2022—2023 学年高考前适应性训练考试

高三数学

考试说明： 1. 本试卷共 150 分。考试时间 120 分钟。

2. 请将各题答案填在答题卡上。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设复数 $z=i(2-3i)$，则 $|z|=$

A. $\sqrt{13}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. 3　　D. 5

2. 已知集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{x\in N \mid -2<x<3\}$，则 $A\cup B=$

A. $\{0,1\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

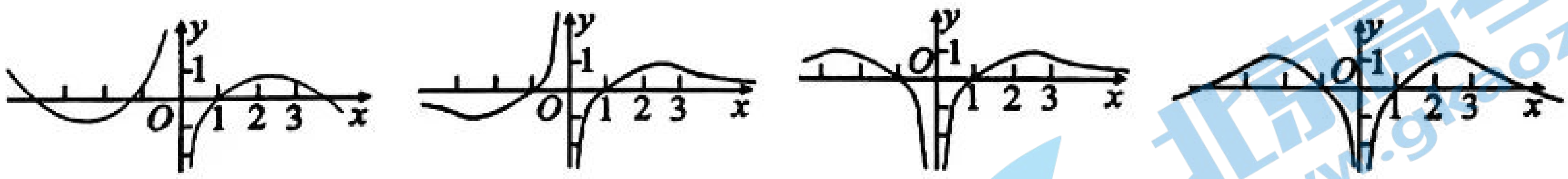
3. 已知命题 p：$\exists x\in N$，$e^x<0$（e 为自然对数的底数）；q：$\forall x\in R$，$x^2+|x|\geqslant 0$，则下列为真命题的是

A. p 真，q 假　　B. p 真，q 真　　C. p 假，q 真　　D. p 假，q 假

4. 已知平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\vec{a}=(1,-\sqrt{3})$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}+2\vec{b}|=2$，则向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{a}+2\vec{b}$ 的夹角为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

5. 函数 $f(x)=\frac{e\ln x^2}{2x}$ 的图象大致是



A.　　B.　　C.　　D.

6. 现将甲乙丙丁四个人全部安排到 A 市、B 市、C 市三个地区工作，要求每个地区都有人去，则甲乙两个人至少有一人到 A 市工作的安排种数为

A. 12　　B. 14　　C. 18　　D. 22

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $3a_2=a_1+8$，$S_n=a_{n+1}-2$，则 $S_{2022}=$

A. $2^{2021}-1$　　B. $2^{2022}-1$

C. $3\times 2^{2021}-2$　　D. $3\times 2^{2022}-2$

8. 已知抛物线 E：$y^2=4x$ 的焦点为 F，准线 l 交 x 轴于点 H，过点 H 的直线与抛物线交于 A，B 两点，且 $\overrightarrow{HA}=3\overrightarrow{HB}$，则 $|\overrightarrow{FA}|=$

A. $\frac{4}{3}$　　B. 4　　C. $4\sqrt{3}$　　D. 8

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. 在回归分析中，下列说法正确的是

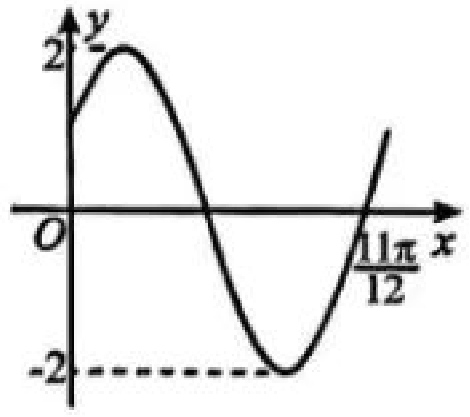
A. 相关系数 $0<r<1$，表示变量 x，y 之间具有正相关关系

B. 相关系数 r 的绝对值越接近 1，说明相关性越弱

C. 点 (x_i, y_i) 所对应的残差是指 $y_i-\hat{y}_i$

D. R^2 越大，说明残差的平方和越小，即模型的拟合效果越好

10. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x-\varphi)(A>0,\ \omega>0,\ |\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，且过点 $(0, 1)$，若存在使 $g(x)=f(x-a)$ 为奇函数成立的实数 a，则 $|a|$ 可能取值为



A. $\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{5\pi}{12}$

C. $\frac{\pi}{6}$

D. $\frac{\pi}{12}$

11. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=-21$，$a_2=-12$，$a_{n+1}+a_{n-1}=2a_n-2(n\geqslant 2)$，$S_n$ 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则下列说法正确的是

A. $\{\frac{a_n}{n-8}\}$ 是等差数列

B. $a_n=-n^2+12n+32$

C. a_6 是数列 $\{a_n\}$ 的最大项

D. 对于两个正整数 m、$n(n>m)$，S_n-S_m 的最大值为 10

12. 已知函数 $f(x)=e^x-\ln(x+m)$，则下面对函数 $f(x)$ 的描述正确的是

A. 当 $m=0$ 时，$f(x)<0$ 无解

B. 当 $m=3$ 时，$f(x)>-\frac{1}{2}$ 恒成立

C. 当 $m=3$ 时，$f(x)=-1$ 有解

D. 当 $m=2$ 时，$f(x)>0$ 恒成立

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在 $(\sqrt{x}-\frac{1}{x})^6$ 的展开式中，x^3 的系数为__________.（用数字作答）

14. 已知实数 a，$b>0$，若 $a+2b=1$，则 $\frac{3}{b}+\frac{1}{a}$ 的最小值为__________.

15. 已知△ABC 中，$AB=AC=2$，$BC=2\sqrt{2}$，AD 为 BC 边上的高线，以 AD 为折痕进行折叠，使得二面角 $B-AD-C$ 为 $\frac{2\pi}{3}$，则三棱锥 $A-BCD$ 的外接球半径为__________.

16. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=2f(x-2)$，当 $x\in[-1, 1)$ 时，$f(x)=2^{|x|}-\frac{3}{2}$. 若 $g(x)=\log_2 x$，$\exists a\in[3, 5)$，且对 $\forall b$ 都满足 $f(a)=g(b)$，则 b 的取值范围是__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\sin 2x+2\sin^2 x-2$.

(1) 求 $f(x)$的最小正周期及值域；

(2) 求 $f(x)$的单调递增区间.

18.（本题满分 12 分）

某电影院对观众按照性别进行了分层抽样调查，一共调查了 900 名观众对 A 影片和 B 影片的喜爱度，获得了以下数据：

	男生		女生	
	非常喜爱	一般喜爱	非常喜爱	一般喜爱
A 影片	450 人	150 人	200 人	100 人
B 影片	300 人	300 人	100 人	200 人

(1) 哪个影片更受学生欢迎？（不用说明理由）

(2) 分别估计该电影院男观众和女观众对 B 影片表示“非常喜爱”的概率；

(3) 该电影院为了进一步调查观众对 B 影片的看法，对样本中的女观众用分层抽样抽取了 6 人，再从这 6 人中随机抽取 2 人参加座谈，求这两人均来自“一般喜爱”群体的概率.

19.（本题满分 12 分）

在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c.

已知 $(b-a)[\sin(B+C)+\sin(A+C)]=\sin C(a+c)$.

(1) 求 B；

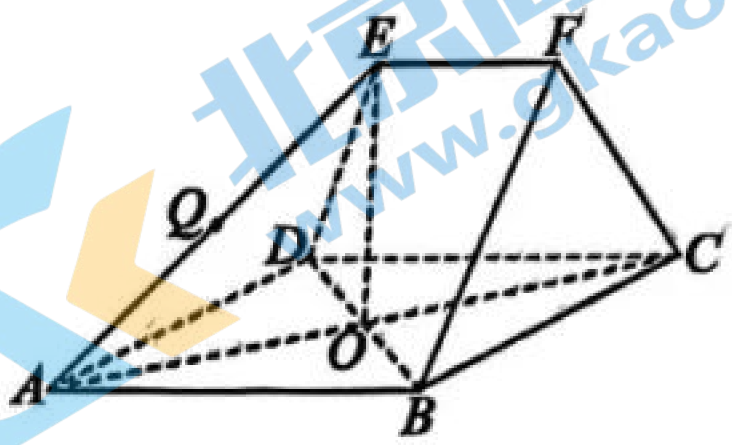
(2) 若∠ABC 的平分线交 AC 于点 D，且 $BD=2$，求 b 的最小值.

20. （本题满分 12 分）

如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的菱形，$\angle BCD=60°$，AC 与 BD 交于点 O，平面 $FBC\perp$ 平面 $ABCD$，$EF/\!/AB$，$FB=FC$，$EF=2$.

(1) 求证：$OE\perp$ 平面 $ABCD$；

(2) 若 $AE\perp FC$，点 Q 为 AE 的中点，求二面角 $Q-BC-A$ 的余弦值.



21. （本题满分 12 分）

已知椭圆 C: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 的上、下顶点分别为 A_1、A_2，点 P 是椭圆 C 上异于 A_1、A_2 的动点，记 k_1，k_2 分别为直线 PA_1，PA_2 的斜率. 点 Q 满足 $QA_1\perp PA_1$，$QA_2\perp PA_2$.

(1) 证明：k_1k_2 是定值，并求出该定值；

(2) 求动点 Q 的轨迹方程.

22. （本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+ax-2a^2\ln x$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $a>0$，x_1，x_2 是 $f(x)$ 的两个不相等的零点，证明：$f'(\frac{x_1+x_2}{2})>0$.

2022-2023 学年高考前适应性训练考试

高三数学答案

1.A

2.C

3.C【解析】$\because \forall x\in \mathbf{N}$，$e^x>0$，$\therefore$命题 p 为假命题，$\because \forall x\in \mathbf{R}$，必有 $x^2\geqslant 0$，$|x|\geqslant 0$，所以 $x^2+|x|\geqslant 0$，

$\therefore$命题 q 为真命题．故选 C.

4.C【解析】$\because \vec{a}=(1,-\sqrt{3}),\therefore|\vec{a}|=2,\because|\vec{b}|=1,|\vec{a}+2\vec{b}|=2$，

$\therefore(\vec{a}+2\vec{b})^2=\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=4+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4=4,\therefore\vec{a}\cdot\vec{b}=-$，

$\therefore\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=4-2=2,\therefore\cos<\vec{a},\vec{a}+2\vec{b}>=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{a}+2\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$.故选：C.

5.B【解析】$\because f(-x)=\dfrac{e\ln x^2}{-2x}=-f(x)$，$\therefore f(x)$是奇函数，故排除 C，D 选项，当 $x>1$ 时，$\ln x^2>0$，

$\therefore f(x)>0$，故排除 A，故选 B.

6.D【解析】若甲乙两人中的 1 人到 A 市工作，其余 3 人到另外两个地方工作，安排种数有 $C_2^1C_3^2A_2^2=12$ 种；若甲乙两人中的 1 人到 A 市工作，丙丁中一人到 A 市工作，其余 2 人到另外两个地方工作，安排种数有 $C_2^1C_2^1A_2^2=8$ 种；若安排甲乙 2 人都到 A 市工作，其余丙丁 2 人到另外两个地方工作，安排种数有 $A_2^2=2$ 种，故总共有 22 种.

7.C【解析】$\because S_n=a_{n+1}-2$，$\therefore$令 $n=1$ 可得：$a_1=a_2-2$，$\because 3a_2=a_1+8$，解得：$a_1=1$，$a_2=3$

$\because S_n=a_{n+1}-2$①，$\therefore S_{n-1}=a_n-2(n\geq 2)$②，由①—②可得：$a_{n+1}=2a_n(n\geq 2)$，

$\because a_1=1$，$a_2=3$，$\therefore a_2\neq 2a_1$

$\therefore a_n=\begin{cases}1,n=1\\3\times 2^{n-2},n\geq 2\end{cases}$，$\therefore S_{2022}=a_1+(a_2+a_3+\cdots+a_{2022})=1+\dfrac{3\times(1-2^{2021})}{1-2}=3\times 2^{2021}-2$.

8.B【解析】由抛物线对称性可知，不妨令 A,B 均在 x 轴上方，令 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

由 $\overrightarrow{HA}=3\overrightarrow{HB}$ 可得：$y_1=3y_2$，

设直线 HA 的方程为：$x=my-1$，与 $y^2=4x$ 联立可得：$y^2-4my+4=0$，$\therefore y_1y_2=4$

解得 $y_1=2\sqrt{3}$，代入 $y^2=4x$ 可得：$x_1=3$，$\therefore\left|\overrightarrow{FA}\right|=x_1+1=4$.

9.ACD【解析】相关系数 $0<r<1$，表示变量 x,y 之间具有正相关关系，所以 A 正确；相关系数 r 的绝对

值越接近 1，说明相关性越强，所以 B 错误；残差是指实际值－估计值，所以 C 正确；R^2 越大，说明残差的平方和越小，即模型的拟合效果越好，所以 D 正确.故选 ACD.

10.BD【解析】根据函数 $f(x)=A\sin(\omega x-\varphi)$，$(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象，可得 $A=2$，

再根据 $f(0)=-2\sin\varphi=1$，$\therefore \sin\varphi=-\frac{1}{2}$，$\therefore \varphi=-\frac{\pi}{6}$，$f(x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$.

$T=\frac{2\pi}{\omega}>\frac{11}{12}\pi\therefore\omega<\frac{24}{11}$，又 $\omega\times\frac{11\pi}{12}+\frac{\pi}{6}=2k\pi,k\in Z$，$\therefore\omega=2$，故 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$.

要使 $g(x)=f(x-a)$ 为奇函数，则 $f(x)$ 的图象关于 $(-a,0)$ 对称，

令 $-2a+\frac{\pi}{6}=k\pi$，$k\in Z$，求得 $-a=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$，故选：BD.

11. ACD【解析】由 $a_{n+1}+a_{n-1}=2a_n-2$，整理得 $a_{n+1}-a_n-(a_n-a_{n-1})=-2,\therefore\{a_n-a_{n-1}\}$ 是公差为 -2 的等差数列，首项 $a_2-a_1=9$，$\therefore a_n-a_{n-1}=13-2n\ (n\ge2)$，由此可得 $a_{n-1}-a_{n-2}=15-2n,\cdots$，$a_3-a_2=7$，$a_2-a_1=9$，累加，得 $a_n=-n^2+12n-32=(n-8)(4-n)=-(n-6)^2+4$，由此可得，$\frac{a_n}{n-8}=4-n,\therefore\left\{\frac{a_n}{n-8}\right\}$ 是等差数列.故 A 正确；a_6 是数列 $\{a_n\}$ 的最大项，故 C 正确；B 不正确；对于两个正整数 m、$n(n>m)$，

$S_n-S_m=a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_n$，由 $a_1<a_2<a_3<a_4=0,0<a_5<a_6,a_6>a_7>a_8=0,0>a_9>a_{10}\ldots$，

故 S_n-S_m 的最大值为 10，故 D 正确.故选：ACD.

12.ABD【解析】A 选项：当 $m=0$ 时，显然 $e^x>\ln x\therefore f(x)>0$，$\therefore f(x)<0$ 无解.

B 选项：$m=3$ 时，$f(x)=e^x-\ln(x+3)$，定义域为 $(-3,+\infty)$，所以 $f'(x)=e^x-\frac{1}{x+3}$，

易知 $f'(x)$ 在定义域 $(-3,+\infty)$ 上是单调递增函数，

又 $f'(-1)<0$，$f'(-\frac{1}{2})>0$，

所以 $f'(x)=0$ 在 $(-3,+\infty)$ 上有唯一的实根，不妨将其设为 x_0，且 $x_0\in(-1,-\frac{1}{2})$，

则 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的最小值点，且 $f'(x_0)=0$，即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0+3}$，两边取以 e 为底的对数，得 $x_0=-\ln(x_0+3)$

故 $f(x)\geqslant f(x_0)=e^{x_0}-\ln(x_0+3)=\frac{1}{x_0+3}-\ln(x_0+3)=\frac{1}{x_0+3}+x_0$，因为 $x_0\in(-1,-\frac{1}{2})$，所以 $2<x_0+3<\frac{5}{2}$，

故 $f(x)\geqslant f(x_0)=\frac{1}{x_0+3}+(x_0+3)-3>2+\frac{1}{2}-3=-\frac{1}{2}$，即对 $\forall x\in(-3,+\infty)$，都有 $f(x)>-\frac{1}{2}$.

C 选项：当 $m=3$ 时，由上述可知，$f(x)=-1$ 无解.

D 选项：$m=2$ 时，$f'(x)=e^x-\frac{1}{x+2}$，$\because f'(-1)<0$，$f'(0)>0$，

故 $f'(x)=0$ 在 $(-2,+\infty)$ 上有唯一实数根 x_0，且 $x_0\in(-1,0)$.

当 $x\in(-2,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(x_0,\ +\infty)$ 时，$f'(x)>0$，从而当 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $f(x_0)$，

$f(x_0)=e^{x_0}-\ln(x_0+2)=\dfrac{(x_0+1)^2}{x_0+2}>0$，$\therefore f(x)>0$，故选：ABD.

13.1【解析】$T_{k+1}=C_6^k\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{6-k}\left(-x^{-1}\right)^k=(-1)^kC_6^kx^{3-\frac{3}{2}k}$，令 $3-\dfrac{3}{2}k=3$，解得 $k=0$，所以 x^3 的系数为 1,

故答案为：1.

14. $7+2\sqrt{6}$

15. $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$【解析】由题意，可得 $BD\perp AD,CD\perp AD,\therefore\angle BDC$ 为二面角 $B-AD-C$ 的平面角，即

$\angle BDC=\dfrac{2\pi}{3}$.在 ΔBCD 中，$BD=CD=\sqrt{2}$，$\angle BDC=\dfrac{2\pi}{3}$，

由余弦定理，可得 $BC=\sqrt{BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cos\angle BDC}=\sqrt{6}$.

又由 $BD\perp AD,CD\perp AD$，$BD\cap CD=D$ 且 $BD,CD\subset$ 平面 BCD，所以 $AD\perp$ 平面 BCD.

设 ΔBCD 外接圆的半径为 r，圆心为 O_1，则 $2r=\dfrac{BC}{\sin\angle BDC}=2\sqrt{2}$，可得 $r=\sqrt{2}$，即 $DO_1=\sqrt{2}$，

设三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的半径为 R，球心为 O，可得 $R^2=DO_1^2+OO_1^2=DO_1^2+(\dfrac{AD}{2})^2=\dfrac{5}{2}$，即

$R=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. 球 O 的半径为 $R=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

16. $\left[\dfrac{1}{4},4\right]$【解析】当 $x\in[-1,1)$ 时，$f(x)\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$，$\because f(x)=2f(x-2)$，即 $f(x)$ 图象每往右平移 2 个单位，则纵坐标伸长为原来的 2 倍，$\therefore$ 当 $a\in[3,5)$ 时，$f(a)\in[-2,2]$.$\therefore g(b)\in[-2,2]$，即

$-2\le\log_2 b\le 2$，$\therefore b\in\left[\dfrac{1}{4},4\right]$.

17.【解析】(1) $f(x)=\sin 2x-\cos 2x-1=\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1$，

故 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，$f(x)$ 的值域为 $\left[-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1\right]$ ....5 分

(2) $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1$，

令 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\le 2x-\dfrac{\pi}{4}\le 2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z$，解得 $x\in\left[k\pi-\dfrac{\pi}{8},k\pi+\dfrac{3\pi}{8}\right],k\in Z$ ....8 分

故 $f(x)$ 的单调增区间为：$\left[k\pi-\dfrac{\pi}{8},k\pi+\dfrac{3\pi}{8}\right],k\in Z$ ....10 分

18.【解析】（1）A 影片。……………………………………2 分

（2）该电影院男观众对 B 影片表示“非常喜爱”的概率为：$P=\frac{300}{600}=\frac{1}{2}$ ………………………4 分

该电影院女观众对 B 影片表示“非常喜爱”的概率为：$P=\frac{100}{300}=\frac{1}{3}$ ………………………6 分

（3）∵女生对 B 影片“非常喜爱”和“一般喜爱”的人数比例为$1:2$，

∴用分层抽样抽取的 6 人中有 2 人表示非常喜爱，这 2 人记为：A,B

有 4 人表示一般喜爱，这 4 人记为：a,b,c,d

∴从 6 人中随机抽取 2 人，总的基本事件为：AB,Aa,Ab,Ac,Ad，Ba,Bb,Bc,Bd，ab,ac,ad，

bc,bd，cd，共 15 种；……………………………………8 分

两人均来自“一般喜爱”所包含的基本事件为：ab,ac,ad，bc,bd，cd，共 6 种，…………………………10 分

∴这两人均来自“一般喜爱”的概率为$P=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$ …………………………………………12 分

19.【解析】（1）∵ $A+B+C=\pi$，∴ $(b-a)(\sin A+\sin B)=\sin C(a+c)$

即$(b-a)(a+b)=c(a+c)$，即$\cos B=-\frac{1}{2}$

∵ $B\in(0,\pi)$，∴ $B=\frac{2\pi}{3}$ ……………………………………4 分

（2）由面积关系可知$\frac{1}{2}ac\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\times 2a\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times 2c\sin\frac{\pi}{3}$

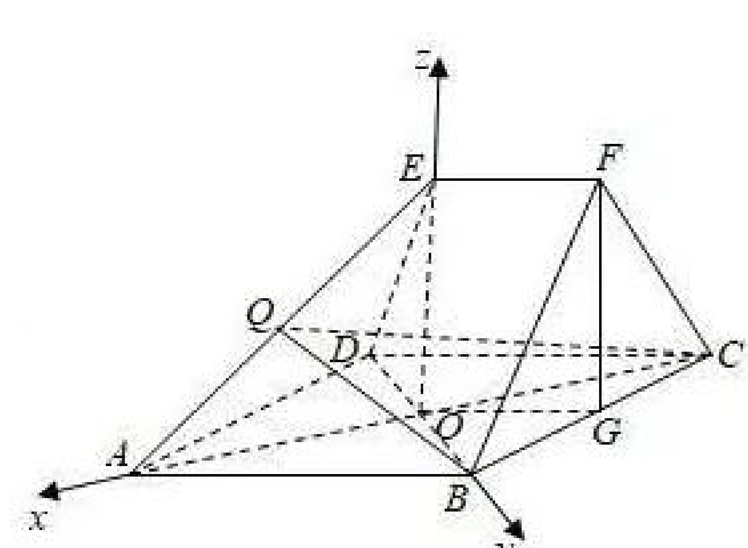
∴ $ac=2a+2c$　所以$1=\frac{2}{a}+\frac{2}{c}$，$b^2=a^2+c^2+ac$，…………………………………………8 分

$a+c=(a+c)\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{c}\right)=4+\frac{2a}{c}+\frac{2c}{a}\geq 8$，当且仅当$a=c=4$时等号成立.

$b^2=a^2+c^2+ac=(a+c)^2-ac=(a+c)^2-2(a+c)=(a+c-1)^2-1\geq 48$，

当$a=c=4$时，b^2有最小值为 48，所以b最小值为$4\sqrt{3}$.…………………………………………12 分

20.【解析】证明：（1）如图，取BC中点G，连接FG，OG，



因为$FB=FC$，所以$FG\perp BC$，

又因为平面$FBC\perp$平面$ABCD$，平面$FBC\cap$平面$ABCD=BC$，

$FG\subset$平面FBC，

所以$FG\perp$平面$ABCD$，O，G分别为AC，BC中点，

所以$OG//AB$，$OG=\frac{1}{2}AB$.因为$EF=\frac{1}{2}AB$，$EF//AB$，

$\therefore EF \underline{\underline{//}} OG$

所以四边形 $EFGO$ 为平行四边形，

所以 $OE//FG$，所以 $OE\perp$ 平面 $ABCD$． ……………………………………………………5 分

（2）如图，以 AC 所在直线为 x 轴，BD 所在直线为 y 轴，OE 所在直线为 z 轴建立空间坐标系，设 $\overrightarrow{OE}=(0,0,c)$,$(c>0)$

$\therefore A(2\sqrt{3},0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(-2\sqrt{3},0,0)$，$Q\left(\sqrt{3},0,\frac{c}{2}\right)$ ……………………………7 分

$F(-\sqrt{3},1,c)$，$\overrightarrow{CF}=(\sqrt{3},1,c)$，$\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\therefore c=\sqrt{6}$，$Q\left(\sqrt{3},0,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

设平面 QBC 的法向量 $\vec{v}=(x,\ y,\ z)$,$\overrightarrow{BC}=(-2\sqrt{3},-2,0)$,$\overrightarrow{BQ}=(\sqrt{3},-2,\frac{\sqrt{6}}{2})$

则 $\begin{cases}\vec{v}\cdot\overrightarrow{BQ}=0\\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2\sqrt{3}x-2y=0\\ \sqrt{3}x-2y+\frac{\sqrt{6}}{2}z=0\end{cases}$，则 $\vec{v}=(1,-\sqrt{3},\ -3\sqrt{2})$ ……………………………9 分

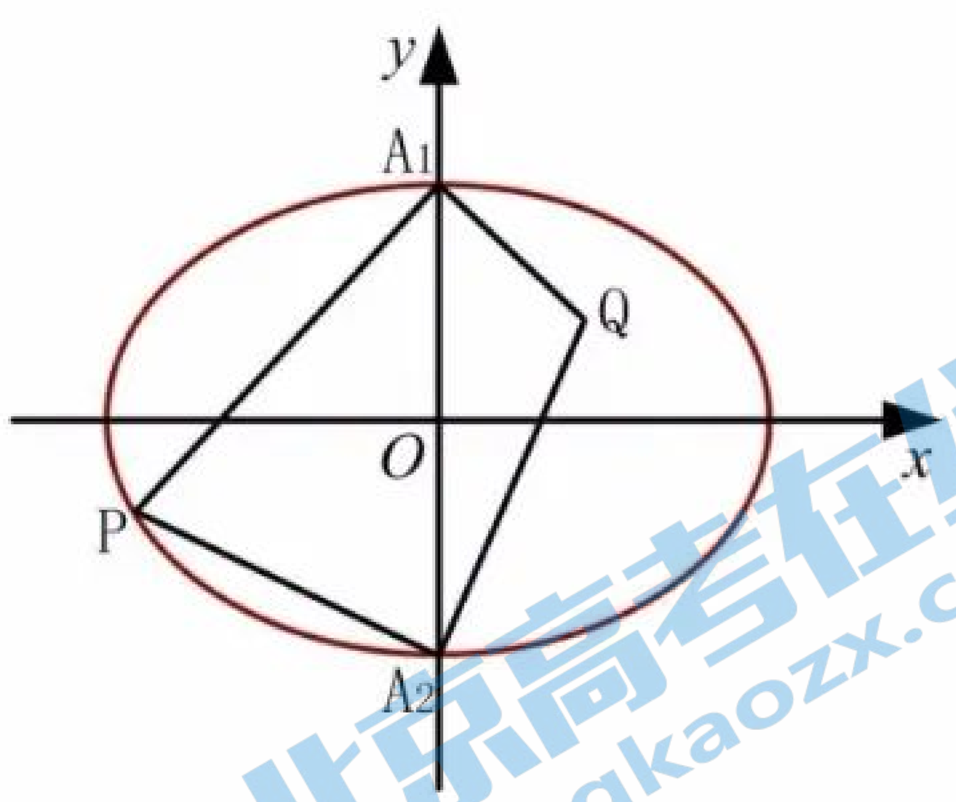
设平面 ABC 的法向量 $\vec{n}=(0,0,1)$，

设二面角 $Q-BC-A$ 的平面角为 θ，θ 为锐角，

所以 $\cos\theta=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{v}|}{|\vec{n}||\vec{v}|}=\frac{3\sqrt{11}}{11}$． …………………………………………………………11 分

二面角 $Q-BC-A$ 的余弦值 $\frac{3\sqrt{11}}{11}$． ………………………………………………………12 分

21.【解析】



（1）设点 $P(x_0,y_0)$，显然 $x_0\neq 0$，$\because \frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1$ $\therefore \frac{x_0^2}{4}=1-\frac{y_0^2}{2}=\frac{2-y_0^2}{2}$，$\therefore \frac{2-y_0^2}{x_0^2}=\frac{1}{2}$

$\therefore k_1k_2=\frac{y_0-\sqrt{2}}{x_0}\times\frac{y_0+\sqrt{2}}{x_0}=\frac{y_0^2-2}{x_0^2}=-\frac{1}{2}$，为定值……………………………………4 分

（2）设点 $Q(x,y),x\neq 0$

$\because QA_1\perp PA_1$，$\therefore k_{QA_1}=-\dfrac{x_0}{y_0-\sqrt{2}}$，$\therefore QA_1$ 的方程：$y=-\dfrac{x_0}{y_0-\sqrt{2}}x+\sqrt{2}$ ①.

$\because QA_2\perp PA_2$，$\therefore k_{QA_2}=-\dfrac{x_0}{y_0+\sqrt{2}}$，$\therefore QA_1$ 的方程：$y=-\dfrac{x_0}{y_0+\sqrt{2}}x-\sqrt{2}$ ②……………………………8 分

由①②联立可得：$x=\dfrac{y_0^2-2}{x_0}=-\dfrac{x_0}{2}$，

代入①可得 $y=-\dfrac{x_0}{y_0-\sqrt{2}}\times\dfrac{y_0^2-2}{x_0}+\sqrt{2}=-(y_0+\sqrt{2})+\sqrt{2}=-y_0$，即点 $Q(-\dfrac{x_0}{2},-y_0)$

$\therefore\begin{cases}x_0=-2x\\ y_0=-y\end{cases}$，$\because$ 点 $P(x_0,y_0)$ 满足：$\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{2}=1$，

$\therefore$ 代入可得 $\dfrac{y^2}{2}+x^2=1$，$\therefore$ 点 Q 的轨迹方程为: $\dfrac{y^2}{2}+x^2=1(x\neq 0)$ ……………………………………………12 分

22.【解析】（1）$f'(x)=x+a-\dfrac{2a^2}{x}=\dfrac{(x-a)(x+2a)}{x},(x>0)$

①若 $a=0$，则 $f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

②若 $a>0$，则 $x\in(0,a)$ 时，$f'(x)<0$，$x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,a)$ 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 单调递增；

③若 $a<0$，则 $x\in(0,-2a)$ 时，$f'(x)<0$，$x\in(-2a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,-2a)$ 单调递减，在 $(-2a,+\infty)$ 单调递增……………………………………………4 分

（2）由（1）知 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 单调递增.

$\because x\to 0^+,f(x)\to+\infty$，$x\to+\infty,f(x)\to+\infty$，$\therefore f(a)=2a^2(\dfrac{3}{4}-\ln a)<0$，即 $a>e^{\frac{3}{4}}$

要证 $f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>0$ 成立，只需要证明：$\dfrac{x_1+x_2}{2}>a$，即证：$x_1+x_2>2a$，即证：$x_2>2a-x_1$ ……6 分

不妨令 $x_1<x_2$，则 $0<x_1<a<x_2$，$\therefore a<2a-x_1<2a$，$\because f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 单调递增，

$\therefore$ 即证：$f(x_1)=f(x_2)>f(2a-x_1)$.即证：$f(x_1)-f(2a-x_1)>0$

令 $h(x)=f(x)-f(2a-x),0<x<a$，$\therefore$ 即证：$h(x)>0,0<x<a$ ……………………………………8 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ＂精益求精、专业严谨＂ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。