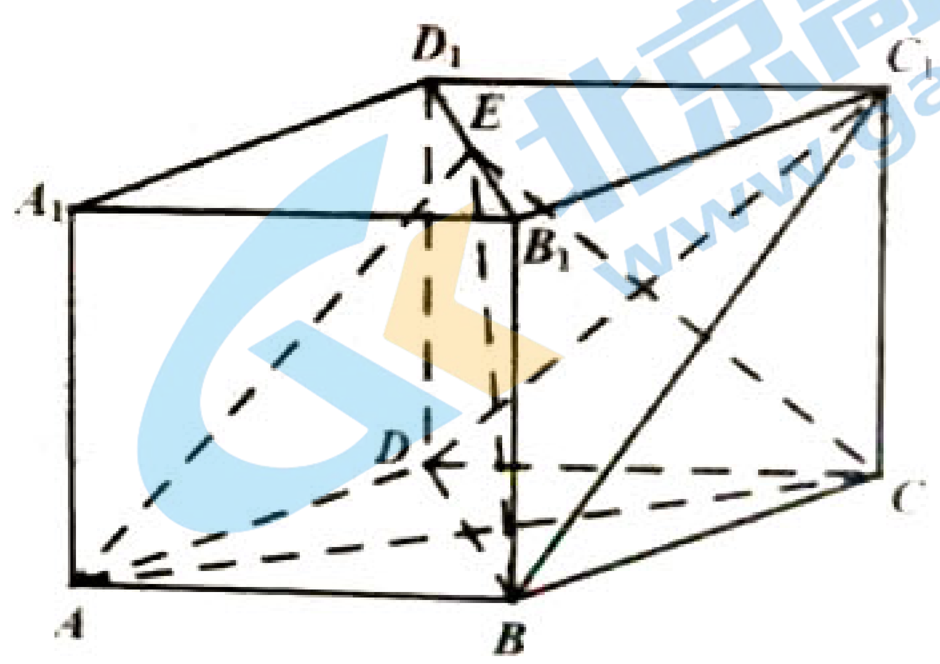
（1）求 k 的值；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18.（12 分）已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 为菱形，且 $AB=AD=BD=2$，$AA_1=\sqrt{3}$，点 E 为 B_1D_1 的中点.

（1）证明：$AE\,//$ 平面 BDC_1；

（2）求二面角 $B-AE-C$ 的余弦值.



19.（12 分）已知函数 $f(x)=(x-a)^2+be^x\ (a,b\in\mathbf{R})$.

（1）若 $a=0$ 时，函数 $y=f(x)$ 有 3 个零点，求 b 的取值范围；

（2）若 $a>0,b=\dfrac{2}{e}$，方程 $f(x)=3$ 有解，求 a 的取值范围.

20.（12分）某班准备购买班服，确定从 A,B 两种款式中选出一种统一购买，现在全班50位同学赞成购买 A,B 款式的人数分别为20,30位，为了尽量统一意见，准备在全班进行三轮宣传，每轮宣传从全班同学中随机选出一位，介绍他赞成款式的理由，假设每轮宣传后，赞成该同学所选款式的不会改变意见，不赞成该同学所选款式的同学会有5位改变意见，赞成该同学所选款式.

（1）计算第二轮选到的同学赞成 A 款式的概率.

（2）设经过三轮宣传后赞成 A 款式的人数为 X，求随机变量 X 的期望.

21.（12分）已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b\ge 1)$ 过 $A(-4,0)$, $A_1(0,1)$, $A_2(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$, $A_3(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ 四个点中的三个点.

（1）求椭圆 E 的方程;

（2）过点 $B(-\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2})$ 的直线与椭圆 E 交于 P,Q 两点，直线 AP,AQ 分别交椭圆 E 于 M,N 两点，求直线 MN 的斜率.

（二）选考题：共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（10分）选修4-4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+t\cos\alpha,\\ y=-3+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$.

（1）当 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 时，求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

（2）直线 l 与曲线 C 交于 A，B 两点，若 $|AB|=2$，求 $\sin 2\alpha$ 的值.

23.（10分）选修4-5：不等式选讲

已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=ab$.

（1）求证：$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\ge\dfrac{1}{2}$;

（2）求 $M=|2a-1|+|3b-1|$ 的最小值.

密

封

线

20230607 项目第一次模拟测试卷

理科数学 参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	D	B	D	B	B	C	B	A	D	A

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分．

13．2　　　　14．$2x\pm y=0$　　　　15．2　　　　16．6 时

三．解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 题-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22 题、23 题为选考题，考生根据要求作答．

17．【解析】(1) 因为 $a_na_{n+2}=ka_{n+1}^{\ 2}\ (n\in\mathrm{N}^*)$，所以 $\begin{cases}a_1a_3=ka_2^{\ 2}\\a_2a_4=ka_3^{\ 2}\end{cases}$，……………… 2 分

因为 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_4=64$，所以 $\begin{cases}a_3=4k\\a_2a_4=16k^3\end{cases}$，

则 $k^3=8$，所以 $k=2$；…………………………………………………… 5 分

(2) 因为 $k=2$，所以 $a_na_{n+2}=2a_{n+1}^{\ 2}$，则 $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=2\cdot\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，…………………… 6 分

令 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，所以 $b_{n+1}=2b_n$，则 $\{b_n\}$ 是等比数列，

因为 $b_1=\dfrac{a_2}{a_1}=2$，$q=2$，所以 $b_n=b_1q^{n-1}=2^n$，所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2^n$，……………… 9 分

则 $a_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\times\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\times\cdots\times\dfrac{a_2}{a_1}\times a_1$

$=2^{n-1}\times2^{n-2}\times\cdots\times2^2\times2^1\times1=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$．…………………………………… 12 分

18．【解析】(1) 连接 AC 交 BD 于点 F，连接 C_1F，

在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 $AA_1\mathop{\underline{/\!/}}CC_1$，

所以四边形 AA_1C_1C 为平行四边形，即 $AC\mathop{\underline{/\!/}}A_1C_1$，………………… 2 分

又因为底面 $ABCD$ 为棱形，所以点 F 为 AC 的中点，

点 E 为 B_1D_1 的中点，

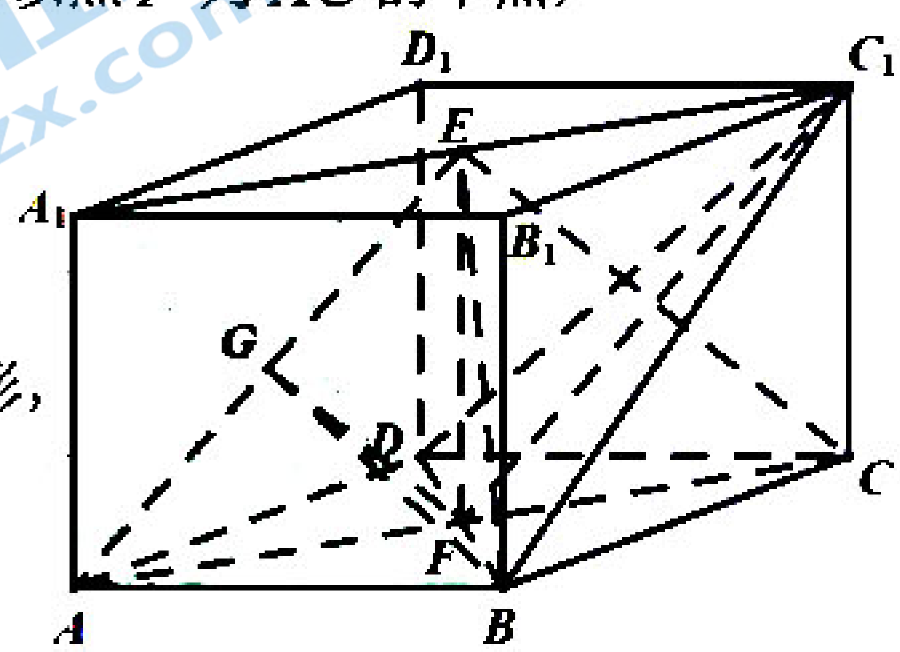
即点 E 为 A_1C_1 的中点，

所以 $C_1E\mathop{\underline{/\!/}}AF$，

即四边形 AFC_1E 为平行四边形，

所以 $AE\,/\!/\,C_1F$，…………… 4 分

因为 $C_1F\subseteq$ 平面 BDC_1，



所以 $AE\parallel$ 平面 BDC_1；　　　　…………………………………………… 6 分

（2）方法一：取 AE 的中点 G，连接 EF，BG，FG，

在直棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $AA_1\perp BD$，

又因为 $AC\perp BD$，所以 $BD\perp$ 平面 AA_1C_1C，则 $BD\perp AE$

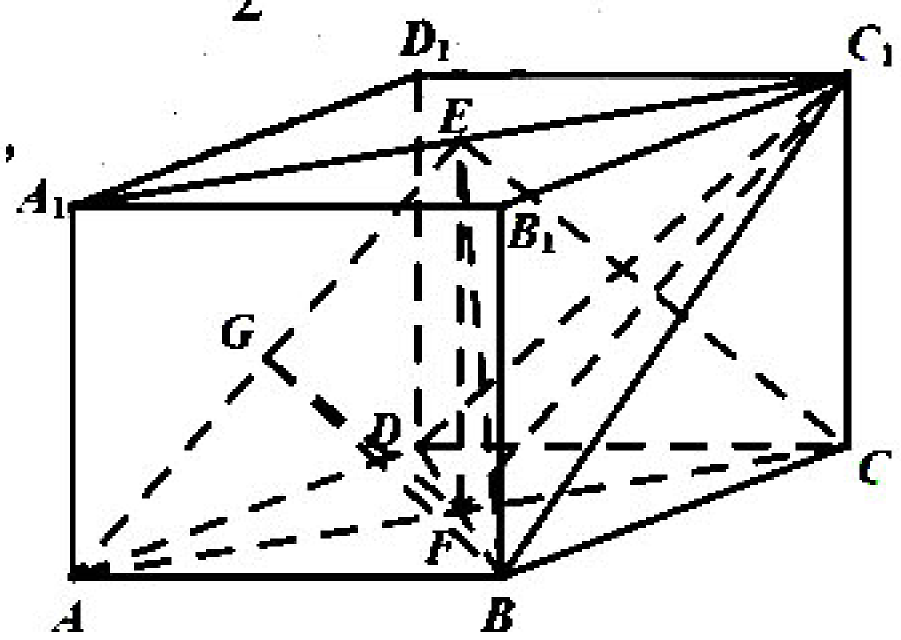
因为在 ΔABD 中，$AB=AD=BD=2$，且点 F 为 BD 的中点，所以 $AF=\sqrt{3}$，

又 $EF=AA_1=\sqrt{3}$，而点 G 为 AE 的中点，所以 $FG\perp AE$，

所以 $AE\perp$ 平面 BFG，即 $BG\perp AE$，

则 $\angle BGF$ 为二面角 $B-AE-C$ 的平面角，　　　　……………………………9 分

在等腰直角三角形 AEF 中，$FG=\dfrac{1}{2}AE=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，又 $BF=\dfrac{1}{2}BD=1$，



在直角三角形 BFG 中 $BG=\sqrt{BF^2+FG^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，

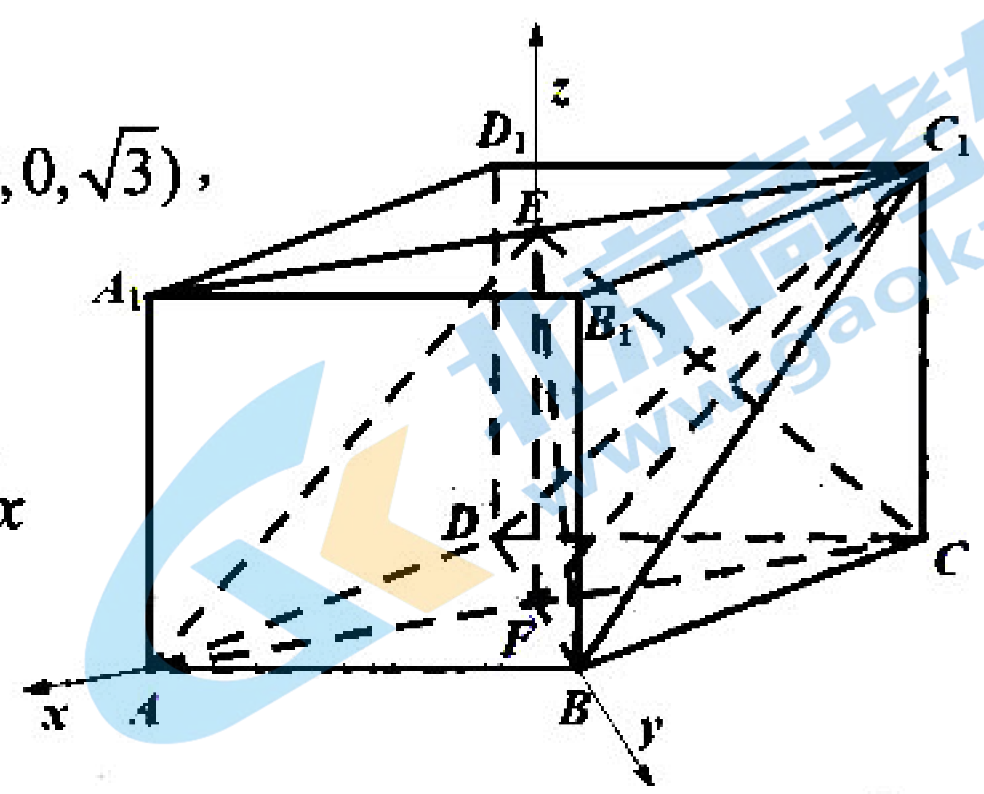
所以 $\cos\angle BGF=\dfrac{FG}{BG}=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{10}}{2}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

即二面角 $B-AE-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.　　　　……………………………12 分

方法二：如图，以 FA，FB，FE 分别为分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，

因为在 ΔABD 中，$AB=AD=BD=2$，且点 F 为 BD 的中点，

所以 $AF=\sqrt{3}$，$EF=AA_1=\sqrt{3}$，



则 $A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$E(0,0,\sqrt{3})$，

因为 $\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{BE}=(0,-1,\sqrt{3})$，

设 $\vec{m}=(x,y,z)$ 为平面 BAE 的法向量，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0\\ -y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}y=\sqrt{3}x\\ z=x\end{cases}$

令 $x=1$，则 $\vec{m}=(1,\sqrt{3},1)$，

平面 CAE 的法向量 $\vec{n}=\overrightarrow{FB}=(0,1,0)$，　　　　………………………… 10 分

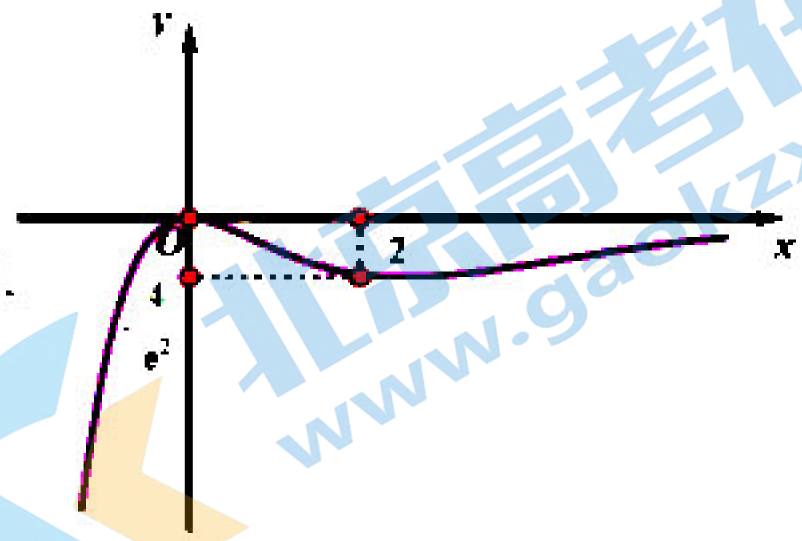
设二面角 $B-A_1C_1-D$ 为 θ，

则 $\cos\theta=\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{1\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.　　　　………………………… 12 分

19.【解析】（1）函数 $y=f(x)$ 有 3 个零点，即 $f(x)=0$ 有 3 个根，

也即 $b=-\dfrac{x^2}{e^x}$ 有 3 个根，即 $y=b$ 与 $g(x)=-\dfrac{x^2}{e^x}$ 的图象有三个交点；　……… 2 分

$g'(x)=\dfrac{x(x-2)}{e^x}$，故 $g'(x)<0$ 解得 $0<x<2$；



故 $g'(x)>0$ 解得 $x<0$ 或 $x>2$，

即 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 递增，在 $(0,2)$ 递减，在 $(2,+\infty)$ 递增.

又 $g(0)=0$，$g(2)=-\dfrac{4}{e^2}$，$x>0$, 时 $g(x)<0$；

即 $-\dfrac{4}{e^2}<b<0$；　………………………………………………… 5 分

（2）即 $(x-a)^2+\dfrac{2}{e}\cdot e^x-3=0$ 有解.

设 $h(x)=(x-a)^2+2e^{x-1}-3$，则 $h'(x)=2(x-a)+2e^{x-1}$，

设 $m(x)=2(x-a)+2e^{x-1}$，则 $m'(x)=2+2e^{x-1}>0$ 恒成立，故 $m(x)$ 在 R 单调递增，

又 $m(-1)=2(-1-a+e^{-2})<0, m(a)=2e^{a-1}>0$，

且存在唯一的 x_0，使得 $m(x_0)=h'(x_0)=2(x_0-a)+2e^{x_0-1}=0$，

所以 $x_0-a=-e^{x_0-1}$，　………………………………………………… 8 分

且 $x>x_0$ 时，$h'(x)>0$；$x<x_0$ 时，$h'(x)<0$.

即 $h(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 递减，在 $(x_0,+\infty)$ 递增，$x\to-\infty$ 时 $h(x)\to+\infty$，$x\to+\infty$ 时 $h(x)\to+\infty$，故要使得 $h(x)=0$ 有解，只需 $h(x)_{\min}\le 0$，

故 $h(x)_{\min}=h(x_0)=(x_0-a)^2+2e^{x_0-1}-3=e^{2(x_0-1)}+2e^{x_0-1}-3=(e^{x_0-1}+3)(e^{x_0-1}-1)\le 0$

故 $e^{x_0-1}\le 1$，解得 $x_0\le 1$，　………………………………………………… 10 分

而 $a=x_0+e^{x_0-1}$ 在 $x_0\in(-\infty,1]$ 上单调递增，故 $a\le 1+1=2$, 又因为 $a>0$，故 a 的取值范围为 $0<a\le 2$.　………………………………………………… 12 分

20.【解析】记第 i 轮宣传选中的同学是赞成 A 款式的事件为 A_i，

第 i 轮宣传选中的同学是赞成 B 款式的事件为 B_i，

（1）记第二轮选到的同学赞成 A 款式的概率为 $P(A_2)$，

因为 $P(A_1A_2)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{5}$，　………………………………… 2 分

$P(B_1A_2)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{15}{50}=\dfrac{9}{50}$，　………………………………… 4 分

则 $P(A_2)=P(A_1A_2)+P(B_1A_2)=\dfrac{1}{5}+\dfrac{9}{50}=\dfrac{19}{50}$；　……………………………… 5 分

（2）经过三轮宣传后赞成 A 款式的人数为 X 的所有可能取值为 $5,15,25,35$，

则 $P(X=5)=P(B_1B_2B_3)=\dfrac{30}{50}\times\dfrac{35}{50}\times\dfrac{40}{50}=\dfrac{42}{125}$，

$P(X=15)=P(A_1B_2B_3)+P(B_1A_2B_3)+P(B_1B_2A_3)$

$$=\frac{20}{50}\times\frac{25}{50}\times\frac{30}{50}+\frac{30}{50}\times\frac{15}{50}\times\frac{30}{50}+\frac{30}{50}\times\frac{35}{50}\times\frac{10}{50}=\frac{39}{125},$$

$P(X=25)=P(B_1A_2A_3)+P(A_1B_2A_3)+P(A_1A_2B_3)$

$$=\frac{30}{50}\times\frac{15}{50}\times\frac{20}{50}+\frac{20}{50}\times\frac{25}{50}\times\frac{20}{50}+\frac{20}{50}\times\frac{25}{50}\times\frac{20}{50}=\frac{29}{125}$$

$P(X=35)=P(A_1A_2A_3)=\frac{20}{50}\times\frac{25}{50}\times\frac{30}{50}=\frac{3}{25}$ ……………………………… 9 分

所以分布列为

X	5	15	25	35
P	$\frac{42}{125}$	$\frac{39}{125}$	$\frac{29}{125}$	$\frac{3}{25}$

所以 $EX=5\times\frac{42}{125}+15\times\frac{39}{125}+25\times\frac{29}{125}+35\times\frac{3}{25}=\frac{409}{25}$. …………………… 12 分

21.【解析】(1) 根据椭圆的对称性可知，

由于 $A_2(1,\frac{\sqrt{3}}{2}),A_3(-1,\frac{\sqrt{3}}{2})$ 关于 y 轴对称，必同时在椭圆上， ………… 1 分

若椭圆还经过点 $A_1(0,1)$，则 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$，将点 $A_2(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$ 代入，求得 $a=2$，

可得椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$； ……………………………………… 3 分

若椭圆还经过点 $A(-4,0)$，可得 $b^2=\frac{4}{5}<1$，不合题意，舍去.

则椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………… 5 分

(2) 方法一：设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2),M(x_3,y_3),N(x_4,y_4)$,

设直线 PQ 的方程为 $x=my+t$，

由于直线 PQ 过点 $(-\frac{5}{2},\frac{3}{2})$，则有 $3m+2t=-5$.

设直线 AP 的方程为 $x=\frac{x_1+4}{y_1}y-4$

联立 $\begin{cases}x=\frac{x_1+4}{y_1}y-4\\ x^2+4y^2=4\end{cases}\Rightarrow\left[(\frac{x_1+4}{y_1})^2+4\right]y^2-\frac{8(x_1+4)}{y_1}y+12=0$

所以 $y_1y_3=\dfrac{12}{(\dfrac{x_1+4}{y_1})^2+4}=\dfrac{12y_1^2}{(x_1+4)^2+4y_1^2}=\dfrac{12y_1^2}{8x_1+20}=\dfrac{3y_1^2}{2x_1+5}$，

同理 $y_2y_4=\dfrac{3y_2^2}{2x_2+5}$，进一步可得 $y_3=\dfrac{3y_1}{2x_1+5}$，$y_4=\dfrac{3y_2}{2x_2+5}$.…………… 9 分

直线 MN 的斜率为 $\dfrac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=\dfrac{\dfrac{3y_1}{2x_1+5}-\dfrac{3y_2}{2x_2+5}}{\dfrac{x_1+4}{y_1}y_3-\dfrac{x_2+4}{y_2}y_4}=\dfrac{\dfrac{3y_1}{2x_1+5}-\dfrac{3y_2}{2x_2+5}}{\dfrac{x_1+4}{y_1}\cdot\dfrac{3y_1}{2x_1+5}-\dfrac{x_2+4}{y_2}\cdot\dfrac{3y_2}{2x_2+5}}$

$=\dfrac{y_1(2x_2+5)-y_2(2x_1+5)}{(x_1+4)(2x_2+5)-(x_2+4)(2x_1+5)}$

$=-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{(2t+5)(y_1-y_2)}{m(y_1-y_2)}=1$. …………………… 12 分

方法二：因为 $A(-4,0),P(x_1,y_1),M(x_3,y_3)$ 三点共线，

则直线 PM 的方程为 $y=\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}(x+4)$，

且将 $P(x_1,y_1)$ 代入直线，整理可得 $x_3y_1-x_1y_3=-4(y_1-y_3)$ ……(1) …… 6 分

由于 $P(x_1,y_1),M(x_3,y_3)$ 均在椭圆上，代入可得

$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2=1\\ \dfrac{x_3^2}{4}+y_3^2=1\end{cases}$，所以 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2y_3^2}{4}+y_1^2y_3^2=y_3^2\\ \dfrac{x_3^2y_1^2}{4}+y_1^2y_3^2=y_1^2\end{cases}$

将两式相减可得 $\dfrac{(x_3y_1-x_1y_3)(x_3y_1+x_1y_3)}{4}=y_1^2-y_3^2$，

所以 $x_3y_1+x_1y_3=\dfrac{4(y_1^2-y_3^2)}{x_3y_1-x_1y_3}=-(y_1+y_3)$ …………(2) ……………… 8 分

则 (1)+(2) 式可得：$2x_3y_1=3y_3-5y_1\Rightarrow y_1=\dfrac{3y_3}{2x_3+5}$

由 (1)−(2) 式可得：

$2x_1y_3=3y_1-5y_3=\dfrac{9y_3}{2x_3+5}-5y_3\Rightarrow 2x_1=\dfrac{9}{2x_3+5}-5\Rightarrow x_1=\dfrac{-5x_3-8}{2x_3+5}$

直线 PB 的斜率为 $\dfrac{y_1-\dfrac{3}{2}}{x_1+\dfrac{5}{2}}=\dfrac{\dfrac{3y_3}{2x_3+5}-\dfrac{3}{2}}{\dfrac{-5x_3-8}{2x_3+5}+\dfrac{5}{2}}=\dfrac{2y_3-2x_3-5}{3}$，

同理直线 QB 的斜率为 $\dfrac{2y_4-2x_4-5}{3}$， ………………………………… 10 分

而 $k_{PA}=k_{QA}$，所以 $\dfrac{2y_3-2x_3-5}{3}=\dfrac{2y_4-2x_4-5}{3}$，则 $y_3-x_3=y_4-x_4$.

那么 $k_{MN}=\dfrac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=1$. ………………………………… 12 分

方法三：设 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{QA}=\mu\overrightarrow{AN}$，

则 $\begin{cases}x_A=\dfrac{x_P+\lambda x_M}{1+\lambda}=-4\\ y_A=\dfrac{y_P+\lambda y_M}{1+\lambda}=0\end{cases}$，$\begin{cases}x_A=\dfrac{x_Q+\mu x_N}{1+\mu}=-4\\ y_A=\dfrac{y_Q+\mu y_N}{1+\mu}=0\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x_P+\lambda x_M=-4(1+\lambda)\\ y_P+\lambda y_M=0\end{cases}$，$\begin{cases}x_Q+\mu x_N=-4(1+\mu)\\ y_Q+\mu y_N=0\end{cases}$， …………………… 7 分

因为 P,M 均在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上，

所以 $\begin{cases}x_M^2+4y_M^2=4\cdots\cdots(1)\\ x_P^2+4y_P^2=4\cdots\cdots(2)\end{cases}$，

由 $(1)\cdot\lambda^2-(2)$ 得：$\lambda^2x_M^2-x_P^2=4(\lambda^2-1)$，

即 $(\lambda x_M-x_P)(\lambda x_M+x_P)=4(\lambda-1)(\lambda+1)$，

又因为 $x_P+\lambda x_M=-4(1+\lambda)$，所以 $\lambda x_M-x_P=1-\lambda$，所以 $\begin{cases}x_P=\dfrac{-5-3\lambda}{2}\\ x_M=\dfrac{-5\lambda-3}{2\lambda}\end{cases}$，

同理可得：$\begin{cases}x_Q=\dfrac{-5-3\mu}{2}\\ x_N=\dfrac{-5\mu-3}{2\mu}\end{cases}$， ………………………………………… 9 分

因为 P,Q,B 三点共线，所以 $\dfrac{y_P-\frac{3}{2}}{x_P+\frac{5}{2}}=\dfrac{y_Q-\frac{3}{2}}{x_Q+\frac{5}{2}}$，

则 $y_Px_Q+\dfrac{5}{2}y_P-\dfrac{3}{2}x_Q=x_Py_Q+\dfrac{5}{2}y_Q-\dfrac{3}{2}x_P$，

所以 $\dfrac{-5-3\mu}{2}y_P+\dfrac{5}{2}y_P-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{-5-3\mu}{2}=\dfrac{-5-3\lambda}{2}y_Q+\dfrac{5}{2}y_Q-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{-5-3\lambda}{2}$，

所以 $-\mu y_P+\lambda y_Q=-\dfrac{3}{2}(\mu-\lambda)$，

所以 MN 的斜率 $k_{MN}=\dfrac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\dfrac{-\dfrac{y_P}{\lambda}+\dfrac{y_Q}{\mu}}{\dfrac{3}{2}(\dfrac{1}{\mu}-\dfrac{1}{\lambda})}=\dfrac{-\mu y_P+\lambda y_Q}{\dfrac{3}{2}(\lambda-\mu)}=\dfrac{-\dfrac{3}{2}(\mu-\lambda)}{\dfrac{3}{2}(\lambda-\mu)}=1$.

……………………………………………………………… 12 分

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.【解析】(1) 当 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 时，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+\dfrac{1}{2}t\\ y=-3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），

消去参数 t 得 $\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}-3=0$，

即直线 l 的普通方程为 $\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}-3=0$. ………………………………… 2 分

$\because \rho=4\cos\theta$，$\therefore \rho^2=4\rho\cos\theta$，$\because x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，$\therefore x^2+y^2=4x$，

则曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4x=0$. ………………………………… 5 分

(2) 将直线 l 的参数方程代入到曲线 C 的直角坐标方程中得

$(-1+t\cos\alpha)^2+(-3+t\sin\alpha)^2=4(-1+t\cos\alpha)$，

化简得 $t^2-6(\sin\alpha+\cos\alpha)t+14=0$，

设 A，B 两点对应的参数为 t_1，t_2，

则 $t_1+t_2=6(\sin\alpha+\cos\alpha)$，$t_1t_2=14$， ………………………………… 8 分

因为直线 l 过点 $P(-1,-3)$，

则 $|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{36(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-56}=\sqrt{36\sin 2\alpha-20}=2$，

解得 $\sin 2\alpha=\dfrac{2}{3}$. ………………………………… 10 分

23.【解析】(1) 因为 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=ab$，$\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$

又 $\because \sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}{2}}\ge\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{2}$， ………………………………… 3 分

$\therefore \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\ge\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b})^2=\dfrac{1}{2}$.

当且仅当 $a=b=2$ 时等号成立. ………………………………… 5 分

(2) 因为 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=ab$，$\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$，$\therefore a>1$，$b>1$，

所以 $M=|2a-1|+|3b-1|\ge 2a+3b-2$， ………………………………… 7 分

$$=(2a+3b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})-2=(2+3+\frac{3b}{a}+\frac{2a}{b})-2\geq 3+2\sqrt{6},$$

当且仅当$\frac{3b}{a}=\frac{2a}{b}$时等号成立，所以$M$最小值为$2\sqrt{6}+3$. ·············· 10分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。