姓名________________ 座位号________________

（在此卷上答题无效）

绝秘 ★ 启用前

2023届安徽省“江南十校”联考

数　学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、班级、考场号和座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3<0\}$，$B=\{x|2^{x-2}>1\}$，则 $A\cap(\complement_R B)=$（　　）

A. $\{x|1<x\le 2\}$　　B. $\{x|2\le x<3\}$　　C. $\{x|-1<x\le 2\}$　　D. $\{x|1<x<3\}$

2. 设i为虚数单位，复数 $z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则 z 在复平面内对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{3\pi}{4}$，且 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=3$，则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$（　　）

A. $3\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{26}$　　D. $5\sqrt{2}$

4. 安徽徽州古城与四川阆中古城、山西平遥古城、云南丽江古城被称为中国四大古城．徽州古城中有一古建筑，其底层部分可近似看作一个正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$．已知该正方体中，点 E，F 分别是棱 AA_1，CC_1 的中点，过 D_1，E，F 三点的平面与平面 $ABCD$ 的交线为 l，则直线 l 与直线 AD_1 所成角为（　　）

A. $\dfrac{\pi}{3}$　　B. $\dfrac{\pi}{6}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

5. 为庆祝中国共产党第二十次全国代表大会胜利闭幕，某高中举行“献礼二十大”活动，高三年级派出甲、乙、丙、丁、戊5名学生代表参加，活动结束后5名代表排成一排合影留念，要求甲、乙两人不相邻且丙、丁两人必须相邻，则不同的排法共有（　　）种．

A. 40　　B. 24　　C. 20　　D. 12

6. 已知函数 $f(x)=\cos(x+\dfrac{\pi}{2})\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$，则下列说法正确的是（　　）

A. 点 $(-\dfrac{\pi}{8},0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心　　B. 点 $(\dfrac{\pi}{8},\dfrac{\sqrt{2}}{4})$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心

C. 直线 $x=\dfrac{5\pi}{8}$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称轴　　D. 直线 $x=\dfrac{3\pi}{8}$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称轴

7. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 底面 ABC，$CA=CB=AP=2$，$\angle ACB=\frac{2\pi}{3}$，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为（　　）

A. 25π　　B. 20π　　C. 16π　　D. 12π

8. 已知 $a=e^{0.9}+1, b=\frac{29}{10}, c=\ln(0.9e^3)$，则 a,b,c 的大小关系为（　　）

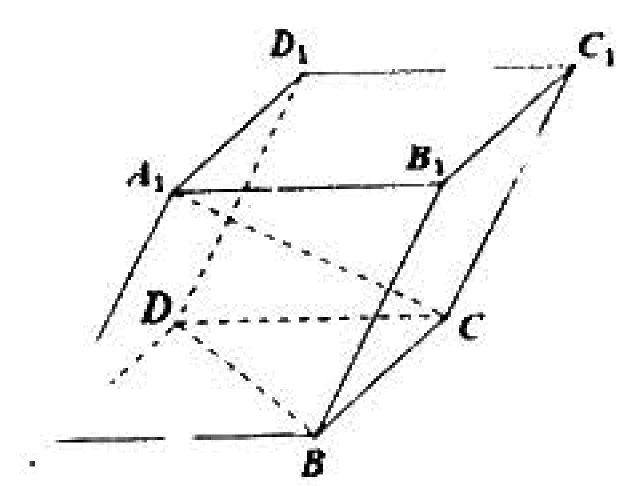
A. $a>c>b$　　B. $c>b>a$　　C. $b>a>c$　　D. $a>b>c$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x)=x^3-x(x\in\mathbf{R})$，则（　　）

A. $f(x)$ 是奇函数　　B. $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})$ 和 $(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$

C. $f(x)$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$　　D. $f(x)$ 的极值点为 $(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{9}),(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{9})$



10. 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AB=AD=AA_1=1$，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle BAD=60^\circ$，则（　　）

（第 10 题图）

A.直线 A_1C 与 BD 所成的角为 90°　　B.线段 A_1C 的长度为 $\sqrt{3}$

C.直线 A_1C 与 BB_1 所成的角为 90°　　D.直线 A_1C 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

11. 已知 O 为坐标原点，点 $A(2a,0)$，$B(2a,2a^2)(a\neq 0)$，线段 AB 的中点 M 在抛物线 $C:x^2=2py\ (p>0)$ 上，连接 OB 并延长，与 C 交于点 N，则（　　）

A. C 的准线方程为 $y=-\frac{1}{2}$　　B.点 B 为线段 ON 的中点

C.直线 AN 与 C 相切　　D. C 在点 M 处的切线与直线 ON 平行

12. 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，若 $f(x+3)=g(-x)+4$，$f'(x)+g'(1+x)=0$，且 $g(2x+1)$ 为偶函数，则（　　）

A. $g'(1)=0$　　B.函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称

C.函数 $f'(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称　　D. $\sum_{k=1}^{2023} f'(k)g'(k)=1$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $(3+x)\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中，常数项为________（用数字作答）.

14. 已知圆 $C:(x-3)^2+y^2=25$，直线 $l:(m+1)x+(m-1)y-2=0$（m 是参数），则直线 l 被圆 C 截得的弦长的最小值为________.

15. 已知直线 l 与椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 交于 M，N 两点，线段 MN 中点 P 在直线

$x=-1$上，且线段MN的垂直平分线交x轴于点$Q(-\frac{3}{4},0)$，则椭圆E的离心率是

16. 若过点$P(1,m)(m\in \mathbf{R})$有3条直线与函数$f(x)=xe^x$的图象相切，则m的取值范围是

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （10分）

在平面直角坐标系Oxy中，锐角α，β的顶点与坐标原点O重合，始边与x轴的非负半轴重合，终边与单位圆O的交点分别为P，Q. 已知点P的纵坐标为$\frac{4\sqrt{3}}{7}$，点Q的横坐标为$\frac{13}{14}$.

（1）求$\cos(\alpha-\beta)$的值；

（2）记ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c.

请从下面两个问题中任选一个作答，如果多选，则按第一个解答计分.

①若$C=\alpha-\beta$，且$c=2$，求ΔABC周长的最大值.

②若$A=\alpha$，$B=\beta$，且$c=11$，求ΔABC的面积.

18. （12分）

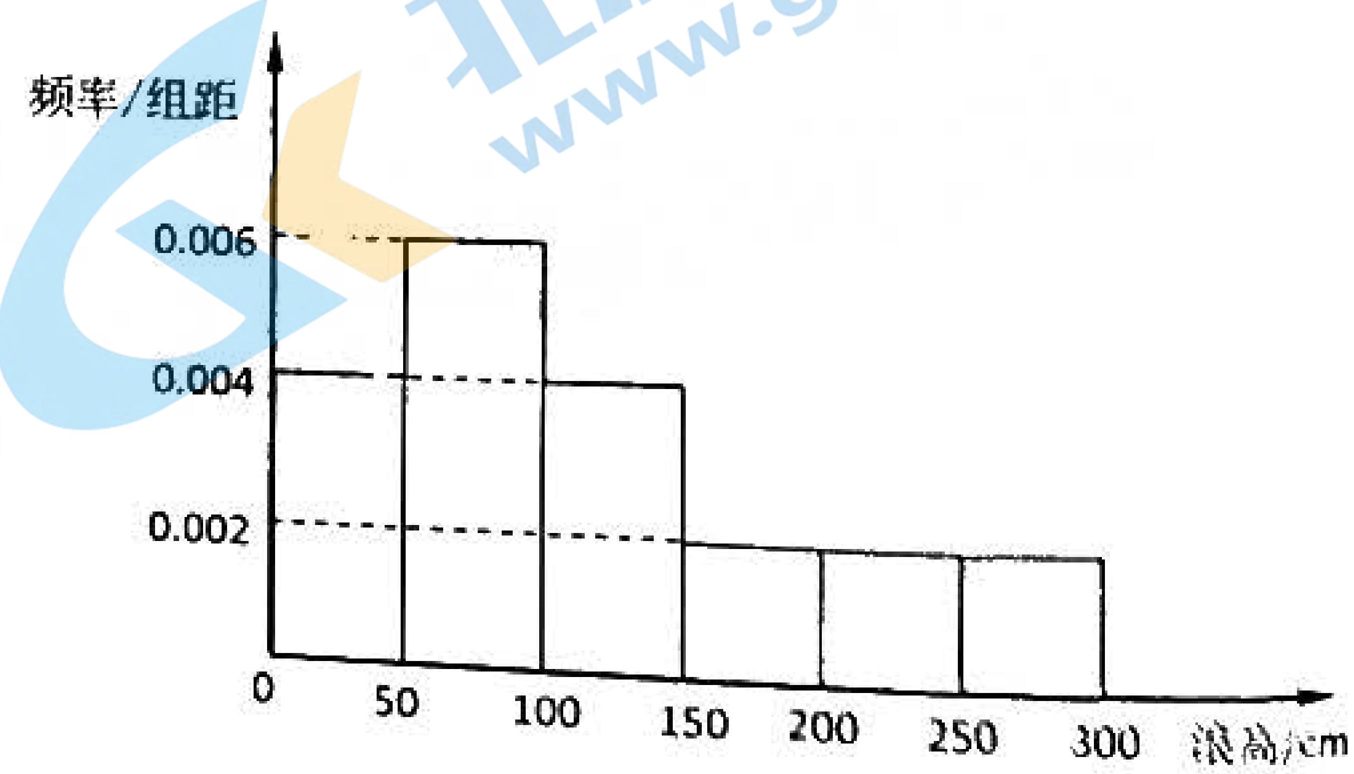
已知在递增数列$\{a_n\}$中，a_1，a_2为函数$f(x)=x^2-11x+24$的两个零点，数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是公差为2的等差数列.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设数列$\{\frac{1}{a_n}\}$的前n项和为S_n，证明：$S_n<\frac{3}{4}$.

19. （12分）

渔船海上外出作业受天气限制，尤其浪高对渔船安全影响最大，二月份是某海域风浪最平静的月份，浪高一般不超过3m. 某研究小组从前些年二月份各天的浪高数据中，随机抽取50天数据作为样本，制成频率分布直方图：（如右图）



根据海浪高度将海浪划分为如下等级：

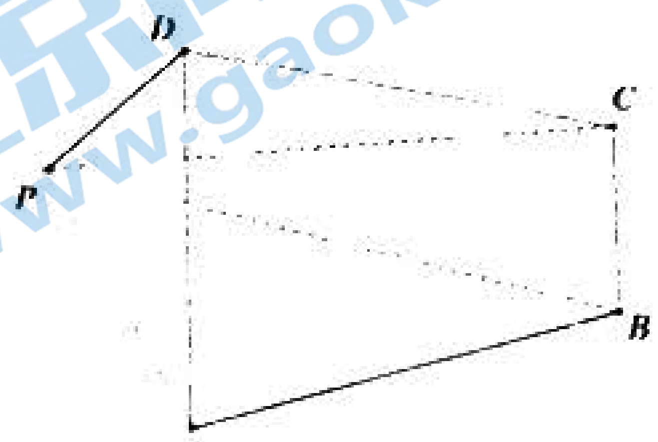
浪高（cm）	(0,50)	[50,100)	[100,200)	[200,300]
海浪等级	微浪	小浪	中浪	大浪

海事管理部门规定：海浪等级在"大浪"及以上禁止渔船出海作业.

（1）某渔船出海作业除受浪高限制外，还受其他因素影响，根据以往经验可知："微浪"情况下出海作业的概率为0.9，"小浪"情况下出海作业的概率为0.8，"中浪"情况下出海作业的概率为0.6，请根据上面频率分布直方图，估计二月份的某天各种海浪等级

现的概率，并求该渔船在这天出海作业的概率；

（2）气象预报预计未来三天内会持续“中浪”或“大浪”，根据以往经验可知：若某天是“大浪”，则第二天是“大浪”的概率为$\frac{1}{2}$，“中浪”的概率为$\frac{1}{2}$；若某天是“中浪”，则第二天是“大浪”的概率为$\frac{1}{3}$，“中浪”的概率为$\frac{2}{3}$.现已知某天为“中浪”，记该天的后三天出现“大浪”的天数为X，求X的分布列和数学期望.



（第 20 题图）

20. （12 分）

如图，四棱锥$P-ABCD$中，ΔPAD为等腰三角形，$PD=PA=5$，$AD // BC$，$\angle BAD=90°$，$AB=AD=2BC=8$.

（1）证明:$BC\perp PC$；

（2）若$AB\perp AP$，点M在线段PB上，$PM=\frac{1}{3}PB$，求平面DMC与平面PAD夹角的余弦值.

21. （12 分）

我们约定,如果一个椭圆的长轴和短轴分别是另一条双曲线的实轴和虚轴，则称它们互为“姊妹”圆锥曲线.已知椭圆C_1:$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<2)$,双曲线$C_2$是椭圆$C_1$的“姊妹”圆锥曲线，$e_1$，$e_2$分别为$C_1$，$C_2$的离心率，且$e_1e_2=\frac{\sqrt{15}}{4}$，点$M,N$分别为椭圆$C_1$的左、右顶点.

（1）求双曲线C_2的方程；

（2）设过点$G(4,0)$的动直线l交双曲线C_2右支于A,B两点，若直线AM,BN的斜率分别为k_{AM},k_{BN}.

（i）试探究k_{AM}与k_{BN}的比值$\frac{k_{AM}}{k_{BN}}$是否为定值.若是定值，求出这个定值；若不是定值，请说明理由；

（ii）求$w=k_{AM}^2+\frac{2}{3}k_{BN}$的取值范围.

22. （12 分）

已知函数$f(x)=\ln x+\frac{k}{x+1}$（$k\in\mathbf{R}$）.

（1）若$f(x)$在定义域上具有唯一单调性，求k的取值范围；

（2）当$x\in(1,2)$时，证明：$(2-x)e^{2(x-\frac{1}{x})}-2x^2+x<0$.

2023届安徽省“江南十校”联考

数学试题评分参考

一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	C	A	B	C	B	D

1.C

【命题立意】本题考查不等式的解法、集合的交集、补集运算，体现了数学运算的核心素养。

【试题难度】易

【试题解析】

$A=\{x|-1<x<3\}$，$\complement_R B=\{x|x\le 2\}$，$\therefore A\cap(\complement_R B)=\{x|-1<x\le 2\}$，故选C

2.D

【命题立意】本题考查复数的运算，体现了数学运算的核心素养。

【试题难度】易

【试题解析】

$z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(2-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{1-3\mathrm{i}}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$，故选D

3.C

【命题立意】本题考查向量的运算，体现了数学运算的核心素养。

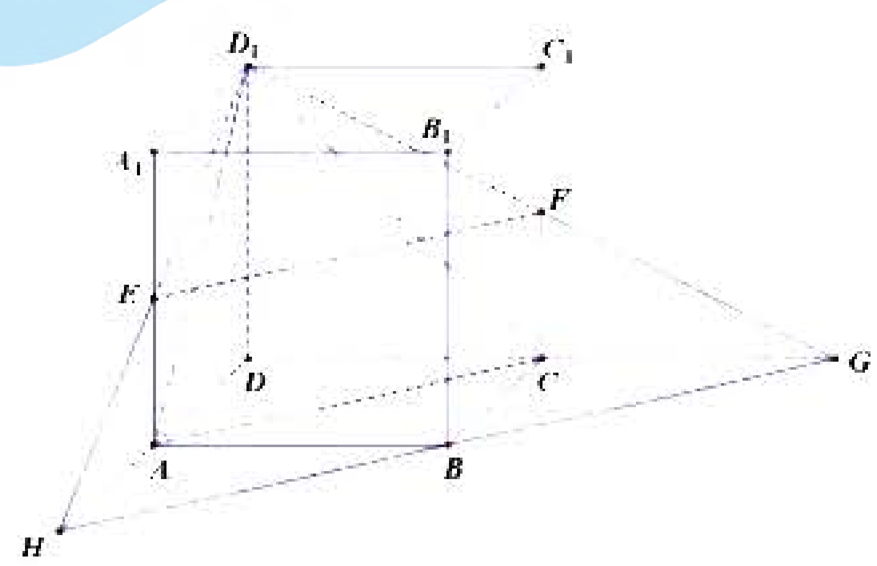
【试题难度】易

【试题解析】

$|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+2\vec{b})^2}=\sqrt{2+36-4\times\sqrt{2}\times3\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{26}$，故选C

4.A

【命题立意】本题以数学文化中的中国古代建筑为背景考查异面直线所成角的求解问题，体现了直观想象的核心素养。



【试题难度】中

【试题解析】

如图所示，过 D_1、E、F 三点的平面与平面 $ABCD$ 的交线 $GH\parallel AC$，而 AC 与 AD_1 所成的角为 $\dfrac{\pi}{3}$，故选A

5.B

【命题立意】本题考查利用排列组合知识解决相邻问题和插空问题，体现了逻辑推理和数学运算的核心素养。

【试题难度】中
【试题解析】
由题意得，不同的排法共有 $A_2^2\cdot A_2^2\cdot A_3^2=24$ 种，故选 B

6.C

【命题立意】本题考查三角变换的相关公式和三角函数的性质，体现了数学运算的核心素养。
【试题难度】中
【试题解析】

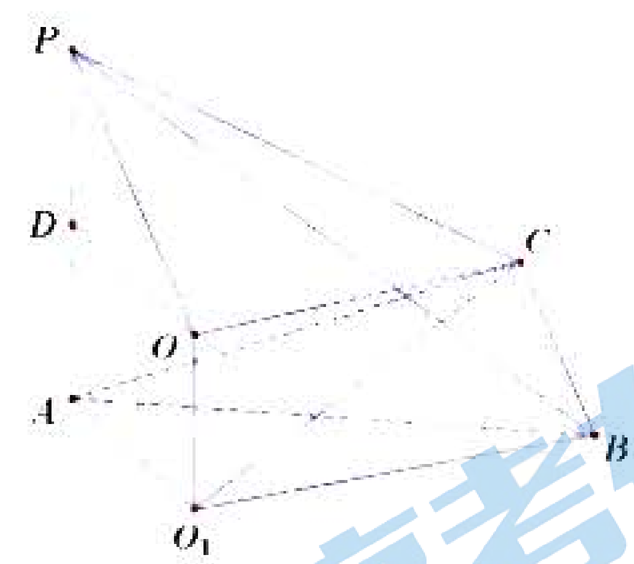
由题意得 $f(x)=-\dfrac{1}{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})+\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

由 $2x+\dfrac{\pi}{4}=k\pi$ 得 $x=-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}$，则 $f(x)$ 的对称中心为 $(-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{4})(k\in Z)$，所以 A，B 错误.

由 $2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ 得 $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}$，则 $f(x)$ 的对称轴方程为 $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}(k\in Z)$，C 正确，D 错误，故选 C

7.B

【命题立意】本题考查三棱锥外接球的综合问题，体现了直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养。
【试题难度】中
【试题解析】



如图所示，由 $CA=CB=2$，$\angle ACB=\dfrac{2\pi}{3}$ 得 ΔABC 的外接圆半径为2，又 $PA\perp$ 底面 ABC，取 PA 的中点 D.由 $PD=1$，$OD=2$ 得 $R=\sqrt{5}$.即三棱锥 $P-ABC$ 外接球半径为 $\sqrt{5}$，所以 $S=4\pi R^2=20\pi$.故选 B

8.D

【命题立意】本题考查利用函数的单调性比较大小问题，体现了数学抽象、数学运算等核心素养。
【试题难度】难
【试题解析】

构造函数 $y_1=e^x+1,y_2=x+2,y_3=\ln x+3$，令 $f(x)=y_1-y_2=e^x-x-1$，$g(x)=y_2-y_3=x-\ln x-1$，则 $f'(x)=e^x-1,g'(x)=1-\dfrac{1}{x}$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单增，所以 $f(0.9)>f(0)=0$，所以 $e^{0.9}>1.9$，所以 $a>b$.同理 $b>c$，所以选 D.

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

题　号	9	10	11	12
答　案	AB	AC	BCD	ABC

9. AB

【命题立意】本题考查三次函数的性质，体现了数学运算的核心素养。
【试题难度】易
【试题解析】

A 正确：因为对 $\forall x\in\mathbf{R}, f(-x)=-x^3+x=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数；

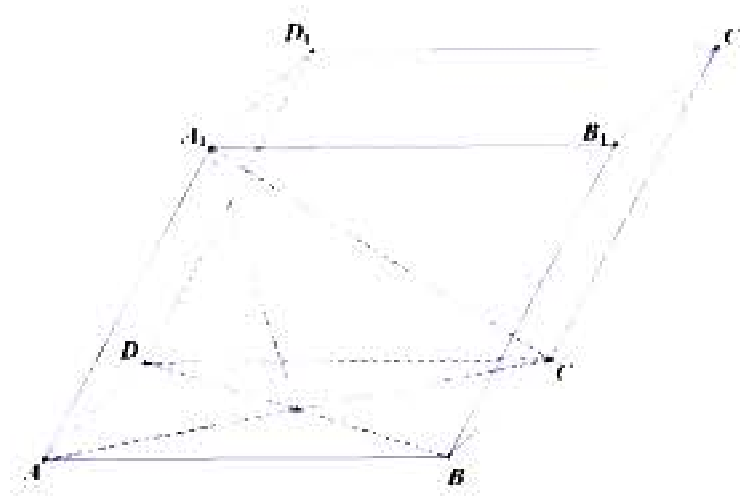
B 正确：由 $f'(x)=3x^2-1>0$ 得 $x<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；

C 错误：因为 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，所以 $f(x)$ 无最大值；

D 错误：由 $f'(x)=3x^2-1=0$ 得 $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，经检验 $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点.

10.AC

【命题立意】本题考查空间角、空间距离的计算，体现了数学运算、直观想象、逻辑推理等核心素养。
【试题难度】中
【试题解析】



设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AD}=\vec{b}, \overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，则 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{1}{2}$

A 正确：$\overrightarrow{A_1C}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$，$\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}$，

$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BD}=(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\vec{b}^2-\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$；

B 错误：因为 $|\overrightarrow{A_1C}|^2=(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}=2$，所以 $|\overrightarrow{A_1C}|=\sqrt{2}$；

C 正确：因为 $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BB_1}=(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}^2=0$，所以 $BB_1\perp A_1C$；

D 错误：因为 $BD\perp$ 平面 AA_1C，所以平面 $AA_1C\perp$ 平面 $ABCD$，则 A_1C 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle A_1CA$. 在 $Rt\Delta AA_1C$ 中，$AA_1=1$，$AC=\sqrt{3}$，所以 $\sin\angle A_1CA=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

11.BCD

【命题立意】本题考查抛物线及其切线性质，体现了数学运算、数学抽象、逻辑推理等核心素养。
【试题难度】中
【试题解析】

A 错误：将 AB 中点 $M(2a,a^2)$ 代入 $C:x^2=2py$ 得 $p=2$，所以抛物线 $C:x^2=4y$ 的准线方程为 $y=-1$；

B 正确：将直线 OB 的方程 $y=ax$ 代入 $C:x^2=4y$ 得 $N(4a,4a^2)$，所以 B 为 ON 中点；

C 正确：抛物线 C 在点 N 处的切线方程为：$4ax=2(4a^2+y)$，令 $y=0$ 得 $x=2a$，所以直线 AN 为 C 的切线；

D 正确：抛物线 $C:x^2=4y$ 在 $M(2a,a^2)$ 处的切线方程为：$2ax=2(a^2+y)$，其斜率 $k=a$ 与直线 OB 的斜率相等，所以 C 在点 M 处的切线与直线 ON 平行.

12.ABC

【命题立意】本题考查抽象函数的对称性、周期性以及导函数的相关性质，体现了数学抽象、数学运算等核心素养。

【试题难度】难

【试题解析】

A 正确：由 $g(2x+1)$ 为偶函数得 $g(2x+1)=g(-2x+1)$，则 $g(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，即 $g(1+x)=g(1-x)$，两边同时求导得 $g'(1+x)=-g'(1-x)$，令 $x=0$ 得 $g'(1)=0$；

B 正确：由 $g(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称得 $g(-x)=g(x+2)$，由 $f(x+3)=g(-x)+4$ 得 $f(1-x)=g(x+2)+4$，所以 $f(x+3)=f(1-x)$，即 $f(x)$ 关于直线 $x=2$ 对称；

C 正确：对 $f(x+3)=g(-x)+4$ 两边同时求导得 $f'(x+3)=-g'(-x)$，由 $f'(x)+g'(1+x)=0$ 得 $f'(-x-1)+g'(-x)=0$，则 $f'(x+3)=f'(-x-1)$，所以 $f'(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称；

D 错误：由 $f(x+3)=f(1-x)$ 得 $f'(x+3)=-f'(1-x)$，所以函数 $f'(x)$ 的图像关于 $(2,0)$ 对称，结合 C 选项可知，4 是函数 $f'(x)$ 的一个周期，由 $f'(x)+g'(1+x)=0$ 得，4 也是函数 $g'(x)$ 的一个周期，由 $g'(1)=0$ 得 $f'(2)=g'(3)=f'(4)=0$，所以 $\sum_{k=1}^{2023} f'(k)g'(k)=0$.

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. 60

【命题立意】本题考查二项式定理，体现了数学运算的核心素养。

【试题难度】易

【试题解析】

$$(3+x)\left(x+\frac{1}{x}\right)^6=3\left(x+\frac{1}{x}\right)^6+x\left(x+\frac{1}{x}\right)^6,$$

$(x+\frac{1}{x})^6$ 展开式的通项为：

$T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=C_6^r x^{6-2r}$，当 $6-2r=0$ 即 $r=3$ 时，$3C_6^3=60$，

所以 $(3+x)\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中，常数项为 60.

14. $4\sqrt{5}$

【命题立意】本题考查直线和圆的相关性质，体现了数学运算、直观想象核心素养。

【试题难度】中

【试题解析】

易知 l 过定点 $P(1,-1)$，$|PC|=\sqrt{5}$，当 $PC\perp l$ 时，弦长 $|AB|$ 取得最小值. 此时 $|AB|=2\sqrt{25-5}=4\sqrt{5}$

15. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【命题立意】本题考查直线和椭圆的位置关系，体现了数学运算、逻辑推理等核心素养。

【试题难度】中

【试题解析】

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，其中$x_0=-1$，记坐标原点为O，直线l，OP，PQ的斜率分别为k_{MN},k_{OP},k_{PQ}.又$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\\\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，两式相减整理可得 $\frac{b^2}{a^2}=-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}=-\frac{2y_0}{2x_0}\cdot k_{MN}$.即$k_{MN}k_{OP}=-\frac{b^2}{a^2}$.又

$k_{MN}k_{PQ}=-1$，所以两式相比可得$\frac{k_{OP}}{k_{PQ}}=\frac{b^2}{a^2}$，即$\frac{\frac{y_0}{x_0}}{\frac{y_0}{x_0+\frac{3}{4}}}=\frac{b^2}{a^2}$，代入$x_0=-1$，整理可得$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，所以离心率

$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

16. $-\frac{5}{e^2}<m<0$

【命题立意】本题考查导数的几何意义，曲线的切线方程，体现了数形结合思想和数学运算的核心素养。

【试题难度】难

【试题解析】

设切点坐标为(x_0,y_0)，则切线斜率$k=(x_0+1)\cdot e^{x_0}$，所以切线方程为

$y-x_0e^{x_0}=(x_0+1)\cdot e^{x_0}(x-x_0)$，将$P(1,m)$代入得$m=(-x_0^2+x_0+1)\cdot e^{x_0}$.存在三条切线.即方程

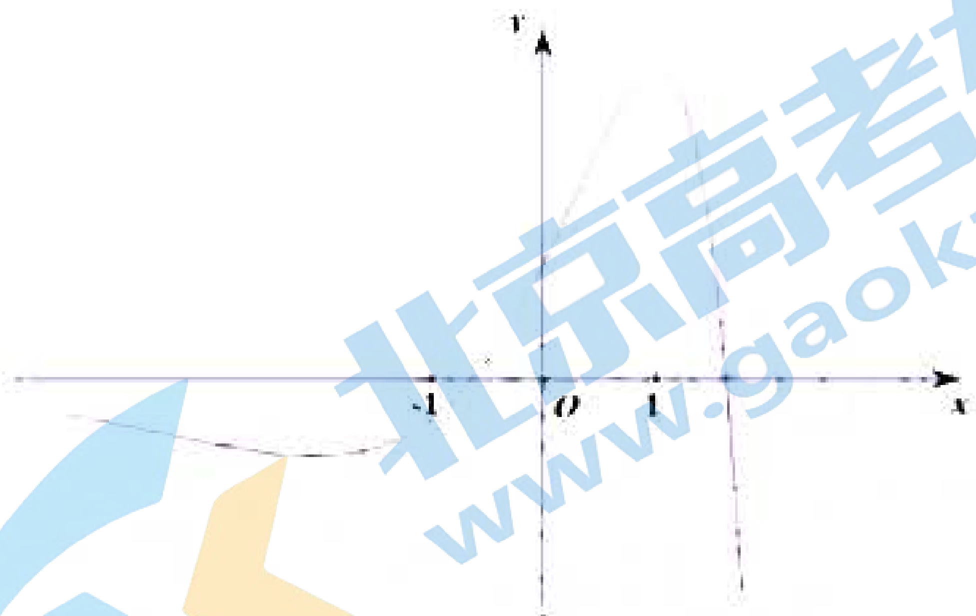
$m=(-x^2+x+1)\cdot e^x$有三个不等实数根.设$g(x)=(-x^2+x+1)e^x$，又$g'(x)=-(x-1)(x+2)e^x$，

易得在$(-2,1)$上，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；在$(-\infty,-2)$

和$(1,+\infty)$上，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，当$x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$或

$x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$时，$g(x)<0$，画出图象可得$g(-2)<m<0$，

即$-\frac{5}{e^2}<m<0$



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.【命题立意】本题考查三角函数和解三角形相关知识.以三角函数的定义为载体，考查学生和差角公式的应用，同时结合正余弦定理考查解三角形能力。本题以基础知识和基本技能立意，重点考查学生对基本概念和基本公式的掌握，同时考查了学生的计算能力。体现了数学运算、逻辑推理等核心素养。

【试题难度】易

【试题解析】

(1) 由题意P，Q在单位圆上，且在第一象限可得$P(\frac{1}{7},\frac{4\sqrt{3}}{7})$，$Q(\frac{13}{14},\frac{3\sqrt{3}}{14})$，………1 分

由三角函数定义知 $\sin\alpha=\dfrac{4\sqrt{3}}{7},\cos\alpha=\dfrac{1}{7},\sin\beta=\dfrac{3\sqrt{3}}{14},\cos\beta=\dfrac{13}{14}$. ……………3 分

故 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{7}\times\dfrac{13}{14}+\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{14}=\dfrac{1}{2}$. ……………5 分

(2)（选①）

方法 1：由(1)中结论可得 $\cos C=\dfrac{1}{2}$ ，又 $C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$. ……6 分

由余弦定理可得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$, 即 $4=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab$. …7 分

$\because ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ $\therefore 4\ge(a+b)^2-\dfrac{3}{4}(a+b)^2=\dfrac{1}{4}(a+b)^2$,

$\therefore a+b\le 4$.当 $a=b=2$ 时等号成立. ………………………………9 分

$\therefore a+b+c\le 6$.

即当 ΔABC 为等边三角形时，周长最大，最大值为 6. ………………………10 分

方法 2：由(1)中结论可得角 $C=\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{3}$ 且 $B=\dfrac{2\pi}{3}-A$. ……………………6 分

又由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，可得 $a=\dfrac{4\sqrt{3}\sin A}{3},b=\dfrac{4\sqrt{3}\sin B}{3}$. …7 分

故 ΔABC 周长

$$a+b+c=\frac{4\sqrt{3}\sin A}{3}+\frac{4\sqrt{3}\sin B}{3}+2=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin A+\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin(\frac{2\pi}{3}-A)+2$$

$$=2\sqrt{3}\sin A+2\cos A+2=4\sin(A+\frac{\pi}{6})+2$$. ………………9 分

$\because C=\dfrac{\pi}{3}$ $\therefore 0<A<\dfrac{2\pi}{3}$ $\therefore\dfrac{\pi}{6}<A+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$ $\therefore A+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$ 即 $A=\dfrac{\pi}{3}$ 时,

ΔABC 周长取最大值 6. ………………………………10 分

（选②）

由(1)可知 $\sin A=\dfrac{4\sqrt{3}}{7},\cos A=\dfrac{1}{7},\sin B=\dfrac{3\sqrt{3}}{14},\cos B=\dfrac{13}{14}$

则 $\sin C=\sin(A+B)=\dfrac{55\sqrt{3}}{98}$. ……………………………………7 分

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{98}{5\sqrt{3}}$，可得 $a=\dfrac{56}{5},b=\dfrac{21}{5}$. ……………9 分

则 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{56}{5}\times\dfrac{21}{5}\times\dfrac{55\sqrt{3}}{98}=\dfrac{66\sqrt{3}}{5}$. ………………10 分

18.【命题立意】本题考查了函数的零点、等差数列的定义、数列的通项.体现了数学运算、逻辑推理等核心素养。

【试题难度】易

【试题解析】

解：（1）由$\{a_n\}$递增及$f(x)=0$得$a_1=3,a_2=8$，则$a_2-a_1=5$.……………………………1 分

即$\{a_{n+1}-a_n\}$是以5为首项，2为公差的等差数列.所以$a_{n+1}-a_n=2n+3$. ……………2 分

$a_n-a_{n-1}=2n+1$

$a_{n-1}-a_{n-2}=2n-1$

…… $(n\geq 2)$

$a_3-a_2=7$

$a_2-a_1=5$

相加得 $a_n-a_1=5+7+\cdots+(2n+1)$

$a_n=3+5+7+\cdots+(2n+1)=n(n+2)$ ……5 分

经检验$a_1=3$也满足上式，所以$a_n=n(n+2)$. ……………………………………6 分

（2）由（1）得：

$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$. ……………………………………………………………8 分

$$\therefore S_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$ …………11 分

由于$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}>0$，所以$S_n<\frac{3}{4}$. ……………………………………………………12 分

19.【命题立意】通过实际生活情境，考查频率分布直方图相关计算、全概率、分布列、期望，体现了数据分析、数学运算等核心素养。

【试题难度】中

【试题解析】

（1）解：记这天浪级是"微浪"为事件A_1，浪级是"小浪"为事件A_2，浪级是"中浪"为事件A_3，浪级是"大浪"为事件A_4．该渔船当天出海作业为事件B，则由题意可知：

$P(A_1)=0.2$，$P(A_2)=0.3$，$P(A_3)=0.3$，$P(A_4)=0.2$． ……………………2 分

$\therefore P(B)=P(BA_1)+P(BA_2)+P(BA_3)$

$=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)$ ……………………3 分

$=0.9\times0.2+0.8\times0.3+0.6\times0.3$ ……………………4 分

$=0.18+0.24+0.18$

$=0.6$ ……………………5 分

（2）依题意可知，X的所有可能取值为0，1，2，3 ……………………6 分

$\therefore P(X=0)=(\frac{2}{3})^2=\frac{8}{27}$，……………………7 分

$P(X=1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{10}{27}$，……………………8 分

$P(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，……………………9 分

$P(X=3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$，……………………10 分

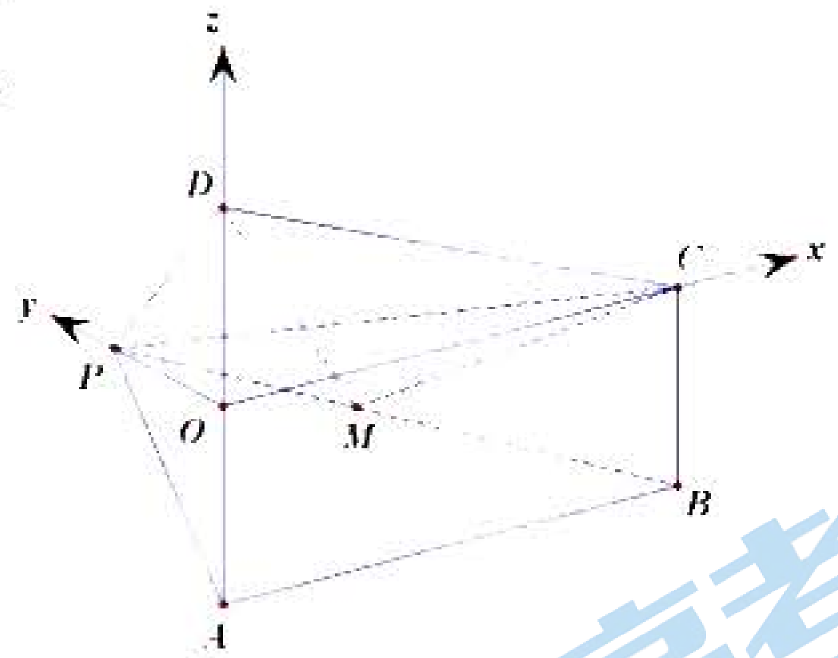
则 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

……………11 分

数学期望 $E(X)=0\times\frac{8}{27}+1\times\frac{10}{27}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{12}=\frac{121}{108}$．……12 分

20.【命题立意】本题考查线面垂直、面面垂直的判定与性质、平面与平面夹角余弦值的求解，体现了直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养。



【试题难度】中

【试题解析】

（1）取 AD 的中点 O，连接 OP,OC，

$\because PA=PD$，$\therefore PO\perp AD$，

$\because AD=2BC,\therefore OA=BC$，

$\because AO//BC$，$\therefore$ 四边形 $ABCO$ 为平行四边形，……………………………………………………2 分

又 $\because \angle DAB=90^\circ$，$\therefore CO\perp AD$，

又 $PO\cap OC=O$，$\therefore AD\perp$ 平面 POC，

又 $AD//BC$，$\therefore BC\perp$ 平面 POC，

又 $PC\subset$ 平面 POC，$\therefore BC\perp PC$．……………………………………………………5 分

（2）$\because AB\perp AD, AB\perp AP$，且 $AD\cap AP=A$，$\therefore AB\perp$ 平面 PAD，

又 $AB//OC$，则 $OC\perp$ 平面 PAD，……………………………………………………6 分

分别以 OC,OP,OD 所在的直线为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$，

又 $AD=8$，则 $OD=4$，$OC=AB=AD=8$，

又 $PD=5$，则 $OP=3$，则 $A(0,0,-4),B(8,0,-4),C(8,0,0)$，$D(0,0,4),P(0,3,0)$，

则有 $\overrightarrow{PB}=(8,-3,-4),\overrightarrow{DC}=(8,0,-4)$，

$\therefore \overrightarrow{PM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}=(\frac{8}{3},-1,-\frac{4}{3})$，$\therefore \overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{PM}=(\frac{8}{3},2,-\frac{16}{3})$，……………………8 分

设平面 DMC 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{DM}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{DC}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\dfrac{8}{3}x+2y-\dfrac{16}{3}z=0\\ 8x-4z=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则平面 DMC 的一个法向量为 $\vec{m}=(1,4,2)$，……………………………………………10 分

又平面 PAD 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,0,0)$，则 $|\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\dfrac{1}{\sqrt{21}\times\sqrt{1}}=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$，

$\therefore$ 平面 DMC 与平面 PAD 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{21}$ ……………………………………………12 分

21.【命题立意】（1）本题是一道新定义问题，考查学生探究能力和创新能力；（2）本题考查了椭圆和双曲线的标准方程与离心率、双曲线的简单性质、直线与双曲线的位置关系、渐近线与双曲线的位置关系等。体现了数学运算、逻辑推理、直观形象等核心素养。

【试题难度】难

【试题解析】（1）由题意可设双曲线 C_2: $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. ……………………………………………1 分

则 $e_1e_2=\dfrac{\sqrt{4-b^2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{4+b^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$， ……………………………………………2 分

解得 $b^2=1$.

所以双曲线 C_2 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$. ……………………………………………3 分

（2）（i）（仅写出定值 $-\dfrac{1}{3}$ 给 1 分）

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 AB 的方程为 $x=ty+4$.

由 $\begin{cases}x=ty+4\\ \dfrac{x^2}{4}-y^2=1\end{cases}$ 消元得 $(t^2-4)y^2+8ty+12=0$.

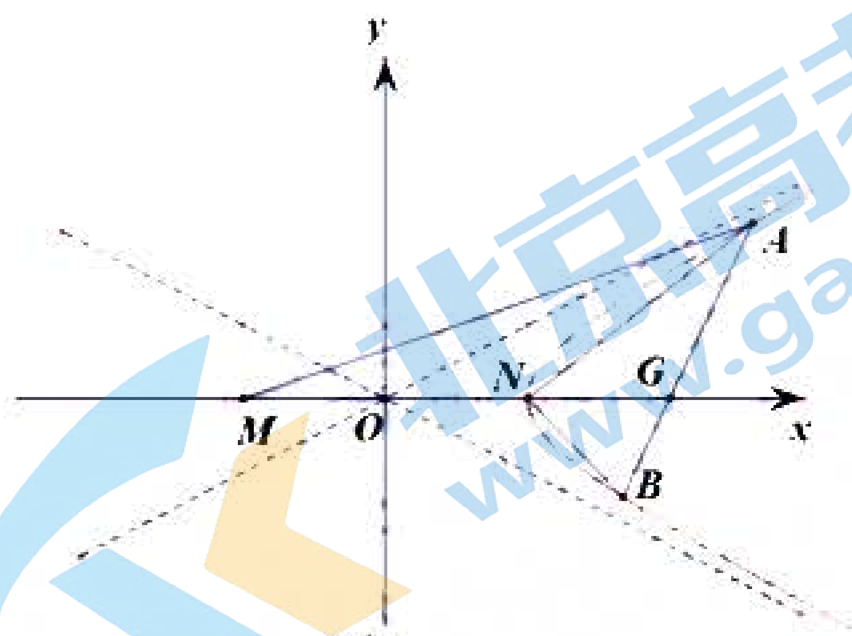


图1

则 $t\neq\pm2$，$\Delta>0$.且

$\begin{cases}y_1+y_2=-\dfrac{8t}{t^2-4}\\ y_1y_2=\dfrac{12}{t^2-4}\end{cases}$ ……………………………………………5 分

$$\therefore\frac{k_{AM}}{k_{BN}}=\frac{\dfrac{y_1}{x_1+2}}{\dfrac{y_2}{x_2-2}}=\frac{y_1}{x_1+2}\times\frac{x_2-2}{y_2}=\frac{y_1(ty_2+2)}{y_2(ty_1+6)}=\frac{ty_1y_2+2y_1}{ty_1y_2+6y_2}=\frac{ty_1y_2+2(y_1+y_2)-2y_2}{ty_1y_2+6y_2}$$

$$=\frac{\dfrac{12t}{t^2-4}-\dfrac{16t}{t^2-4}-2y_2}{\dfrac{12t}{t^2-4}+6y_2}=\frac{-\dfrac{4t}{t^2-4}-2y_2}{\dfrac{12t}{t^2-4}+6y_2}=-\frac{1}{3}$$

或　由韦达定理可得 $\dfrac{y_1+y_2}{y_1y_2}=-\dfrac{2t}{3}$，即 $ty_1y_2=-\dfrac{3}{2}(y_1+y_2)$．

$$\therefore\frac{k_{AM}}{k_{BN}}=\frac{\dfrac{y_1}{x_1+2}}{\dfrac{y_2}{x_2-2}}=\frac{y_1}{x_1+2}\times\frac{x_2-2}{y_2}=\frac{y_1(ty_2+2)}{y_2(ty_1+6)}=\frac{ty_1y_2+2y_1}{ty_1y_2+6y_2}=\frac{-\dfrac{3}{2}(y_1+y_2)+2y_1}{-\dfrac{3}{2}(y_1+y_2)+6y_2}=\frac{y_1-3y_2}{-3y_1+9y_2}=-\frac{1}{3}$$

即 k_{AM} 与 k_{BN} 的比值定值 $-\dfrac{1}{3}$．……………………………………………………………8 分

（ii）方法 1：设直线 $AM: y=k(x+2)$，代入双曲线方程并整理得 $(1-4k^2)x^2-16k^2x-16k^2-4=0$ $(1-4k^2\neq 0)$．

由于点 M 为双曲线的左顶点，所以此方程有一根为 -2．

由韦达定理得：$-2x_A=\dfrac{-16k^2-4}{1-4k^2}$，解得 $x_A=\dfrac{2(4k^2+1)}{1-4k^2}$．

因为点 A 在双曲线的右支上，所以 $x_A=\dfrac{2(4k^2+1)}{1-4k^2}>0$，

解得 $k\in(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$，即 $k_{AM}\in(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$．……………………………………………………9 分

同理可得 $k_{BN}\in(-\infty,-\dfrac{1}{2})\cup(\dfrac{1}{2},+\infty)$．…………………………………………………10 分

由（i）中结论可知 $k_{BN}=-3k_{AM}\in(-\infty,-\dfrac{1}{2})\cup(\dfrac{1}{2},+\infty)$，得 $k_{AM}\in(-\infty,-\dfrac{1}{6})\cup(\dfrac{1}{6},+\infty)$．

所以 $k_{AM}\in(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{6})\cup(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{2})$．…………………………………………………11 分

故 $w=k_{AM}^2+\dfrac{2}{3}k_{BN}=k_{AM}^2+\dfrac{2}{3}(-3k_{AM})=k_{AM}^2-2k_{AM}\in(-\dfrac{3}{4},-\dfrac{11}{36})\cup(\dfrac{13}{36},\dfrac{5}{4})$．……12 分

方法 2：由于双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$，如图 2，过点 M 作两渐近线的平行线 l_1 与 l_2，由于点 A 在双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的右支上，所以直线 AM 介于直线 l_1 与 l_2 之间（含 x 轴，不含直线 l_1 与 l_2），所以

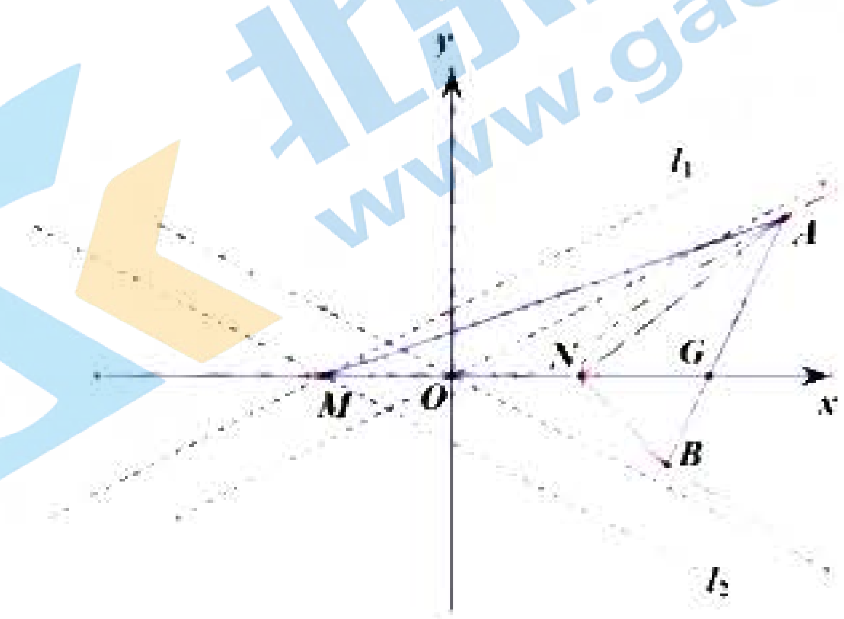


图2

$k_{AM}\in(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$．…………………………………………………9 分

同理，如图 3，过点 N 作两渐近线的平行线 l_3 与 l_4，由于点 B 在双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的右支上，所以直线 BN 介于直线 l_3 与 l_4 之间（不含 x 轴，不含直线 l_3 与 l_4），

所以 $k_{BN}\in(-\infty,-\dfrac{1}{2})\cup(\dfrac{1}{2},+\infty)$．……………………10 分

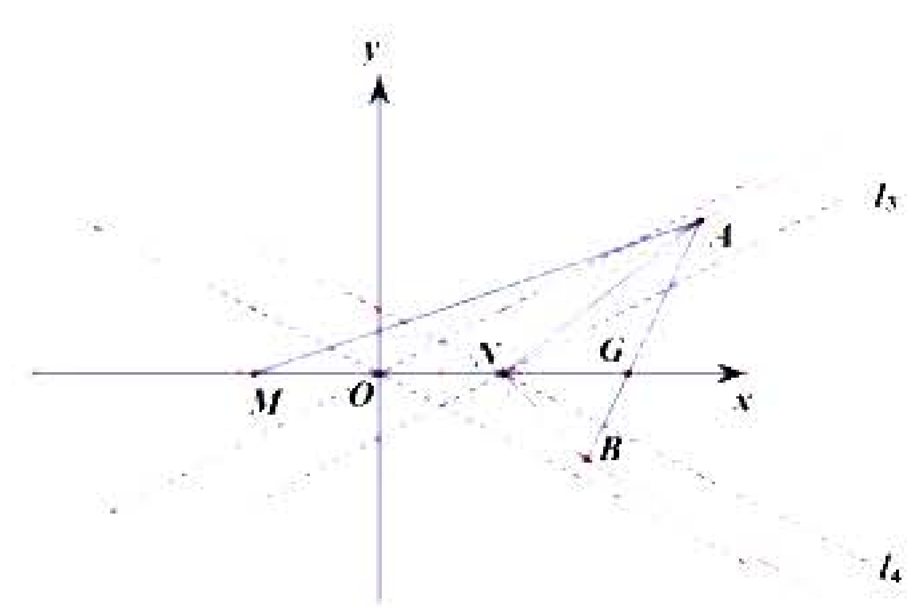


图3

由（i）中结论可知 $k_{BN}=-3k_{AM}\in(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$，得 $k_{AM}\in(-\infty,-\frac{1}{6})\cup(\frac{1}{6},+\infty)$.

所以 $k_{AM}\in(-\frac{1}{2},-\frac{1}{6})\cup(\frac{1}{6},\frac{1}{2})$. ……………………………………………………11 分

故 $w=k_{AM}^2+\frac{2}{3}k_{BN}=k_{AM}^2+\frac{2}{3}(-3k_{AM})=k_{AM}^2-2k_{AM}\in(-\frac{3}{4},-\frac{11}{36})\cup(\frac{13}{36},\frac{5}{4})$. ……12 分

22.【命题立意】本题考查导函数的应用和不等式的证明，突出了创新能力和函数同构思想。体现了逻辑推理、数学抽象、数学运算等核心素养。

【试题难度】难

【试题解析】

（1）由题意得 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{k}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-kx}{x(x+1)^2}.$$ ……………………………………1 分

若 $f(x)$ 在定义域上单调递增，则 $f'(x)\ge 0$ 恒成立，即 $k\le x+\frac{1}{x}+2$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，又

$x+\frac{1}{x}+2\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+2=4$，$\therefore k\le 4$. ……………………………………………………………3 分

若 $f(x)$ 在定义域上单调递减，则 $f'(x)\le 0$ 恒成立，即 $k\ge x+\frac{1}{x}+2$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，而这样的 k 不存在.

综上所述：$f(x)$ 在定义域上单调递增，且 $k\le 4$. ……………………………………5 分

（2）**方法一**：要证 $(2-x)e^{2(x-\frac{1}{x})}-2x^2+x<0$ 成立，

只需证 $e^{2(x-\frac{1}{x})}<\frac{2x^2-x}{2-x}$，只需证 $2(x-\frac{1}{x})<\ln\frac{2x^2-x}{2-x}$，………………6 分

只需证 $2(x-\frac{1}{x})<\ln\frac{2x-1}{\frac{2}{x}-1}$，只需证 $\ln(\frac{2}{x}-1)+2x<\ln(2x-1)+\frac{2}{x}$，……8 分

当 $k=4$ 时，$f(x)=\ln x+\frac{4}{x+1}$，$\therefore$ 原不等式即证 $f(2x-1)>f(\frac{2}{x}-1)$，…………10 分

由（1）知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\because x\in(1,2)$ $\therefore 2x-1>0,\frac{2}{x}-1>0,$

又 $2x-1>\frac{2}{x}-1$，则 $f(2x-1)>f(\frac{2}{x}-1)$，

$\therefore$ 原不等式成立. ……………………………………………………………12 分

方法二：要证 $(2-x)e^{2(x-\frac{1}{x})}-2x^2+x<0$ 成立，

只需证 $e^{2(x-\frac{1}{x})}<\frac{2x^2-x}{2-x}$，只需证 $2(x-\frac{1}{x})<\ln\frac{2x^2-x}{2-x}$，………………6 分

只需证 $\ln(2x^2-x)-\ln(2-x)>2x-\dfrac{2}{x}$，

令 $g(x)=\ln(2x^2-x)-\ln(2-x)-2x+\dfrac{2}{x}$，

则 $g'(x)=\dfrac{4x-1}{2x^2-x}+\dfrac{1}{2-x}-2-\dfrac{2}{x^2}$ ……………7 分

$=\dfrac{4(x-1)^2(x^2-x+1)}{x^2(2x-1)(2-x)}>0$ ……………………………………………10 分

$\therefore$ $g(x)$ 在 $x\in(1,2)$ 上单调递增，$\therefore$ $g(x)>g(1)=0$，

$\ln(2x^2-x)-\ln(2-x)-2x+\dfrac{2}{x}>0$，　$\therefore$ 原不等式成立. ……………………12 分

以上各解答题如有不同解法并且正确,请按相应步骤给分。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。