绝密★启用前

2024年茂名市高三年级第一次综合测试

数学试卷

试卷共4页,22小题,满分150分。考试用时120分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡右上角"条形码粘贴处"。
2. 作答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案,答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答,答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上;如需改动,先划掉原来的答案,然后再写上新的答案;不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后,请将答题卡交回。

一、单选题:本大题共8小题,每小题5分,满分40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{0,1,2,3\}$, $B=\{-1,0,1\}$, $C=A\cap B$,则集合 C 的子集个数为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 8

2. "$x<1$"是"$x^2-4x+3>0$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 从6名女生3名男生中选出2名女生1名男生,则不同的选取方法种数为

A. 33　　B. 45　　C. 84　　D. 90

4. 曲线 $f(x)=e^x+ax$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与直线 $y=2x$ 平行,则 $a=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

5. 椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,过 F_1 作垂直于 x 轴的直线 l,交 C 于 A,B 两点,若 $|AB|=|F_1F_2|$,则 C 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　B. $\sqrt{2}-1$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}-1$　　D. $2-\sqrt{2}$

6. 函数 $y=f(x)$ 和 $y=f(x-2)$ 均为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,若 $f(1)=2$,则 $f(2\,023)=$

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 2

7. 若 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$, $6\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=5\cos 2\alpha$,则 $\sin 2\alpha=$

A. $\frac{24}{25}$　　B. $\frac{12}{25}$　　C. $\frac{7}{25}$　　D. $\frac{1}{5}$

8. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=8$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{na_n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$, $b_n=\left(\frac{1}{a_n}+\lambda\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$,若数列 $\{b_n\}$ 是递减数列,则实数 λ 的取值范围是

A. $\left(-\frac{8}{7},+\infty\right.$　　B. $\left(-\frac{7}{8},+\infty\right)$　　C. $\left(\frac{8}{7},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{7}{8},+\infty\right)$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9. 若 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+1$ 是区间 $(m-1,m+4)$ 上的单调函数，则实数 m 的值可以是

A. -4　　B. -3　　C. 3　　D. 4

10. 过抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点 F 作直线 l，交 C 于 A,B 两点，则

A. C 的准线方程为 $x=-2$

B. 以 AB 为直径的圆与 C 的准线相切

C. 若 $|AB|=5$，则线段 AB 中点的横坐标为 $\frac{3}{2}$

D. 若 $|AB|=4$，则直线 l 有且只有一条

11. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别为棱 AB,BC 的中点，则

A. 直线 EF 与 BC_1 所成的角为 $60°$

B. 过空间中一点有且仅有两条直线与 A_1B_1,A_1D_1 所成的角都是 $60°$

C. 过 A_1,E,F 三点的平面截该正方体，所得截面图形的周长为 $3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$

D. 过直线 EF 的平面截正方体，所得截面图形可以是五边形

12. 从标有 $1,2,3,\cdots,10$ 的 10 张卡片中，有放回地抽取两张，依次得到数字 a,b，记点 $A(a,b)$，$B(1,-1)$，$O(0,0)$，则

A. $\angle AOB$ 是锐角的概率为 $\frac{9}{20}$

B. $\angle BAO$ 是锐角的概率为 $\frac{9}{100}$

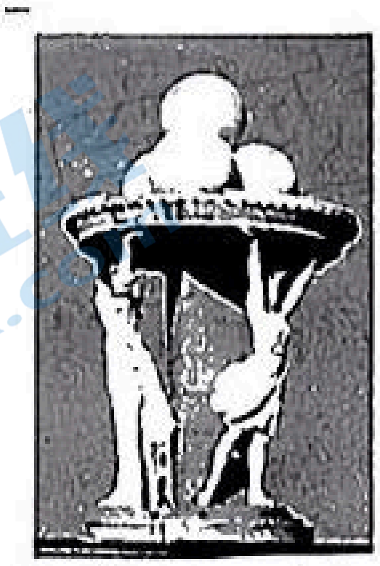
C. $\triangle AOB$ 是锐角三角形的概率为 $\frac{9}{100}$

D. $\triangle AOB$ 的面积不大于 5 的概率为 $\frac{9}{20}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知复数 $z=\frac{2}{1+i}$，其中 i 为虚数单位，则 $\bar{z}=$________.

14. 如图，茂名的城市雕像“希望之泉”是茂名人为了实现四个现代化而努力奋斗的真实写照. 被托举的四个球堆砌两层放在平台上，下层 3 个，上层 1 个，两两相切. 若球的半径都为 a. 则上层的最高点离平台的距离为____



15. 动点 P 与两个定点 $O(0,0)$，$A(0,3)$ 满足 $|PA|=2|PO|$，则点 P 到直线 $l:mx-y+4-3m=0$ 的距离的最大值为________.

16. 函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 上有且只有两个零点，则 ω 的取值范围是________.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (10 分)在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，已知$a\cos B-b\cos A-a+c=0$.

(1)求B的值；

(2)若M为AC的中点，且$a+c=4$，求BM的最小值.

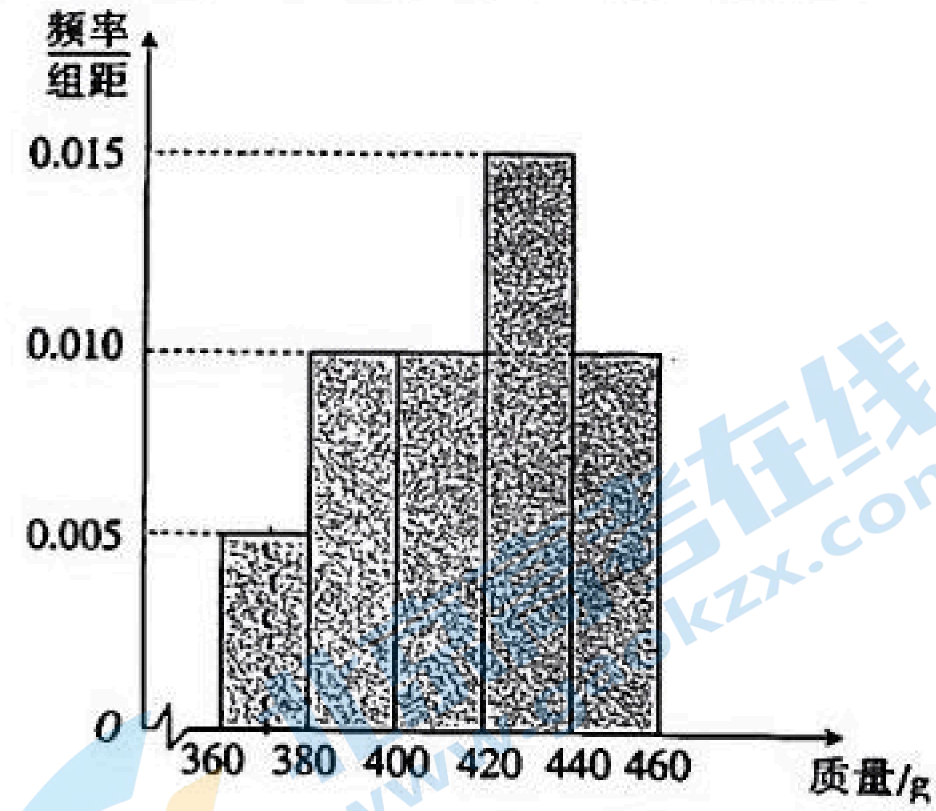
18. (12 分)已知某种业公司培育了新品种的软籽石榴，从收获的果实中随机抽取了 50 个软籽石榴，按质量(单位：g)将它们分成 5 组：[360,380)，[380,400)，[400,420)，[420,440)，[440,460]，得到如下频率分布直方图.

(1)用样本估计总体，求该品种石榴的平均质量；(同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)

(2)按分层随机抽样，在样本中，从质量在区间[380,400)，[400,420)，[420,440)内的石榴中抽取 7 个石榴进行检测，再从中抽取 3 个石榴作进一步检测.

(i)已知抽取的 3 个石榴不完全来自同一区间，求这 3 个石榴恰好来自不同区间的概率；

(ii)记这 3 个石榴中质量在区间[420,440)内的个数为X，求X的分布列与数学期望.



19. (12 分)已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，数列$\left\{\dfrac{S_n}{n(n+1)}\right\}$是首项为$\dfrac{1}{2}$、公差为$\dfrac{1}{3}$的等差数列.

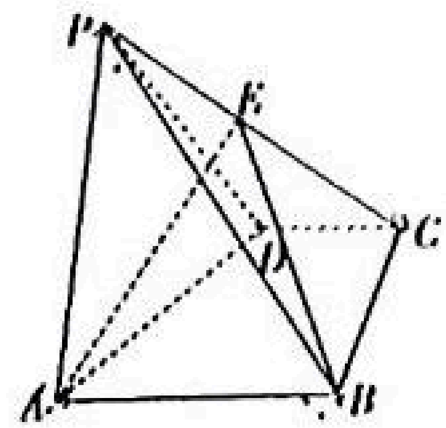
(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)令$b_n=\dfrac{(2n-1)a_n}{S_n}$，$T_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项积，证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}T_i\leqslant\dfrac{6^n-1}{5}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

20. (12 分)如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$,$AB//CD$,$AB\perp BC$,$PD=AB=2CD=2$,$BC=\sqrt{2}$,$\angle PDC=120°$.

(1)证明:$PB\perp AD$;

(2)点 E 在线段 PC 上,当直线 AE 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 时,求平面 ABE 与平面 PBC 的夹角的余弦值.



21. (12 分)已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3}=1(a>0)$ 的左焦点为 F,A,B 分别为双曲线的左、右顶点,顶点到双曲线的渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求 E 的标准方程;

(2)过点 B 的直线与双曲线左支交于点 P(异于点 A),直线 BP 与直线 $l:x=-1$ 交于点 M,$\angle PFA$ 的角平分线交直线 l 于点 N,证明:N 是 MA 的中点.

22. (12 分)若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义,且对于任意不同的 $x_1,x_2\in[a,b]$,都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<k|x_1-x_2|$,则称 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的"k 类函数".

(1)若 $f(x)=\frac{x^2}{2}+x$,判断 $f(x)$ 是否为 $[1,2]$ 上的"3 类函数";

(2)若 $f(x)=a(x-1)e^x-\frac{x^2}{2}-x\ln x$ 为 $[1,e]$ 上的"2 类函数",求实数 a 的取值范围;

(3)若 $f(x)$ 为 $[1,2]$ 上的"2 类函数",且 $f(1)=f(2)$,证明:$\forall x_1,x_2\in[1,2]$,$|f(x_1)-f(x_2)|<1$.

2024 年茂名市高三年级第一次综合测试

数学参考答案

一、单选题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	B	C	A	A	C	D

二、多选题

题号	9	10	11	12
答案	CD	BCD	ACD	ACD

1.【答案】C

【解析】集合 $A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{-1,0,1\}$，则 $C=A\cap B=\{0,1\}$，所以集合 C 的子集个数为 $2^2=4$. 故选 C.

2.【答案】A

【解析】解不等式 $x^2-4x+3>0$ 得 $x>3$ 或 $x<1$，所以"$x<1$"是"$x^2-4x+3>0$"的充分不必要条件. 故选 A.

3.【答案】B

【解析】$C_6^2C_3^1=45$. 故选 B.

4.【答案】C

【解析】因为 $f'(x)=e^x+a$，所以 $f'(0)=e^0+a=1+a=2$，所以 $a=1$. 故选 C.

5.【答案】A

【解析】因为 $F_1(-c,0)$，因为直线 l 垂直于 x 轴，令 $x=-c$，代入椭圆方程可得 $\frac{(-c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，解得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$，所以 $|AB|=\frac{2b^2}{a}$，因为 $|AB|=|F_1F_2|$，所以 $\frac{2b^2}{a}=2c$，即 $\frac{a^2-c^2}{a}=c$，即 $c^2+ac-a^2=0$，所以 $e^2+e-1=0$，解得 $e=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 故选 A.

6.【答案】A

【解析】因为 $y=f(x-2)$ 为奇函数，所以 $y=f(x)$ 关于 $(-2,0)$ 对称，又 $y=f(x)$ 关于原点对称，所以 $y=f(x)$ 的周期为 4，所以 $f(2\,023)=f(-1+2\,024)=f(-1)=-f(1)=-2$. 故选 A.

7.【答案】C

【解析】令 $t=\frac{\pi}{4}-\alpha$，$t\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，得 $\alpha=t-\frac{\pi}{4}$，则 $6\tan t+4\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=5\cos\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)$，即 $6\tan t+4\sin t=5\sin 2t=10\sin t\cos t$，即 $(5\cos t+3)(\cos t-1)=0$，且 $\cos t<0$，那么 $\cos t=-\frac{3}{5}$，则 $\sin 2\alpha=\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2t=1-2\cos^2 t=\frac{7}{25}$. 故选 C.

8.【答案】D

【解析】由题意，$a_{n+1}=\frac{a_n}{na_n+1}$，两边取倒数可化为 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{na_n+1}{a_n}=\frac{1}{a_n}+n$，所以 $\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=1$，$\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}=2$，$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=n-1$，由累加法可得，$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}=1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$，因为 $a_1=8$，所以 $\frac{1}{a_n}=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{1}{8}=\frac{(2n-1)^2}{8}$，所以 $b_n=\left(\frac{1}{a_n}+\lambda\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left[\frac{(2n-1)^2}{8}+\lambda\right]\left(\frac{1}{2}\right)^n$，因为数列 $\{b_n\}$ 是递减数列，故 $b_n<b_{n-1}$，即 $\left[\frac{(2n-1)^2}{8}+\lambda\right]\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$<\left[\frac{(2n-3)^2}{8}+\lambda\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，整理可得，$\lambda>\frac{-4n^2+20n-17}{8}=\frac{-4\left(n-\frac{5}{2}\right)^2+8}{8}$，因为 $n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*$，所以

$\left(\frac{-4\left(n-\frac{5}{2}\right)^2+8}{8}\right)_{\max}=\frac{-4\times\left(2-\frac{5}{2}\right)^2+8}{8}=\frac{7}{8}$，故 $\lambda\in\left(\frac{7}{8},+\infty\right)$. 故选 D.

9.【答案】CD

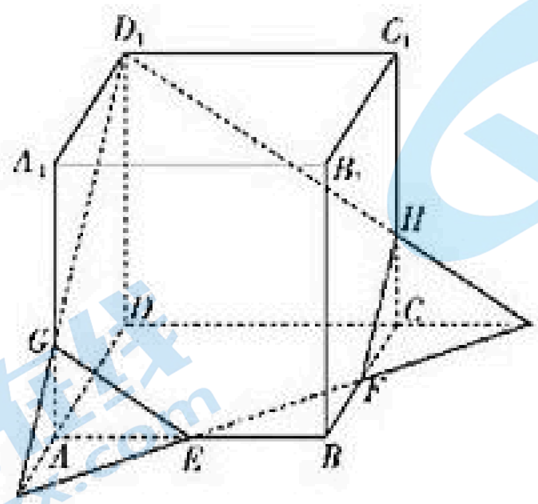
【解析】由题意，$f'(x)=-x^2+x+2=-(x-2)(x+1)$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(2,+\infty)$ 上单调递减，在 $(-1,2)$ 上单调递增，若函数 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+1$ 在区间 $(m-1,m+4)$ 上单调，则 $m+4\leqslant-1$ 或 $m-1\geqslant2$ 或 $\begin{cases}m-1\geqslant-1,\\m+4\leqslant2,\end{cases}$ 解得 $m\leqslant-5$ 或 $m\geqslant3$ 或 $m\subset\varnothing$，即 $m\leqslant-5$ 或 $m\geqslant3$. 故选 CD.

10.【答案】BCD

【解析】因为抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$，所以 $p=2$，准线方程为 $x=-1$，A 错误；过 A，B 和 AB 的中点 P 分别做准线的垂线 AA'，BB'，PP'，则 $|PP'|=\frac{|AA'|+|BB'|}{2}=\frac{|AF|+|BF|}{2}=\frac{|AB|}{2}$，连接 $P'A$，$P'B$，因为 $|PP'|=\frac{|AB|}{2}$，所以 $\angle AP'B=90^\circ$，以 AB 为直径的圆与准线相切于点 P'，B 正确；抛物线的焦点为 $F(1,0)$，设 A，B 两点坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，由抛物线的焦半径公式可知 $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p$，若 $|AB|=5$，又因为 $p=2$，此时 $x_1+x_2=3$，则线段 AB 中点的横坐标为 $\frac{3}{2}$，C 正确；因为 $|AB|=|AA'|+|BB'|=2|PP'|\geqslant2p=4$，当且仅当 $AB\perp x$ 轴时等号成立，所以 $|AB|_{\min}=2p=4$，若 $|AB|=4$，则这样的直线 l 有且只有一条，此时 $AB\perp x$ 轴，D 正确. 故选 BCD.

11.【答案】ACD

【解析】EF 与 BC_1 所成的角即为 A_1C_1 与 BC_1 所成的角，为 60°，A 正确；因为直线 A_1B_1，A_1D_1 所成角是 90°，所以过空间一点与两直线所成角为 60° 的直线有 4 条，B 错误；易知平面 A_1EFC_1 为过 A_1，E，F 三点的截面，该截面为梯形，周长为 $\sqrt{2}+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{5}=3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$，C 正确；对于 D，如图所示，取 AA_1，CC_1 的靠近 A，C 的三等分点 G，H，连接 GD_1，GE，HD_1，HF，易知 $GE/\!/HD_1$，$HF/\!/GD_1$，故点 D_1，G，E，F，H 共面，该截面图形为五边形，D 正确. 故选 ACD.



12.【答案】ACD

【解析】易知 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 不共线，若 $\angle AOB$ 是锐角，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=a-b>0$，易知 $A(a,b)$ 共有 100 种情况，其中 $a=b$ 共有 10 种，$a>b$ 与 $a<b$ 有相同种情况，即 45 种，所以 $\angle AOB$ 是锐角的概率为 $\frac{45}{100}=\frac{9}{20}$，A 正确；若 $\angle BAO$ 是锐角，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=a^2-a+b^2+b>0$ 恒成立，所以 $\angle BAO$ 是锐角的概率为 1，B 错误；若 $\triangle AOB$ 是锐角三角形，则 $\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>0,\\\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}>0,\\\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a-b>0,\\a-b<2,\\a^2-a+b^2+b>0,\end{cases}$ 所以 $a-b=1$，共有 9 种情况，所以 $\triangle AOB$ 是锐角三角形的概率为 $\frac{9}{100}$，C 正

确；若 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\angle AOB=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sqrt{1-\cos^2\angle AOB}=\frac{1}{2}|a+b|\leqslant 5$，则 $a+b\leqslant 10$，易知该不等式共有 C_{10}^2 组正整数解，所以 $\triangle AOB$ 的面积不大于 5 的概率为 $\frac{9}{20}$，D 正确. 故选 ACD.

13.【答案】$1+i$

【解析】$\because z=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$，$\therefore \bar{z}=1+i$.

14.【答案】$\frac{2\sqrt{6}+6}{3}a$

【解析】依次连接四个球的球心 O_1,O_2,O_3,O_4，则四面体 $O_1-O_2O_3O_4$ 为正四面体，且边长为 $2a$，所以 O_1 到底面 $O_2O_3O_4$ 的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}a$，所以最高点到平台的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}a+2a=\frac{2\sqrt{6}+6}{3}a$.

15.【答案】$2+\sqrt{34}$

【解析】设点 $P(x,y)$，因为 $|PA|=2|PO|$，所以 $\sqrt{x^2+(y-3)^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$，化简得 $x^2+(y+1)^2=4$，所以点 P 的轨迹为以 $(0,-1)$ 为圆心，2 为半径的圆. 又因为直线 $mx-y+4-3m=0$ 过定点 $(3,4)$，所以点 P 到直线 $mx-y+4-3m=0$ 的距离的最大值为点 $(0,-1)$ 到 $(3,4)$ 的距离加上圆的半径，故最大值为 $2+\sqrt{34}$.

16.【答案】$\left(\frac{11}{3},5\right)\cup\left(\frac{17}{3},\frac{23}{3}\right]$

【解析】由于 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 上有且只有两个零点，所以 $\frac{T}{2}<\frac{\pi}{3}<\frac{3T}{2}$，即 $\frac{\pi}{\omega}<\frac{\pi}{3}<\frac{3\pi}{\omega}\Rightarrow 3<\omega<9$，由 $f(x)=0$ 得，$\omega x+\frac{\pi}{6}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$\because x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \omega x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{6},\frac{\pi\omega}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$，$\therefore \begin{cases}\frac{\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{6}<\pi,\\ 2\pi<\frac{\pi\omega}{2}+\frac{\pi}{6}\leqslant 3\pi\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\pi\leqslant\frac{\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{6}<2\pi,\\ 3\pi<\frac{\pi\omega}{2}+\frac{\pi}{6}\leqslant 4\pi.\end{cases}$ 解得 $\frac{11}{3}<\omega<5$ 或 $\frac{17}{3}<\omega\leqslant\frac{23}{3}$，所以 ω 的取值范围是 $\left(\frac{11}{3},5\right)\cup\left(\frac{17}{3},\frac{23}{3}\right]$.

17. 解：(1) 由正弦定理及 $a\cos B-b\cos A-a+c=0$，

得 $\sin A\cos B-\sin B\cos A-\sin A+\sin C=0$，(1 分)

又 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，(2 分)

所以 $2\sin A\cos B-\sin A=0$，(3 分)

又 $A\in(0,\pi)$，$\therefore \sin A\neq 0$，$\therefore 2\cos B-1=0$，即 $\cos B=\frac{1}{2}$，(4 分)

又 $B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$. (5 分)

(2) 由 $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ 及 $a+c=4$，

所以 $\overrightarrow{BM}^2=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)^2$

$=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2+2\times\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$=\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}ac\cos B=\frac{1}{4}[(a+c)^2-ac]$

$\geqslant\frac{1}{4}\left[(a+c)^2-\left(\frac{a+c}{2}\right)^2\right]$

$=\frac{3}{16}(a+c)^2=3$. (9 分)

当且仅当 $a=c=2$ 时等号成立，所以 BM 的最小值为 $\sqrt{3}$. (10 分)

18. 解：(1)该品种石榴的平均质量为 $\bar{x}=20\times[370\times0.005+(390+410+450)\times0.010+430\times0.015]=416$，

所以该品种石榴的平均质量为 416 g.（3 分）

(2)由题可知，这 7 个石榴中，质量在 $[380,400)$、$[400,420)$，$[420,440)$ 上的频率比为 $0.010:0.010:0.015=2:2:3$，所以抽取的质量在 $[380,400)$，$[400,420)$、$[420,440)$ 上的石榴个数分别为 2，2，3.（4 分）

(i)记 A =“抽取的 3 个石榴不完全来自同一区间”，B =“这 3 个石榴恰好来自不同区间”，

则 $P(A)=\dfrac{C_7^3-C_3^3}{C_7^3}=\dfrac{34}{35}$，$P(AB)=\dfrac{C_2^1C_2^1C_3^1}{C_7^3}=\dfrac{12}{35}$，

所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{12}{35}}{\frac{34}{35}}=\dfrac{6}{17}$，

即这 3 个石榴恰好来自不同区间的概率为 $\dfrac{6}{17}$.（7 分）

(ii)由题意 X 的所有可能取值为 0，1，2，3，

则 $P(X=0)=\dfrac{C_4^3}{C_7^3}=\dfrac{4}{35}$，$P(X=1)=\dfrac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\dfrac{18}{35}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}=\dfrac{12}{35}$，$P(X=3)=\dfrac{C_3^3}{C_7^3}=\dfrac{1}{35}$.（10 分）

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

（11 分）

所以 $E(X)=0\times\dfrac{4}{35}+1\times\dfrac{18}{35}+2\times\dfrac{12}{35}+3\times\dfrac{1}{35}=\dfrac{9}{7}$.（12 分）

19. (1)解：由于 $\dfrac{S_n}{n(n+1)}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}(n-1)=\dfrac{2n+1}{6}$，（1 分）

则 $S_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，（2 分）

当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$，则 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2$，$n\geqslant2$；（4 分）

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1$ 符合上式，则 $a_n=n^2$，$n\in\mathbf{N}^*$.（5 分）

(2)证明：由于 $b_n=6\cdot\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{2n-1}{2n+1}$，（6 分）

那么 $T_n=6^n\cdot\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\cdots\cdot\dfrac{n}{n+1}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{5}\times\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)$

$=\dfrac{6^n}{(n+1)(2n+1)}$，（9 分）

$\because(n+1)(2n+1)-6\geqslant0$，$\therefore T_n\leqslant6^{n-1}$，（10 分）

那么 $\sum\limits_{i=1}^{n}T_i\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}6^{i-1}=\dfrac{1-6^n}{1-6}=\dfrac{6^n-1}{5}$，即证.（12 分）

20. (1)证明：由于平面 $PDC\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PDC\cap$ 平面 $ABCD=CD$，

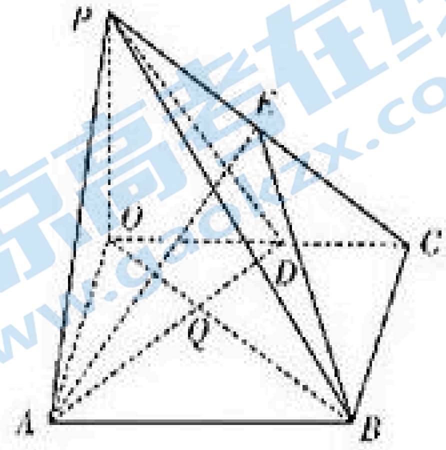
过点 P 作 CD 的垂线交 CD 的延长线于点 O，则 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.

连接 OB 交 AD 于 Q，连接 OA，

$\because PD=2$，$\angle PDC=120°$，

$\therefore OD=1$，$\therefore OC=AB=2$，（1 分）

又 $AB//CD$，$\angle ABC=90^\circ$，



$\therefore$ 四边形 $ABCO$ 为矩形，

$\therefore OA=BC=\sqrt{2}$，

$\therefore \dfrac{OD}{OA}=\dfrac{OA}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ODA\sim \mathrm{Rt}\triangle AOB$，(2 分)

$\therefore \angle OAD=\angle ABO$，

又$\because \angle OAD+\angle DAB=90^\circ$，

$\therefore \angle AQB=90^\circ$，即 $AD\perp OB$，(3 分)

又 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore PO\perp AD$，又 $PO\cap BO=O$，(4 分)

$\therefore AD\perp$ 平面 POB，又$\because PB\subset$ 平面 POB，

$\therefore AD\perp PB$.(5 分)

(2)解：以 O 为坐标原点，OA，OC，OP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $P(0,0,\sqrt{3})$，$C(0,2,0)$，$A(\sqrt{2},0,0)$，$B(\sqrt{2},2,0)$，由于 E 在 PC 上，设 $\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PC}$，则 $E(0,2\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$，

$\therefore \overrightarrow{AE}=(-\sqrt{2},2\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$，(6 分)

又平面 $ABCD$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，设直线 AE 与平面 $ABCD$ 所成角为 θ，

$\therefore \sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AE},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda|}{\sqrt{2+4\lambda^2+(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，(7 分)

解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 或 $\lambda=\dfrac{5}{2}$(舍去)，(8 分)

$\therefore E\left(0,1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\therefore \overrightarrow{BA}=(0,-2,0)$，$\overrightarrow{BE}=\left(-\sqrt{2},-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{2},0,0)$，

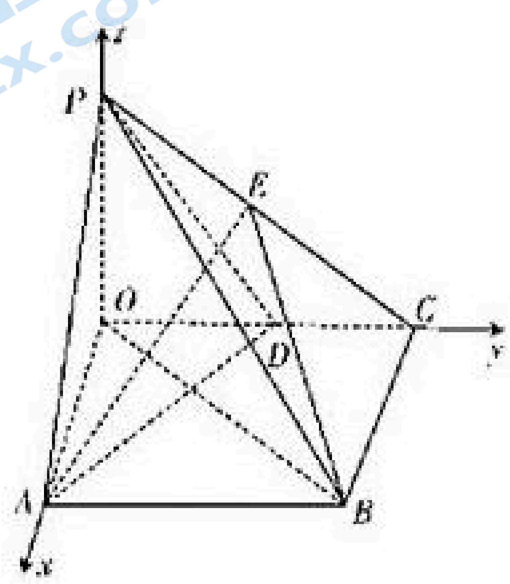
设平面 ABE 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，平面 PBC 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\\ \overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\end{cases}$ $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\\ \overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2y_1=0,\\ -\sqrt{2}x_1-y_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_1=0,\end{cases}$ $\begin{cases}-\sqrt{2}x_2=0,\\ -\sqrt{2}x_2-y_2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_2=0,\end{cases}$ (9 分)

取 $x_1=\sqrt{3}$，$y_2=\sqrt{3}$ 得 $\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{3},0,2\sqrt{2})$，$\boldsymbol{n}_2=(0,\sqrt{3},2)$，(11 分)

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{11}\times\sqrt{7}}=\dfrac{4\sqrt{154}}{77}$，

故平面 ABE 与平面 PBC 夹角的余弦值为 $\dfrac{4\sqrt{154}}{77}$.(12 分)



21.(1)解:因为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3}=1$,所以 $b=\sqrt{3}$.(1分)

双曲线的一条渐近线为 $\sqrt{3}x-ay=0$.因为双曲线的右顶点为 $(a,0)$,设右顶点到渐近线的距离为 d.

由题意得 $\begin{cases} d=\frac{|\sqrt{3}a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}a}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ a^2+3=c^2, \end{cases}$(2分)

解得 $\begin{cases} a=1, \\ c=2, \end{cases}$(3分)

则 E 的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.(4分)

(2)证明:①当 $\angle PFA=90°$,即 $PF\perp AF$ 时,设点 $P(-2,y_p)$,

代入双曲线方程得,$(-2)^2-\frac{y_p^2}{3}=1$,解得 $y_p=\pm3$,取第二象限的点,则 $P(-2,3)$,

因为 $B(1,0)$,所以直线 BP 的斜率为 $k_{BP}=\frac{3-0}{-2-1}=-1$,(5分)

所以直线 BP 的方程为 $y=-x+1$,令 $x=-1$,解得 $y=2$,即 $M(-1,2)$,

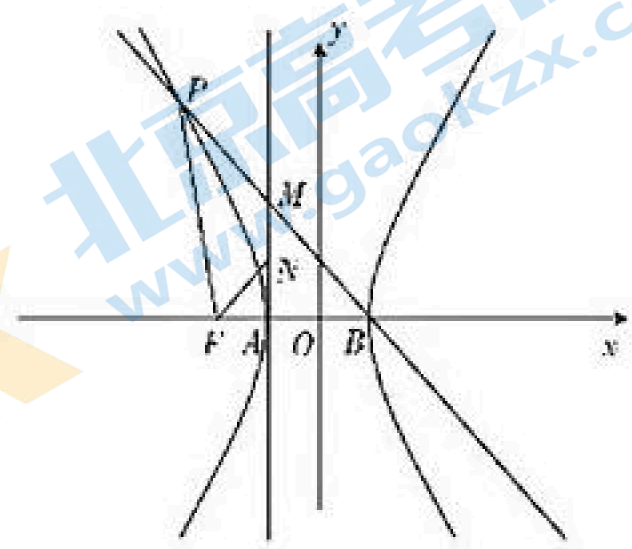
因为直线 FN 是 $\angle PFA$ 的角平分线,且 $\angle PFA=90°$,所以直线 FN 的斜率为 $k_{FN}=1$,

直线 FN 的方程为 $y=x+2$,令 $x=-1$,解得 $y=1$,即 $N(-1,1)$,(6分)

此时 $|AN|=\frac{1}{2}|AM|$,即 N 是 MA 的中点;(7分)

②当 $\angle PFA\neq90°$ 时,设直线 BP 的斜率为 k,则直线 BP 的方程为 $y=k(x-1)$,

联立方程 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ x^2-\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 消去 y 得 $(3-k^2)x^2+2k^2x-(k^2+3)=0$,(8分)



由韦达定理得,$x_Bx_P=\frac{k^2+3}{k^2-3}$,

又因为 $x_B=1$,所以 $x_P=\frac{k^2+3}{k^2-3}$,$y_P=k(x_P-1)=\frac{6k}{k^2-3}$,

点 $P\left(\frac{k^2+3}{k^2-3},\frac{6k}{k^2-3}\right)$,又因为 $F(-2,0)$,

所以 $k_{PF}=\frac{\frac{6k}{k^2-3}}{\frac{k^2+3}{k^2-3}+2}=\frac{6k}{3k^2-3}=\frac{2k}{k^2-1}$,(9分)

由题意可知,直线 NF 的斜率存在,设为 k',则直线 NF:$y=k'(x+2)$,

因为 FN 是 $\angle PFA$ 的角平分线,所以 $\angle PFB=2\angle NFB$,所以 $\tan\angle PFB=\tan2\angle NFB$,

又因为 $\tan\angle PFB=k_{PF}=\frac{2k}{k^2-1}$,$\tan2\angle NFB=\frac{2\tan\angle NFB}{1-\tan^2\angle NFB}=\frac{2k'}{1-k'^2}$,(10分)

所以 $\frac{2k}{k^2-1}=\frac{2k'}{1-k'^2}$,即 $k'k^2+(k'^2-1)k-k'=0$,

即 $(k+k')(kk'-1)=0$,得 $k=-k'$ 或 $k=\frac{1}{k'}$,

由题意知 k 和 k' 异号,所以 $k=-k'$,所以直线 FN 的方程为 $y=-k(x+2)$,

令 $x=-1$,可得 $y=-k$,即 $N(-1,-k)$,所以 $|AN|=|-k|$,

直线 PB 的方程为 $y=k(x-1)$,令 $x=-1$,可得 $y=-2k$,即 $M(-1,-2k)$,所以 $|AM|=|-2k|$,(11分)

所以$\frac{|AN|}{|AM|}=\frac{|-k|}{|-2k|}=\frac{1}{2}$,即 N 是 MA 的中点.

综上,N 是 MA 的中点.(12 分)

22.(1)解:$\forall x_1,x_2\in[1,2]$,且 $x_1<x_2$,

$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\frac{x_1^2}{2}+x_1-\frac{x_2^2}{2}-x_2\right|=\left|\left(\frac{x_1+x_2}{2}+1\right)(x_1-x_2)\right|$

$=\left|\frac{1}{2}(x_1+x_2)+1\right||x_1-x_2|<\left|\frac{1}{2}\times(2+2)+1\right||x_1-x_2|=3|x_1-x_2|$,

所以 $f(x)$ 是$[1,2]$上的"3 类函数".(2 分)

(2)解:因为 $f(x)$ 是$[1,e]$上的"2 类函数",不妨设 $x_1,x_2\in[1,e]$,且 $x_1<x_2$,

则 $2(x_1-x_2)<f(x_1)-f(x_2)<2(x_2-x_1)$ 恒成立.(3 分)

即 $g(x)=f(x)+2x$ 在$[1,e]$上单调递增,$h(x)=f(x)-2x$ 在$[1,e]$上单调递减,

所以 $\forall x\in[1,e]$,$g'(x)=f'(x)+2\geqslant 0$,$h'(x)=f'(x)-2\leqslant 0$ 恒成立,(4 分)

又 $f'(x)=axe^x-x-\ln x-1$,

所以 $\forall x\in[1,e]$,$-2\leqslant axe^x-x-\ln x-1\leqslant 2$ 恒成立,

所以 $\forall x\in[1,e]$,$\frac{x+\ln x-1}{e^{x+\ln x}}=\frac{x+\ln x-1}{xe^x}\leqslant a\leqslant\frac{x+\ln x+3}{xe^x}=\frac{x+\ln x+3}{e^{x+\ln x}}$恒成立,(5 分)

记 $F(t)=\frac{t-1}{e^t}$,$G(t)=\frac{t+3}{e^t}$,$t=x+\ln x\in[1,e+1]$,(6 分)

则 $F'(t)=\frac{2-t}{e^t}$,$G'(t)=\frac{-2-t}{e^t}$,

所以 $F(t)$在$[1,2)$上单调递增,在$(2,e+1]$上单调递减,$G(t)$在$[1,e+1]$上单调递减,(7 分)

所以 $F(t)_{\max}=F(2)=\frac{1}{e^2}$,$G(t)_{\min}=G(e+1)=\frac{e+4}{e^{e+1}}$.(8 分)

所以 $a\in\left[\frac{1}{e^2},\frac{e+4}{e^{e+1}}\right]$.(9 分)

(3)证明:不妨设 $1\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant 2$,

当 $x_2-x_1\leqslant\frac{1}{2}$时,$\because |f(x_1)-f(x_2)|<2|x_2-x_1|\leqslant 1$,$\therefore |f(x_1)-f(x_2)|<1$;(10 分)

当 $x_2-x_1>\frac{1}{2}$时,由 $f(1)=f(2)$得

$|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1)-f(1)+f(2)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-f(1)|+|f(2)-f(x_2)|$

$<2(x_1-1)+2(2-x_2)=2-2(x_2-x_1)<1$.

所以 $\forall x_1,x_2\in[1,2]$,$|f(x_1)-f(x_2)|<1$.(12 分)

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！