2022 北京北师大附中高二（上）期中

数　　学

考生须知	**1.本试卷有三道大题，共 5 页.考试时长 120 分钟，满分 150 分.** **2.考生务必将答案填写在答题纸上，在试卷上作答无效.** **3.考试结束后，考生应将答题纸交回.**

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分，每题均只有一个正确答案）

1. 已知等比数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，公比是-1，则$a_5=$（　　）

A. 1　　　B. 2　　　C. -1　　　D. -2

2. 已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$a_2=6$，则数列$\{a_n\}$的前 5 项和等于（　　）

A　15　　　B. 30　　　C. 45　　　D. 60

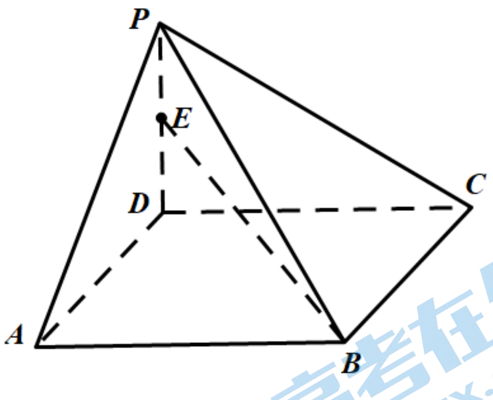
3. 已知向量$\vec{a}=(-2,1,3)$，$\vec{b}=(-1,2,\lambda)$，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则实数λ的值为（　　）

A. $-\frac{4}{3}$　　　B. $-\frac{3}{4}$　　　C. $\frac{4}{3}$　　　D. $\frac{3}{4}$

4. 在空间直角坐标系$O-xzy$中，已知点$A(3,-1,0)$，向量$\overrightarrow{AB}=(4,10,-6)$，则线段$AB$的中点坐标为（　　）

A. $(1,-6,3)$　　　B. $(-1,6,-3)$　　　C. $(5,4,-3)$　　　D. $(2,5,-3)$

5. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是平行四边形，点E是DP的中点.已知$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{DC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{DP}=\vec{c}$，则$\overrightarrow{BE}=$（　　）



A　$\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　　B. $-\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　　C. $\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　　D. $-\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

6. 已知数列$\{a_n\}$首项为 2，满足$a_{n+1}=\frac{a_n-1}{a_n+1}$，则$a_{2022}=$（　　）

A 2　　　　B. -3　　　　C. $\frac{1}{3}$　　　　D. $-\frac{1}{2}$

7. 已知数列$\{a_n\}$，则“存在常数c，对任意的$m,n\in\mathbf{N}^*$，且$m\neq n$，都有$\frac{a_n-a_m}{n-m}=c$”是“数列$\{a_n\}$为等差数列”的

A. 充分而不必要条件　　　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

8. 已知平面α的一个法向量为$\vec{n}=(-2,-2,1)$，点$A(x,3,0)$在平面α内，且$P(-2,1,4)$到平面α的距离为$\frac{10}{3}$，则x的值为（　　）

A. 1　　　　B. 11　　　　C. -1或-11　　　　D. -21

9. 中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题：“三百七十八里关，初行健步不为难，次日脚痛减一半，六朝才得到其关，要见次日行里数，请公仔细算相还.”其意思为：有一个人走378里路，第一天健步行走，从第二天起脚痛每天走的路程为前一天的一半，走了6天后到达目的地，请问第二天走了（　　）

A 192里　　　　B. 96里　　　　C. 48里　　　　D. 24里

10. 在正方体$ABCD-A'B'C'D'$中，E为棱DC上的动点，F为线段$B'E$的中点.给出下列四个结论：

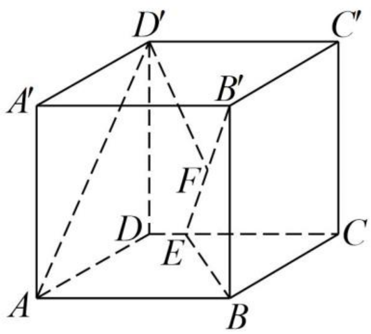
①$B'E\perp AD'$；

②直线$D'F$与平面$ABB'A'$的夹角不变；

③三棱锥$A-BEF$的体积不变；

④点F到A，D，D'，A'四点的距离相等.

其中，所有正确结论的序号为（　　）

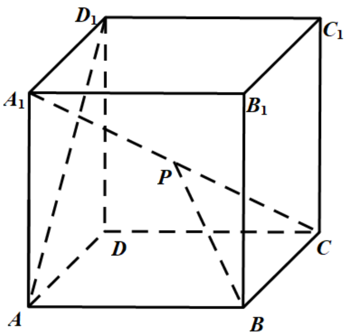


A. ②③　　　　B. ③④　　　　C. ①③④　　　　D. ①②④

二、填空题（每小题5分，共25分）

11. 已知两个向量$\vec{a}=(2,-1,3)$，$\vec{b}=(4,m,n)$，且$\vec{a}//\vec{b}$，则$m:n$的值为______.

12. 如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=2$，$BC=BB_1=1$，P是A_1C的中点，则直线BP与AD_1所成角的余弦值为______.



13. 已知两个等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n和T_n，且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{7n-3}{n+1}$，则$\frac{a_5}{b_5}=$______.

14. 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$\forall n\in \mathrm{N}^*$，$a_{n+1}>a_n$，$S_n\ge S_6$.请写出一个满足条件的数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=$______.

15. 设等差数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_n>0\left(n\in \mathbf{N}^*\right)$，其前$n$项和为$S_n$，若数列$\left\{\sqrt{S_n}\right\}$也为等差数列，则$a_n=$______；$\frac{S_{n+10}}{a_n^2}$的最大值是______.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分.解答时写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16. 已知$\{a_n\}$是等差数列，$a_2=1$，$a_6=9$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

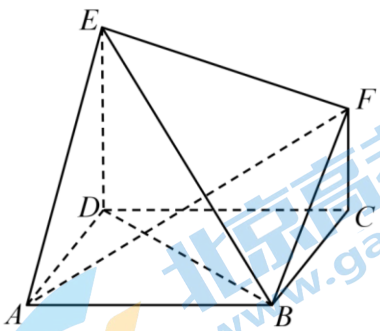
（2）若数列$\{b_n\}$是公比为 3 的等比数列，$b_1=2$.求数列$\{a_n+b_n\}$的前n项和S_n.

17. 已知数列$\{a_n\}$中，前n项和为$S_n=n^2+2n$，$n\in N^*$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\frac{2}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

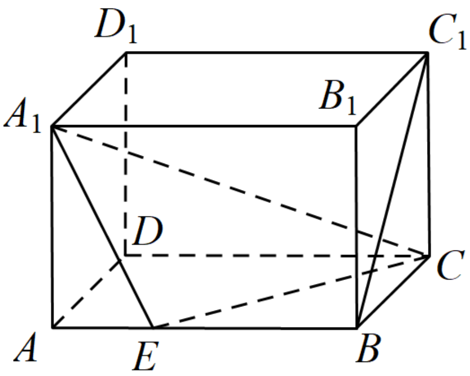
18. 如图，在多面体$ABCDEF$中，$ABCD$为正方形，$DE\perp$平面$ABCD$，$CF // DE$，$DE=DC=2CF=2$.



（1）求证：$BF //$平面ADE；

（2）求直线BD与平面AEF所成角的大小.

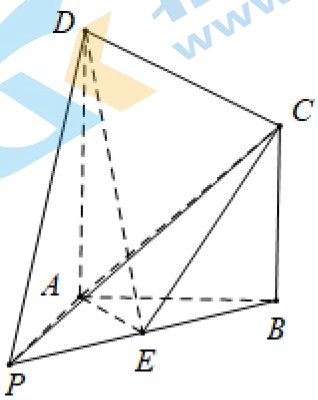
19. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$， $AB=3$， $AD=AA_1=2$，点 E 在 AB 上，且 $AE=1$.



（1）求直线 A_1E 与 BC_1 所成角的余弦值；

（2）求二面角 A_1-EC-D 的余弦值.

20. 如图,四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD\perp$ 平面 ABP , $BC//AD$， $\angle PAB=90^\circ$. $PA=AB=2$, $AD=3$,
$BC=m$, E 是 PB 的中点.



(I)证明: $AE\perp$ 平面 PBC ;

(II)若二面角 $C-AE-D$ 的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,求 m 的值;

(III)若 $m=2$,在线段 AD 上是否存在一点 F ,使得 $PF\perp CE$. 若存在,确定 F 点的位置;若不存在,说明理由.

21. 已知数列 A_n： a_1， a_2， …， $a_n\,(n\geq 2)$ 满足：① $|a_1|=1$； ② $\dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=2\,(k=1,2,\cdots,n-1)$.记

$S(A_n)=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

（1）直接写出 $S(A_3)$ 的所有可能值；

（2）证明： $S(A_n)>0$ 的充要条件是 $a_n>0$；

（3）若 $S(A_n)>0$， 求 $S(A_n)$ 的所有可能值的和.

参考答案

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分，每题均只有一个正确答案）

1. 【答案】B

【解析】

【分析】根据等比数列的通项公式求解.

【详解】由已知得，$a_1=2$，公比 $q=-1$，则 $a_5=a_1\cdot q^4=2\times(-1)^4=2$.

故选：B.

2. 【答案】C

【解析】

【分析】根据已知条件得出公差，代入前 n 项和公式即可.

【详解】由已知得，$d=a_2-a_1=6-3=3$，$S_5=5a_1+\dfrac{5\times4}{2}d=5\times3+10\times3=45$

故选：C.

3. 【答案】A

【解析】

【分析】由题意知，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，代入计算可得.

【详解】$\because \vec{a}\perp\vec{b}$ $\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=(-2,1,3)\cdot(-1,2,\lambda)=2+2+3\lambda=4+3\lambda=0$，

解得，$\lambda=-\dfrac{4}{3}$.

故选：A.

4. 【答案】C

【解析】

【分析】

先根据已知条件求解出 B 点坐标，然后根据中点坐标公式求解出 AB 的中点坐标.

【详解】因为 $A(3,-1,0)$，$\overrightarrow{AB}=(4,10,-6)$，所以 $B(7,9,-6)$，

所以 AB 的中点为 $\left(\dfrac{3+7}{2},\dfrac{-1+9}{2},\dfrac{-6+0}{2}\right)$，即 $(5,4,-3)$，

故选：C.

5. 【答案】B

【解析】

【分析】根据空间向量基本定理，用 $\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DP}$，三个基向量将已知向量表示出来.

【详解】由已知，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DP}$

则，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DP}=-\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

故选：B.

6. 【答案】C

【解析】

【分析】写出数列的前 5 项，即可得出数列$\{a_n\}$是以 4 为周期的数列，则$a_{2022}=a_2=\frac{1}{3}$.

【详解】因为$a_1=2$，所以由已知可得

$$a_2=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}，\quad a_3=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=-\frac{1}{2}，\quad a_4=\frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{2}+1}=-3，\quad a_5=\frac{-3-1}{-3+1}=2.$$

所以数列$\{a_n\}$是以 4 为周期的数列，

所以$a_{2022}=a_2=\frac{1}{3}$.

故选：C.

7. 【答案】C

【解析】

【分析】由等差数列的定义不妨令 $m=n+1$，则有：$a_{n+1}-a_n=c$，可知，数列$\{a_n\}$是以 c 为公差的等差数列，

由等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$，$a_m=a_1+(m-1)d$，（d 为公差）得：$\frac{a_n-a_m}{n-m}=\frac{(n-m)d}{n-m}=d$，

故得解.

【详解】①由已知：“存在常数 c，对任意的 m，$n\in\mathbf{N}^*$，且 $m\neq n$，都有$\frac{a_n-a_m}{n-m}=c$”

不妨令 $m=n+1$，则有：$a_{n+1}-a_n=c$，由等差数列的定义，

可知，数列$\{a_n\}$是以 c 为公差的等差数列，

②由“数列$\{a_n\}$为等差数列”则 $a_n=a_1+(n-1)d$，$a_m=a_1+(m-1)d$，（d 为公差）

所以：$\frac{a_n-a_m}{n-m}=\frac{(n-m)d}{n-m}=d$，

即存在“存在常数 c，对任意的 m，$n\in\mathbf{N}^*$，且 $m\neq n$，都有$\frac{a_n-a_m}{n-m}=c$”此时，$c=d$，

综合①②得：“存在常数 c，对任意的 m，$n\in\mathbf{N}^*$，且 $m\neq n$，都有$\frac{a_n-a_m}{n-m}=c$”

是“数列$\{a_n\}$为等差数列”的充分必要条件，

故选 C.

【点睛】本题考查了数列的定义及等差数列的通项，充分必要条件，属简单题.

8. 【答案】C

【解析】

【分析】先求出$\overrightarrow{PA}$，由题得$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{10}{3}$，即$\dfrac{|-2(x+2)-4-4|}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{10}{3}$,解方程即得解.

【详解】$\overrightarrow{PA}=(x+2,2,-4)$，而$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{10}{3}$，

即$\dfrac{|-2(x+2)-4-4|}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{10}{3}$，

解得$x=-1$或-11.

故选：C

9. 【答案】B

【解析】

【分析】由题可得此人每天走的步数等比数列，根据求和公式求出首项可得.

【详解】由题意可知此人每天走的步数构成$\frac{1}{2}$为公比的等比数列$\{a_n\}$，

由题意和等比数列的求和公式可得$\dfrac{a_1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1-\frac{1}{2}}=378$，解得$a_1=192$，

$\therefore$第此人第二天走$192\times\dfrac{1}{2}=96$里.

故选：B.

10. 【答案】C

【解析】

【分析】根据$B'E$的变化情况并找出F的轨迹就可判定①③④是否正确，作出直线$D'F$与平面$ABB'A'$所成的角，就可判定②是否正确.

【详解】如下图，当E在棱DC上运动时，$B'E$始终在平面$A'B'CD$中，

由$AD'\perp A'D, AD'\perp CD$，$A'D\cap CD=D$，

得$AD'\perp$平面$A'B'CD$，又$B'E\subset$平面$A'B'CD$，所以$B'E\perp AD'$，故①正确，

此时点F的轨迹为线段F_1F_2，如下图可知，$F_1F_2//AB$，

所以F_1F_2到平面ABE的距离为定值h，

由$V_{F-ABE}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABE}h$知三棱锥$F-ABE$的体积不变，

又$V_{A-BEF}=V_{F-ABE}$，所以三棱锥$A-BEF$的体积不变，故③④正确，

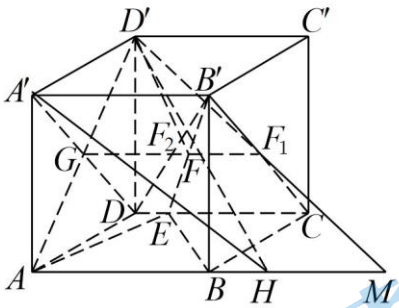
如下图，延长$D'F$与AB的延长线交于H，连接$A'H$，

则 $\angle A'HD'$ 即为直线 $D'F$ 与平面 $ABB'A'$ 所成角，

当点 H 在 BM 上运动时，$A'D'$ 不变而 HD' 在变，

所以 $\sin\angle A'HD' = \dfrac{A'D'}{HD'}$ 不是定值，故②错误.

故选：C.



二、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

11. 【答案】$-\dfrac{1}{3}$

【解析】

【分析】依题意可得 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$，即可得到方程组，解得 m、n、λ，即可得解.

【详解】解：因为 $\vec{a}=(2,-1,3)$，$\vec{b}=(4,m,n)$，且 $\vec{a}//\vec{b}$，

所以 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$，即 $(4,m,n)=\lambda(2,-1,3)$，

所以 $\begin{cases}4=2\lambda\\m=-\lambda\\n=3\lambda\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\lambda=2\\m=-2\\n=6\end{cases}$，所以 $m:n=-\dfrac{1}{3}$.

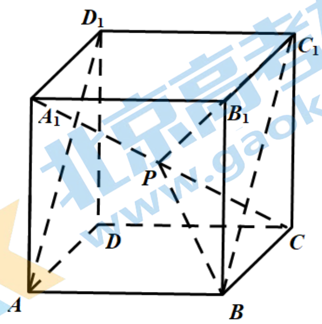
故答案为：$-\dfrac{1}{3}$

12. 【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】构造辅助线，将异面直线平移后相交，在构造的三角形中求解.

【详解】



如图，连结BC_1，PC_1，

由已知可得，$AD_1 // BC_1$，则$\angle PBC_1$或其补角等于直线BP与AD_1所成的角，

BD_1是长方体的体对角线，$BD_1=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$，同理，$AC_1=\sqrt{6}$

由已知，P是长方体的中心，则$BP=\dfrac{1}{2}BD_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$C_1P=\dfrac{1}{2}AC_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

又$BC_1=\sqrt{BC^2+CC_1{}^2}=\sqrt{2}$

于是，在$\triangle PBC_1$中，$\cos\angle PBC_1=\dfrac{BP^2+BC_1{}^2-PC_1{}^2}{2BP\cdot BC_1}=\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}{2\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

故答案为：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

13. 【答案】6

【解析】

【分析】利用等差数列前n项和的性质，将项的比转化为和的比值.

【详解】由已知得，$S_{2n-1}=\dfrac{2n-1}{2}\left(a_1+a_{2n-1}\right)=\left(2n-1\right)a_n$，$T_{2n-1}=\dfrac{2n-1}{2}\left(b_1+b_{2n-1}\right)=\left(2n-1\right)b_n$

令n=5，则$S_9=9a_5$，$T_9=9b_5$，

所以，$\dfrac{a_5}{b_5}=\dfrac{S_9}{T_9}=\dfrac{7\times9-3}{9+1}=6$

故答案为：6.

14. 【答案】$n-6$（答案不唯一）

【解析】

【分析】由题意确定数列的特征，然后结合数列的特征给出满足题意的数列的通项公式即可.

【详解】因为$\forall n\in N^*, a_{n+1}>a_n$，则数列$\{a_n\}$是递增的，

又$\forall n\in N^*, S_n\geq S_6$，

所以S_6最小，数列$\{a_n\}$从第 7 项开始为正，而$a_6\leq 0$，

因此不妨设数列为等差数列，公差为 1，$a_6=0$，

所以，满足条件的数列$\{a_n\}$的一个通项公式$a_n=n-6$.

故答案为：$n-6$（答案不唯一）.

15. 【答案】　①. $2n-1$　②. 121

【解析】

【分析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$2\sqrt{S_2}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_3}$，可得$2\sqrt{2+d}=1+\sqrt{3+3d}$，解得$d$，再利

用等差数列的通项公式、求和公式可得 a_n，S_{n+10}，进而得出.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $2\sqrt{S_2}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_3}$，

$\therefore 2\sqrt{2+d}=1+\sqrt{3+3d}$，解得 $d=2$，

$\therefore a_n=2n-1$

$\therefore S_{n+10}=(n+10)\times 1+\dfrac{(n+10)(n+9)}{2}\times 2=(n+10)^2$，$a_n^2=(2n-1)^2$.

$$\therefore \frac{S_{n+10}}{a_n^{\ 2}}=\frac{(n+10)^2}{(2n-1)^2}=[\frac{\frac{1}{2}(2n-1)+\frac{21}{2}}{(2n-1)}]^2=\frac{1}{4}(1+\frac{21}{2n-1})^2,$$

令 $t=\dfrac{21}{2n-1}>0$，则 $\dfrac{S_{n+10}}{a_n^{\ 2}}=\dfrac{1}{4}(1+t)^2$，在 $t>0$ 时单调递增，$t=\dfrac{21}{2n-1}$ 单调递减，

所以，当 $n=1$ 时该式最大，此时 $\dfrac{S_{n+10}}{a_n^{\ 2}}$ 的为 121.

故答案为：$2n-1$；121.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分.解答时写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16. **【答案】**（1）$a_n=2n-3$

（2）$S_n=3^n+n^2-2n-1$

【解析】

【分析】（1）根据等差数列中的两项，求出首项和公差，即可得出；

（2）先求出等比数列的通项公式，每项分成等差和等比分组求和，结果加起来即可.

【小问 1 详解】

设 $\{a_n\}$ 公差为 d，则由 $a_2=1$，$a_6=9$ 可得，

$$\begin{cases}a_1+d=1\\a_1+5d=9\end{cases} \quad \text{解得，} \quad \begin{cases}a_1=-1\\d=2\end{cases}$$

所以，$a_n=a_1+(n-1)\cdot d=-1+2(n-1)=2n-3$

【小问 2 详解】

由已知，等比数列 $\{b_n\}$ 中，首项 $b_1=2$，公比 $q=3$，

则 $b_n=b_1\cdot q^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}$.

则数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots+(a_n+b_n)$

$$=(a_1+a_2+a_3+\cdots a_n)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)=-n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2+\frac{2(1-3^n)}{1-3}$$

$=3^n+n^2-2n-1$

17. **【答案】**（1）$a_n=2n+1$；（2）$T_n=\dfrac{2n}{6n+9}$.

【解析】

【分析】（1）当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，再检验 $n=1$ 即可；

（2）由（1）可得 $b_n=\dfrac{2}{(2n+1)\cdot(2n+3)}=\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}$，由裂项相消法求得数列的和.

【详解】（1）因为 $S_n=n^2+2n$，

所以当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}=(n-1)^2-(n-1)$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+2n-[(n-1)^2+2(n-1)]=2n+1\left(n\geq 2\right)$，

把 $n=1$ 代入上式得 $a_1=3=S_1$，

故对任意的正整数 n 都有 $a_n=2n+1$.

（2）由（1）可得 $b_n=\dfrac{2}{(2n+1)\cdot(2n+3)}=\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}$，

所以 $T_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2n+3}=\dfrac{2n}{6n+9}$.

18. 【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{\pi}{4}$

【解析】

【分析】（1）设 G 为 DE 的中点，连接 FG，AG，可证 $ABFG$ 为平行四边形，由线面平行的判定定理可证明结论；

（2）以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系，利用空间向量法求解线面角即可.

【小问 1 详解】

设 G 为 DE 的中点，连接 FG，AG，

由已知 $CF // DE$，且 $CF=DG$，

所以四边形 $CFGD$ 是平行四边形，

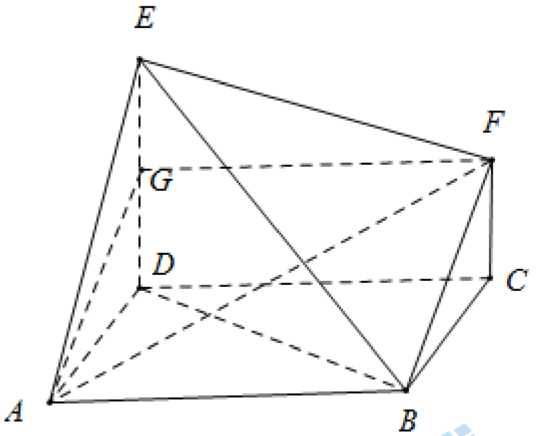
又 $ABCD$ 为正方形，

所以 $ABFG$ 为平行四边形，

所以 $BF // AG$，

又 $AG\subset$ 平面 ADE，$BF\not\subset$ 平面 ADE，

所以 $BF //$ 平面 ADE.



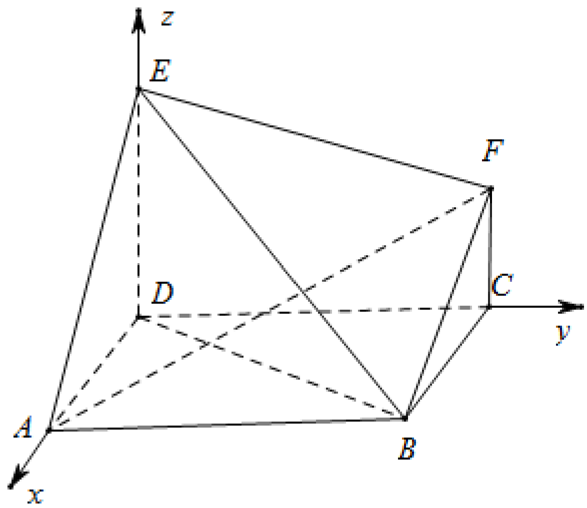
【小问 2 详解】

因为 $ABCD$ 为正方形，$DE\perp$ 平面 $ABCD$，

以 D 为坐标原点建立如图空间直角坐标系，

所以 $A(2,0,0),E(0,0,2)$，$F(0,2,1),B(2,2,0)$，

$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{AE}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{AF}=(-2,2,1)$，



设平面 AEF 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+2z=0,\\ -2x+2y+z=0.\end{cases}$

令 $z=2$，得 $x=2,y=1$.

于是 $\vec{n}=(2,1,2)$.

设直线 BD 与平面 AEF 所成角为 θ，则

$\sin\theta=\left|\cos\left\langle \vec{n},\overrightarrow{DB}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DB}\right|}$，

即 $\sin\theta=\left|\dfrac{(2,1,2)\cdot(2,2,0)}{3\times2\sqrt{2}}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以直线 BD 与平面 AEF 所成的角为 $\dfrac{\pi}{4}$.

19. 【答案】（1）$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

（2）$\dfrac{1}{3}$

【解析】

【分析】（1）由题意，建立空间直角坐标系，写出对应点的坐标，表示出向量 $\overrightarrow{A_1E},\overrightarrow{BC_1}$，利用向量的夹角公式代入计算即可得两直线所成的角；（2）由（1）表示出 $\overrightarrow{EC}$，　求解平面 A_1EC 的法向量为 $\vec{m}$，又因为平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\overrightarrow{DD_1}=(0,0,2)$，代入向量的夹角公式计算，再由图可判断二面角的平面角为锐角，即可得余弦值.

【小问 1 详解】

以 D 为原点，$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$　方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，则

$A_1(2,0,2),E(2,1,0),B(2,3,0),C(0,3,0),C_1(0,3,2)$，

所以 $\overrightarrow{A_1E}=(0,1,-2),\overrightarrow{BC_1}=(-2,0,2)$，所以 $\cos\left\langle\overrightarrow{A_1E},\overrightarrow{BC_1}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{\left|\overrightarrow{A_1E}\right|\left|\overrightarrow{BC_1}\right|}=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

所以直线 A_1E 与 BC_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

小问 2 详解】

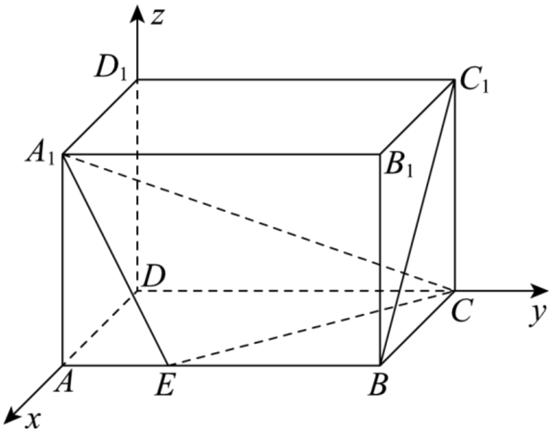
因为 $\overrightarrow{EC}=(-2,2,0)$.

设平面 A_1EC 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{A_1E}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{EC}\cdot\vec{m}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y-2z=0\\ -2x+2y=0\end{cases}$,

得 $\vec{m}=(2,2,1)$，显然 $\overrightarrow{DD_1}=(0,0,2)$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量.

因为 $\cos\left\langle\overrightarrow{DD_1},\vec{m}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{DD_1}\cdot\vec{m}}{\left|\overrightarrow{DD_1}\right|\left|\vec{m}\right|}=\dfrac{1}{3}$，由图可知二面角 A_1-EC-D 的平面角为锐角，

所以二面角 A_1-EC-D 的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$.



20. 【答案】(I)见解析 (II) $m=1$. (III)不存在，见解析

【解析】

【分析】

（I）通过证明 $AE\perp BC, AE\perp PB$，证得 $AE\perp$ 平面 PBC .

（II）建立空间直角坐标系，利用二面角 $C-AE-D$ 的余弦值列方程，解方程求得 m 的值.

（III）设出 F 点的坐标，利用 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{CE}=0$ 列方程，推出矛盾，由此判断满足条件的 F 点不存在.

【详解】(I)证明:因为 $AD\perp$ 平面 PAB , $BC // AD$,

所以 $BC\perp$ 平面 PAB .

又因为 $AE\subset$ 平面 PAB ,所以 $AE\perp BC$. 在 ΔPAB 中, $PA=AB$, E 是 PB 的中点,

所以 $AE\perp PB$.

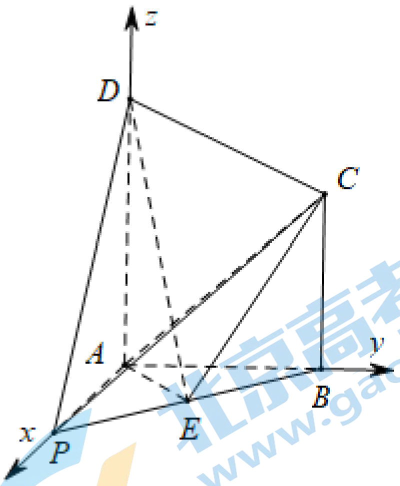
又因为 $BC\cap PB=B$,所以 $AE\perp$ 平面 PBC .

(II)解:因为 $AD\perp$ 平面 PAB ,

所以 $AD\perp AB$, $AD\perp PA$.

又因为 $PA\perp AB$,

所以 如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$.



则 $A(0,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,2,m)$, $E(1,1,0)$,

$P(2,0,0)$, $D(0,0,3)$,

$\overrightarrow{AC}=(0,2,m)$, $\overrightarrow{AE}=(1,1,0)$.

设平面 AEC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$.

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}2y+mz=0,\\ x+y=0.\end{cases}$ 令 $x=1$,则 $y=-1$, $z=\dfrac{2}{m}$,

于是 $\vec{n}=(1,-1,\dfrac{2}{m})$.

因为 $AD\perp$ 平面 PAB,所以 $AD\perp PB$. 又 $PB\perp AE$,

所以 $PB\perp$ 平面 AED.

又因为 $\overrightarrow{PB}=(-2,2,0)$,

所以 取平面 AED 的法向量为 $\vec{m}=(-1,1,0)$.

所以 $|\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle|=\left|\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

即 $\dfrac{|-1-1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\dfrac{4}{m^2}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,解得 $m^2=1$.

又因为 $m>0$,所以 $m=1$.

(III)结论:不存在.理由如下:

证明:设 $F(0,0,t)$ $(0\le t\le 3)$.

当 $m=2$ 时, $C(0,2,2)$.

$\overrightarrow{PF}=(-2,0,t)$, $\overrightarrow{CE}=(1,-1,-2)$.

由 $PF\perp CE$ 知, $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{CE}=0$, $-2-2t=0$, $t=-1$.这与 $0\le t\le 3$ 矛盾.

所以,在线段 AD 上不存在点 F ,使得 $PF\perp CE$.

【点睛】本小题主要考查线面垂直 证明，考查根据二面角的余弦值求参数，考查存在性问题的求解，考查空间想象能力和逻辑推理能力，属于中档题.

21. 【答案】(1) 所有可能值是 -7，-5，-3，-1，1，3，5，7；(2) 证明见解析；(3) 2^{2n-2}.

【解析】

【分析】

(1) 根据递推关系式以及求和式子即可得出结果.

(2) 充分性：求出数列的通项公式，再利用等比数列的前 n 和公式可证；必要性：利用反证法即可证明.

(3) 列出 A_n 中的项，得出数列的规律：每一个数列前 $n-1$ 项与之对应项是相反数的数列，即可求解.

【详解】解：(1) $S(A_3)$ 的所有可能值是 -7，-5，-3，-1，1，3，5，7.

（2）充分性：若 $a_n>0$，即 $a_n=2^{n-1}$

所以满足 $a_n=2^{n-1}$，且前 n 项和最小的数列是 -1，-2，-4，…，-2^{n-2}，2^{n-1}.

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_n\geq -\left(1+2+4+\cdots+2^{n-2}\right)+2^{n-1}$

$$=-\frac{1-2^{n-2}\cdot 2}{1-2}+2^{n-1}=1.$$

所以 $S\left(A_n\right)>0$.

必要性：若 $S\left(A_n\right)>0$，即 $a_1+a_2+\cdots+a_n>0$.

假设 $a_n<0$，即 $a_n=-2^{n-1}$

所以 $S\left(A_n\right)=a_1+a_2+\cdots+a_n\leq\left(1+2+4+\cdots+2^{n-2}\right)-2^{n-1}=-1<0$，

与已知 $S\left(A_n\right)>0$ 矛盾.

所以 $S\left(A_n\right)>0$.

综上所述，$S\left(A_n\right)>0$ 的充要条件是 $a_n>0$.

（3）由（2）知，$S\left(A_n\right)>0$ 可得 $a_n>0$.所以 $a_n=2^{n-1}$.

因为数列 A_n：a_1，a_2，…，$a_n\left(n\geq 2\right)$ 中 a_1 有 -1，1 两种，a_2 有 -2，2 两种，

a_3 有 -4，4 两种，…，a_{n-1} 有 -2^{n-2}，2^{n-2} 两种，a_n 有 2^{n-1} 一种，

所以数列 A_n：a_1，a_2，…，$a_n\left(n\geq 2\right)$ 有 2^{n-1} 个，

且在这 2^{n-1} 个数列中，每一个数列都可以找到前 $n-1$ 项与之对应项是相反数的数列.

所以这样的两数列的前 n 项和是 $2\times 2^{n-1}$.

所以这 2^{n-1} 个数列的前 n 项和是 $2\times 2^{n-1}\times\frac{1}{2}\times 2^{n-1}=2^{2n-2}$.

所以 $S\left(A_n\right)$ 的所有可能值的和是 2^{2n-2}.

【点睛】关键点点睛：本题考查了等比数列的通项公式、求和公式，解题的关键是根据递推关系式得出数列 A_n 的通项公式，注意讨论，此题也考查了数列不等式、反证法在数列中的应用.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。