2023 北京牛栏山一中高三（上）期中

数　　学

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．）

1. 已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\left\{x \mid x^2-x-2<0\right\}$，则 $M\cap N=$（　）

A. $\{-2,-1,0,1\}$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $\{-1,0\}$　　D. $\{0,1\}$

2. 下列函数中既是奇函数，又在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是（　）

A. $y=x^3+x$　　B. $y=9+x^2$　　C. $y=|x|$　　D. $y=\dfrac{1}{x}$

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，则“角 α 的终边过点 $-1,2$ ”是“$\tan\alpha=-2$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=60°$，$a=5$，$b=6$，满足条件的 $\triangle ABC$（　）

A. 有无数多个　　B. 有两个　　C. 有一个　　D. 不存在

5. 若 $a<b<0$，则下列不等式一定成立的是（　）

A. $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　B. $ab<b^2$　　C. $a^3<b^3$　　D. $e^{a-b}<e^b$

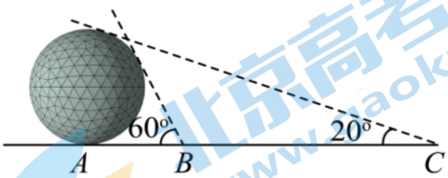
6. 在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{DC}$，$P$ 是直线 BD 上的一点，若 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ 则实数 t 的值为（　）

A. $-\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $-\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

7. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，前 n 项和为 S_n，则“$0<q<1$”是“$S_7+S_9\le 2S_8$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

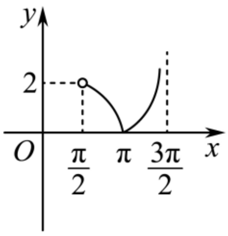
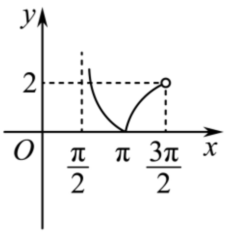
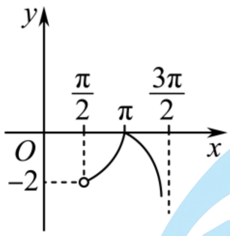
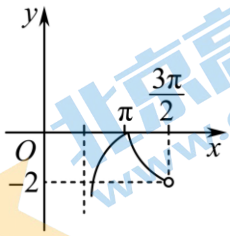
8. 古代数学家刘徽编撰的《重差》是中国最早的一部测量学著作，也为地图学提供了数学基础，根据刘徽的《重差》测量一个球体建筑的高度，已知点 A 是球体建筑物与水平地面的接触点（切点），地面上 B，C 两点与点 A 在同一条直线上，且在点 A 的同侧，若在 B，C 处分别测量球体建筑物的最大仰角为 60°和 20°，且 BC=100 m，则该球体建筑物的高度约为（　）（cos10°≈0.985）



A. 45.25 m　　B. 50.76 m　　C. 56.74 m　　D. 58.60 m

9. 已知函数 $f(x)=2\tan(\omega x)(\omega>0)$ 的图象与直线 $y=2$ 的相邻交点间的距离为 π，若定义

$\max\{a,b\}=\begin{cases}a, a\geqslant b\\ b, a<b\end{cases}$，则函数 $h(x)=\max\{f(x)$， $f(x)\cos x\}$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内的图象是

A. 
B. 
C. 
D. 

10. 过直线 $x+y=4$ 上一动点 M，向圆 O： $x^2+y^2=4$ 引两条切线， A 、 B 为切点，则圆 O 上的动点 P 到直线 AB 距离的最大值等于（　）

A. $1+\sqrt{2}$　　　　B. $2+\sqrt{2}$　　　　C. $\sqrt{3}+\sqrt{2}$　　　　D. $3+\sqrt{2}$

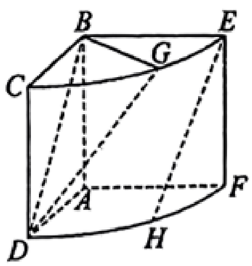
二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 函数 f（x）=$\log_2$（1 - x）的定义域为______.

12. 已知复数 $z=2+\mathrm{i}$，则 $z\cdot\bar{z}=$________.

13. 已知方程 $\dfrac{x^2}{m+2}+\dfrac{y^2}{1-m}=1$ 表示椭圆，则实数 m 的取值范围________

14. 如图所示的几何体是由正方形 $ABCD$ 沿直线 AB 旋转 $90°$ 得到的，设 G 是圆弧 $\overset{\frown}{CE}$ 的中点， H 是圆弧 $\overset{\frown}{DF}$ 上的动点（含端点），给出下列四个结论：



①存在点 H，使得 $EH\perp BG$

②不存在点 H，使得 $EH\parallel BD$

③存在点 H，使得 $EH\parallel$ 平面 BDG

④不存在点 H，使得直线 EH 与平面 BDG 的所成角为 $30°$

其中，所有正确结论的序号为________.

15. 首项为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(a_n^2+3\right)$， $n\in\mathrm{N}^*$ 若对一切 $n\in\mathrm{N}^*$，都有 $a_{n+1}>a_n$，则 a_1 的取值范围________.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

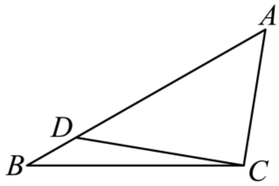
16. 已知函数 $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos x+a$ 的最大值为 1，

（1）求常数 a 的值；

（2）求函数 $f(x)$ 的单调递减区间；

（3）求使 $f(x)\geqslant 0$ 成立的 x 的取值集合.

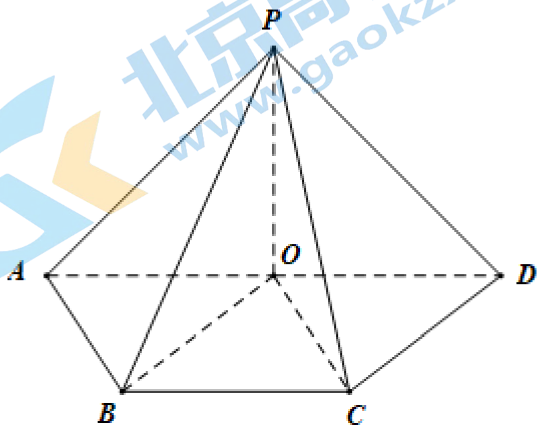
17. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $a=b\left(\sqrt{3}\sin C+\cos C\right)$.



（1）求 B；

（2）已知 $BC=2\sqrt{3}$，D 为边 AB 上的一点，若 $BD=1$，$\angle ACD=\dfrac{\pi}{2}$，求 AC 的长.

18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，O 是 AD 边的中点，$PO\perp$ 底面 $ABCD, PO=1$．在底面 $ABCD$ 中，$BC//AD, CD\perp AD, BC=CD=1, AD=2$.



（1）求证：$AB//$ 平面 POC；

（2）求二面角 $B-AP-D$ 的余弦值.

19. 已知函数 $f\left(x\right)=a\left(x-\ln x\right)+\dfrac{2x-1}{x^{2}}\left(0\leq a\leq 2\right)$.

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）当 $a=1$ 时，令 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-f'\left(x\right)-\left(x-\ln x\right)$，$x\in[1,2]$，求证：$g\left(x\right)\geq\dfrac{1}{2}$.

20. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且点 $T(2,1)$ 在椭圆 C 上，设与 OT 平行的直线 l 与椭圆 C 相交于 P，Q 两点，直线 TP，TQ 分别与 x 轴正半轴交于 M，N 两点.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）判断 $|OM|+|ON|$ 的值是否为定值，并证明你的结论.

21. 数列 $A_n: a_1,a_2,\ldots a_n\left(n\geq 4\right)$ 满足：$a_1=1, a_n=m, a_{k+1}-a_k=0$ 或 $1\left(k=1,2\ldots n-1\right)$ 对任意 i，j，都存在 s，t，使得 $a_i+a_j=a_s+a_t$，其中 $i,j,s,t\in\{1,2,\ldots,n\}$ 且两两不相等.

（1）若 $m=2$ 时，写出下列三个数列中所有符合题目条件的数列序号；①$1,1,1,2,2,2$；②$1,1,1,1,2,2,2,2$；③$1,1,1,1,1,2,2,2,2,2$；

（2）记 $S=a_1+a_2+\ldots+a_n$，若 $m=3$ 证明：$S\geq 20$；

（3）若 $m=1000$，求 n 的最小值.

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．）

1.【答案】D

【分析】首先解一元二次不等式求出集合 N，再根据交集的定义计算可得.

【详解】由 $x^2-x-2<0$，即 $(x+1)(x-2)<0$，解得 $-1<x<2$，

所以 $N=\left\{x\,|\,x^2-x-2<0\right\}=\left\{x\,|-1<x<2\right\}$，

又 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，

所以 $M\cap N=\{0,1\}$.

故选：D

2.【答案】A

【分析】根据基本初等函数的单调性与奇偶性判断即可.

【详解】对于 A：$y=f(x)=x^3+x$ 定义域为 R，

且 $f(-x)=(-x)^3+(-x)=-\left(x^3+x\right)=-f(x)$，即 $y=f(x)=x^3+x$ 为奇函数，

又 $y=x^3$ 与 $y=x$ 在 R 上单调递增，所以 $y=x^3+x$ 在 R 上单调递增，故 A 正确；

对于 B：函数 $y=9+x^2$ 为偶函数，故 B 错误；

对于 C：函数 $y=|x|$ 为偶函数，故 C 错误；

对于 D：函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 为奇函数，但是在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 D 错误；

故选：A

3.【答案】A

【分析】根据三角函数的定义即可判断.

【详解】当角 α 的终边过点 $(-1,2)$ 时，根据三角函数的定义，可得 $\tan\alpha=-2$，充分性成立；

当 $\tan\alpha=-2$ 时，α 为第二象限角或第四象限角，若 α 为第四象限角，则角 α 的终边不过点 $(-1,2)$，必要性不成立.

所以“角 α 的终边过点 $(-1,2)$”是“$\tan\alpha=-2$”的充分不必要条件.

故选：A.

4.【答案】B

【分析】利用正弦定理求出 $\sin B$，再结合正弦函数的性质判断即可.

【详解】因为 $\angle A=60°$，$a=5$，$b=6$，

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即 $\frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{6}{\sin B}$，所以 $\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{5}$，

又 $\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{5}>\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60°$ 且 $0°<B<120°$，

由正弦函数的性质可得 B 存在两解，所以满足条件的 $\triangle ABC$ 有两个.

故选：B

5.【答案】C

【分析】利用不等式的性质可判断选项 A,B，利用幂函数的单调性可判断选项 C，利用指数函数的性质可判断选项 D.

【详解】对 A，因为 $a<b<0$，所以 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，A 错误；

对 B，因为 $a<b<0$，所以 $ab>b^2$，B 错误；

由幂函数 $f(x)=x^3$ 在定义域 R 上单调递增，且 $a<b<0$，

所以 $f\left(a\right)<f\left(b\right)$，即 $a^3<b^3$，C 正确；

对 D，取 $a=-3,b=-2$，则 $e^{-3+2}>e^{-2}$，D 错误；

故选：C.

6.【答案】B

【分析】依题意可得 $\overrightarrow{AC}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AD}$，根据平面向量共线定理的推论及平面向量基本定理计算可得.

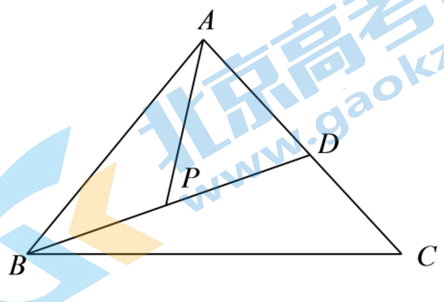
【详解】因为 $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$，所以 $\overrightarrow{AC}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AD}$，

又 P 是直线 BD 上的一点，所以 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+\left(1-x\right)\overrightarrow{AD}$，

又 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，

所以 $\begin{cases}x=t\\1-x=\frac{2}{3}\end{cases}$，所以 $x=t=\frac{1}{3}$.

故选：B



7.【答案】A

【分析】根据等比数列前 n 项和公式，利用不等式的性质进行判断即可.

【详解】$S_7+S_9-2S_8=S_7-S_8+S_9-S_8=a_9-a_8=a_8(q-1)\le 0$,

$\because a_8>0,\therefore q\le 1$，由于 $\{a_n\}$ 为正项的等比数列，所以 $q>0$，因此 $0<q\le 1$，

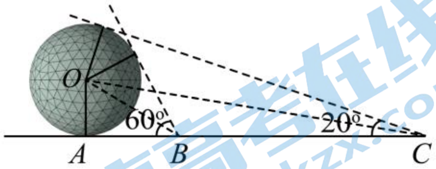
故“$0<q<1$”是“$S_7+S_9\le 2S_8$”的充分不必要条件，

故选：A

8.【答案】B

【分析】数形结合，根据三角函数解三角形求解即可；

【详解】



设球的半径为 R，

$AB=\sqrt{3}R, AC=\dfrac{R}{\tan 10^{\circ}}$， $BC=\dfrac{R}{\tan 10^{\circ}}-\sqrt{3}R=100$，

$R=\dfrac{25}{0.985},2R=50.76$

故选:B.

9.【答案】A

【分析】由题知 $f(x)=2\tan(\omega x)(\omega>0)$，利用 $T=\dfrac{\pi}{|\omega|}$ 求出 ω，再根据题给定义，化简求出 $h(x)$ 的解析式，结合正弦函数和正切函数图象判断，即可得出答案.

【详解】根据题意， $f(x)=2\tan(\omega x)(\omega>0)$ 的图象与直线 $y=2$ 的相邻交点间的距离为 π，

所以 $f(x)=2\tan(\omega x)(\omega>0)$ 的周期为 π， 则 $\omega=\dfrac{\pi}{T}=\dfrac{\pi}{\pi}=1$，

所以 $h(x)=\max\{2\tan x,2\sin x\}=\begin{cases}2\sin x, x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]\\ 2\tan x, x\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)\end{cases}$，

由正弦函数和正切函数图象可知 A 正确.

故选：A.

【点睛】本题考查三角函数中正切函数的周期和图象，以及正弦函数的图象，解题关键是对新定义的理解.

10.【答案】B

【分析】根据题意，设 $M(a,b)$，由圆的切线性质可得点 A 、 B 在以 OM 为直径的圆上，联立两个圆的方程可得直线 AB 的方程，结合 P 的坐标可得直线 AB 过定点 $N(1,1)$，据此分析可得答案.

【详解】根据题意，点 M 在直线 $x+y=4$ 上，设 $M(a,b)$，则 $a+b=4$，

过点 P 作圆 $O: x^2+y^2=4$ 的两条切线，切点分别为 A， B，则 $MA\perp OA$， $MB\perp OB$，

则点 A 、 B 在以 OM 为直径的圆上，

又由 $M(a,b)$，则以 OM 为直径的圆的方程是 $(x-\frac{a}{2})^2+(y-\frac{b}{2})^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$，

圆 O 的方程为 $x^2+y^2=4$，

联立两个圆的方程可得：直线 AB 的方程为 $ax+by=4$，即 $ax+by-4=0$，

因为 $a+b=4$，所以 $b=4-a$，代入直线 AB 的方程，得 $ax+(4-a)y-4=0$，即 $a(x-y)+4y-4=0$，

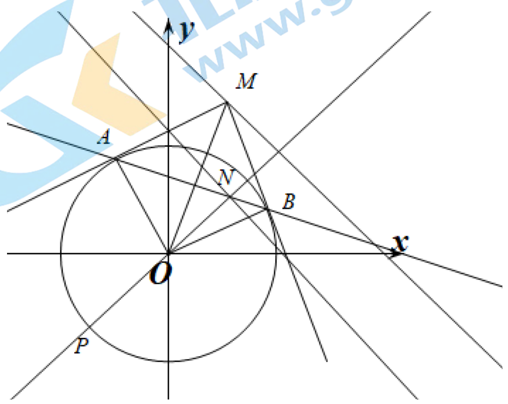
当 $x=y$ 且 $4y-4=0$，即 $x=1$， $y=1$ 时该方程恒成立，所以直线 AB 过定点 $N(1,1)$，

点 P 到直线 AB 距离的最大值即为点 O， N 之间的距离加上圆的半径，

即点 $O(0,0)$ 到直线 AB 距离的最大值为 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

动点 P 到直线 AB 距离的最大值为 $\sqrt{2}+2$，

故选：B



二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11.【答案】{x|x＜1}

【详解】试题分析：要使函数 f（x）=$\log_2$（1－x）有意义，只需对数的真数大于 0，建立不等式解之即可，注意定义域的表示形式.

解：要使函数 f（x）=$\log_2$（1－x）有意义

则 1－x＞0 即 x＜1

∴函数 f（x）=$\log_2$（1－x）的定义域为{x|x＜1}

故答案为{x|x＜1}

考点：对数函数的定义域.

12.【答案】5

【分析】根据共轭复数的定义，结合复数乘法运算即可求解.

【详解】$z\cdot\overline{z}=(2+i)(2-i)=5$，

故答案为：5

13.【答案】$\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},1\right)$

【分析】依题意可得$\begin{cases}m+2>0\\1-m>0\\m+2\neq 1-m\end{cases}$，解得即可.

【详解】因为方程$\frac{x^2}{m+2}+\frac{y^2}{1-m}=1$表示椭圆，

所以$\begin{cases}m+2>0\\1-m>0\\m+2\neq 1-m\end{cases}$，解得$-2<m<-\frac{1}{2}$或$-\frac{1}{2}<m<1$，

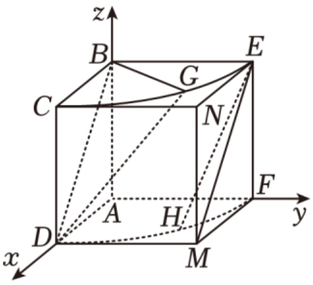
即实数m的取值范围为$\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},1\right)$.

故答案为：$\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},1\right)$

14.【答案】①②③.

【分析】由题意可将图形补全为一个正方体，$ADMF-BCNE$，根据线面垂直即可判定①，. 根据$BD//$平面$EFMN$，而H是圆弧DF上的动点，即可判定②；对于③，建立空间直角坐标系，根据平面BDG的法向量和$\overrightarrow{EH}$垂直即可判定结果；对于④，当点H与点F重合时，直线EH与平面BDG所成角最大，求出夹角正弦值，进一步分析即可.

【详解】由题意可将图形补全为一个正方体$ADMF-BCNE$，如图所示：



对于①，因为$EF\perp$平面$BCNE$，$BG\subset$平面$BCNE$，

所以$EF\perp BG$，所以当F，H重合时，由$EH\perp BG$. 故①正确；

对于②，因为$BD//EM$，若$EH//BD$，则$EH//EM$，又$EH\cap EM=E$，

则EH，EM重合，而H是圆弧DF上的动点，EH，EM不可能重合，

所以$EH//BD$不成立，故②正确；

对于③，以A为原点，AD，AF，AB所在直线为x，y，z轴的建立如图所示的空间直角坐标系，

设$BC=2$，则$A(0,0,0)$，$D(2,0,0)$，$E(0,2,2)$，$F(0,2,0)$，

$B(0,0,2),C(2,0,2),G(\sqrt{2},\sqrt{2},2)$，

$H(m,n,0)$，($m^2+n^2=4$，$m>0$，$n>0$)，

所以 $\overrightarrow{BD}=(2,0,-2),\overrightarrow{BG}=(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{EH}=(m,n-2,-2)$，

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 BDG 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BD}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{BG}\cdot\vec{n}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+0-2z=0\\ \sqrt{2}x+\sqrt{2}y-0\times z=0\end{cases}$，

令 $x=1$，得 $y=-1$，$z=1$，则 $\vec{n}=(1,-1,1)$．

假设 EH // 平面 BDG，

则 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{EH}=m-n+2-2=0$，所以 $m=n$．

因为 $m^2+n^2=4$，$m>0$，$n>0$，所以 $m=n=\sqrt{2}$，

即 H 是圆弧 $\overset{\frown}{DF}$ 的中点，符合题意，

所以存在点 H，使得 EH // 平面 BDG，故③正确；

对于④，当点 H 与点 F 重合时，直线 EH 与平面 BDG 所成角最大，

因为 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BA}=(0,0,-2)$，

所以 $\cos<\vec{n}，\overrightarrow{EF}>=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{EF}|}=\dfrac{-2}{2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

此时直线 EH 与平面 BDG 的所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

由 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}>\dfrac{1}{2}$，得直线 EH 与平面 BDG 的所成角的最大角大于 $30°$，

所以存在点 H，使得直线 EH 与平面 BDG 的所成角为 $30°$，故④错误．

故答案为:①②③.

15.【答案】$(0,1)\cup(3,+\infty)$

【分析】根据给定的恒成立的不等式及递推公式，列出关于 a_n 的不等式，求解作答.

【详解】因为 $a_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(a_n^2+3\right)$，又对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{n+1}>a_n$ 成立，

因此对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，$\dfrac{1}{4}\left(a_n^2+3\right)>a_n\Leftrightarrow a_n^2-4a_n+3>0$，解得 $a_n<1$ 或 $a_n>3$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立，

于是 $a_1<1$ 或 $a_1>3$，又数列 $\{a_n\}$ 的首项为正数，即有 $0<a_1<1$ 或 $a_1>3$，

所以 a_1 的取值范围为 $(0,1)\cup(3,+\infty)$.

故答案为：$(0,1)\cup(3,+\infty)$

三、解答题（共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16.【答案】（1）$a=-1$；（2）$\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$；（3）$\left\{x\mid 2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$

【分析】

（1）利用两角和与差的公式化简成为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的形式，根据三角函数的性质可得 a 的值.

（2）将内层函数看作整体，放到正弦函数的减区间上，解不等式得函数的单调递减区间；

（3）根据三角函数的性质求解 $f(x)\geqslant 0$ 成立的 x 的取值集合.

【详解】（1）由题意：函数 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{6})+\sin(x-\frac{\pi}{6})+\cos x+a$，

化简得：$f(x)=\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}+\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}+\cos x+a$

$=\sqrt{3}\sin x+\cos x+a$

$=2\sin(x+\frac{\pi}{6})+a$，

$\because \sin(x+\frac{\pi}{6})$ 的最大值为 1，

$\therefore f(x)=2\times 1+a=1$，解得：$a=-1$.

（2）$\because$ 由（1）可知 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})-1$.

根据三角函数的性质可得：$x+\frac{\pi}{6}\in[2k\pi+\frac{\pi}{2}，\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}](k\in Z)$.

即 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$(k\in\mathbf{Z})$

解得：$2k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{4\pi}{3}$，$(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$；

（3）$\because$ 由题意：$f(x)\geqslant 0$，即 $2\sin(x+\frac{\pi}{6})-1\geqslant 0$，

可得：$\sin(x+\frac{\pi}{6})\geqslant\frac{1}{2}$.

$\therefore 2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$(k\in\mathbf{Z})$.

解得：$2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{2\pi}{3}$.$(k\in\mathbf{Z})$

$\therefore f(x)\geqslant 0$ 成立的 x 的取值范围是 $\left\{x\mid 2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

【点睛】本题考查了三角函数的化简和计算能力，三角函数的性质的运用．属于基础题.

17.【答案】（1）$B=\frac{\pi}{6}$.

（2）$AC=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

【分析】（1）根据正弦定理边角化结合三角恒等变换即可求解，

（2）根据余弦定理求解 $CD=\sqrt{7}$，即可由正弦定理求解 $\cos A=\frac{\sqrt{21}}{7}$，进而由锐角三角函数即可求解.

【小问 1 详解】

$\because a=b\left(\sqrt{3}\sin C+\cos C\right)$，根据正弦定理得，$\sin A=\sin B\left(\sqrt{3}\sin C+\cos C\right)$，

即 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sqrt{3}\sin B\sin C+\sin B\cos C$，

所以 $\cos B\sin C=\sqrt{3}\sin B\sin C$，因为 $\sin C>0$，

所以 $\cos B=\sqrt{3}\sin B$，所以 $\tan B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{6}$.

【小问 2 详解】

因为 $BC=2\sqrt{3}$，$BD=1$，$B=\frac{\pi}{6}$，根据余弦定理得

$CD^2=BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cdot\cos B=1+12-2\times1\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7$，$\therefore CD=\sqrt{7}$.

$\because \angle BDC=\frac{\pi}{2}+\angle A$，$\therefore \sin\angle BDC=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\angle A\right)=\cos A$.

在 $\triangle BDC$ 中，由正弦定理知，$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{CD}{\sin\angle B}$，$\therefore \frac{2\sqrt{3}}{\cos A}=\frac{\sqrt{7}}{\frac{1}{2}}$，

$\therefore \cos A=\frac{\sqrt{21}}{7}$，$A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin A=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

$\therefore \tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{CD}{AC}$，$\therefore AC=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

18.【答案】（1）证明见解析；（2）$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【分析】（1）证明 $AB//OC$ 后可证线面平行；

（2）以 OB,OD,OP 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，用空间向量法求二面角.

【详解】（1）由题意 $BC=OA$，又 $BC//OA$，所以 $BCOA$ 是平行四边形，所以 $AB//OC$，

又 $AB\not\subset$ 平面 POC，$OC\subset$ 平面 POC，所以 $AB//$ 平面 POC；

（2）$BC = OD, BC \parallel OD$，所以 $BCDO$ 是平行四边形，所以 $OB \parallel DC$， $OB = CD$，而 $CD \perp AD$，所以 $OB \perp AD$，

以 OB, OD, OP 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，如图，

则 $B(1,0,0)$， $A(0,-1,0)$， $P(0,0,1)$， $\overrightarrow{AB} = (1,1,0)$， $\overrightarrow{AP} = (0,1,1)$，

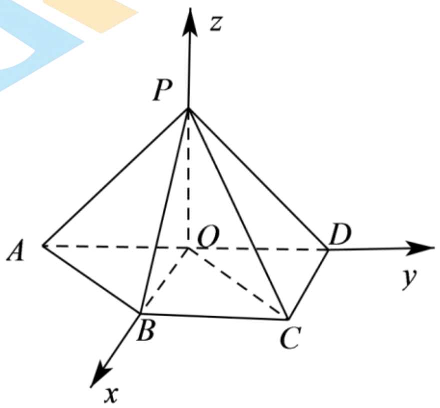
设平面 ABP 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$，则

$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = x + y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = y + z = 0 \end{cases}$，取 $x = 1$，则 $y = -1, z = 1$，即 $\vec{n} = (1,-1,1)$，

易知平面 APD 的一个法向量是 $\vec{m} = (1,0,0)$，

所以 $\cos < \vec{m}, \vec{n} > = \dfrac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|} = \dfrac{1}{1 \times \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以二面角 $B - AP - D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



【点睛】方法点睛：本题考查证明线面平行，求二面角．求二面角的方法：

（1）几何法（定义法）：根据定义作出二面角的平面角并证明，然后解三角形得出结论；

（2）空间向量法：建立空间直角坐标系，写出各点为坐标，求出二面角两个面的法向量，由两个平面法向量的夹角得二面角（它们相等或互补）.

19.【答案】（1）答案见解析

（2）证明见解析

【分析】（1）求出 $f'(x) = \dfrac{(x-1)(ax^2-2)}{x^3}$，然后分 $a = 0$， $0 < a < 2$， $a = 2$ 三种情况，根据导函数即可得出函数的单调性；

（2）代入 $a = 1$，化简得出 $g(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3} - 1$，求导根据导函数得出 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上的单调性，进而得出最小值，即可证明.

【小问 1 详解】

由已知可得，$f(x)=ax-a\ln x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}$，定义域为$(0,+\infty)$，

所以 $f'(x)=a-\dfrac{a}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{(x-1)(ax^2-2)}{x^3}$.

（i）当$a=0$时，$f'(x)=\dfrac{-2(x-1)}{x^3}$

当$0<x<1$时，有$f'(x)=\dfrac{-2(x-1)}{x^3}>0$，$f(x)$在$(0,1)$上单调递增；

当$x>1$时，有$f'(x)=\dfrac{-2(x-1)}{x^3}<0$，$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减.

（ii）当$0<a<2$时，解$f'(x)=\dfrac{(x-1)(ax^2-2)}{x^3}=0$，

可得$x=1$，或$x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{a}}$（舍去负值），且$\sqrt{\dfrac{2}{a}}>1$.

解$f'\ \ x\ \ >0$可得，$0<x<1$或$x>\sqrt{\dfrac{2}{a}}$，所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$\left(\sqrt{\dfrac{2}{a}},+\infty\right)$上单调递增；

解$f'(x)<0$可得，$1<x<\sqrt{\dfrac{2}{a}}$，所以$f(x)$在$\left(1,\sqrt{\dfrac{2}{a}}\right)$上单调递减.

（iii）当$a=2$时，$f'(x)=\dfrac{2(x-1)^2(x+1)}{x^3}\geq 0$在$(0,+\infty)$上恒成立，

所以，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

综上所述，当$a=0$时，$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减；

当$0<a<2$时，$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$\left(1,\sqrt{\dfrac{2}{a}}\right)$上单调递减，在$\left(\sqrt{\dfrac{2}{a}},+\infty\right)$上单调递增；

当$a=2$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

【小问 2 详解】

由（1）知，当$a=1$时，$f(x)=x-\ln x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}$，$f'(x)=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}+1$，

所以，$g(x)=f(x)-f'(x)-(x-\ln x)=x-\ln x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}-\left(-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}+1\right)-(x-\ln x)$

$=\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}-1$.

所以，$g'(x)=-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{6}{x^4}=-\frac{1}{x^4}(3x^2+2x-6)$.

解 $g'(x)=0$，可得 $x=\frac{-1\pm\sqrt{19}}{3}$（舍去负值），

且 $4<\sqrt{19}<5$，所以 $1<\frac{-1+\sqrt{19}}{3}<\frac{4}{3}<2$.

当 $1\le x\le 2$ 时，解 $g'(x)>0$ 可得，$1\le x<\frac{-1+\sqrt{19}}{3}$，

所以 $g(x)$ 在 $\left[1,\frac{-1+\sqrt{19}}{3}\right)$ 上单调递增；

当 $1\le x\le 2$ 时，解 $g'(x)<0$ 可得，$\frac{-1+\sqrt{19}}{3}<x\le 2$，

所以 $g(x)$ 在 $\left(\frac{-1+\sqrt{19}}{3},2\right]$ 上单调递减.

又 $g(1)=3+1-2-1=1$，$g(2)=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}-\frac{2}{8}-1=\frac{1}{2}<g(1)$，

所以，当 $1\le x\le 2$ 时，$g(x)$ 在 $x=2$ 处取得最小值 $g(2)=\frac{1}{2}$，

所以有 $g(x)\ge\frac{1}{2}$.

20.【答案】（1）$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$；

（2）$|OM|+|ON|=4$，证明见解析.

【分析】（1）解方程组 $\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\\ a^2-b^2=c^2\\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ 即得解；

（2）先证明直线 TP 和 TQ 的斜率存在.设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，求出 $|OM|=2-\frac{x_1-2}{y_1-1}$，$|ON|=2-\frac{x_2-2}{y_2-1}$，再利用韦达定理化简即得 $|OM|+|ON|=4$.

【小问 1 详解】

解：由题意$\begin{cases}\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1\\ a^2-b^2=c^2\\ e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$，

解得 $a=2\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{6}$.

故椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

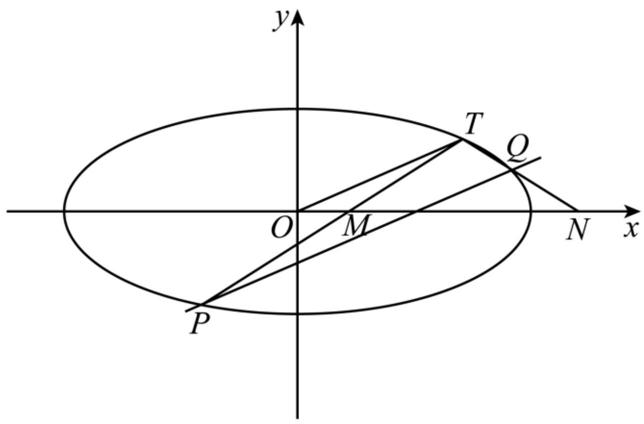
【小问 2 详解】

解：假设直线 TP 或 TQ 的斜率不存在，则 P 点或 Q 点的坐标为(2，−1)，直线 l 的方程为

$y+1=\dfrac{1}{2}(x-2)$，即 $y=\dfrac{1}{2}x-2$.

联立方程$\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=\dfrac{1}{2}x-2\end{cases}$，得 $x^2-4x+4=0$，

此时，直线 l 与椭圆 C 相切，不合题意，故直线 TP 和 TQ 的斜率存在.



设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则直线 $TP: y-1=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}(x-2)$，

直线 $TQ: y-1=\dfrac{y_2-1}{x_2-2}(x-2)$，故 $|OM|=2-\dfrac{x_1-2}{y_1-1}$，$|ON|=2-\dfrac{x_2-2}{y_2-1}$，

由直线 $OT: y=\dfrac{1}{2}x$，设直线 $PQ: y=\dfrac{1}{2}x+t$（$t\neq 0$），

联立方程，$\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=\dfrac{1}{2}x+t\end{cases}\Rightarrow x^2+2tx+2t^2-4=0$，

当 $\Delta>0$ 时，$x_1+x_2=-2t$，$x_1\cdot x_2=2t^2-4$，

$$|OM|+|ON|=4-\left(\frac{x_1-2}{y_1-1}+\frac{x_2-2}{y_2-1}\right)=4-\left(\frac{x_1-2}{\frac{1}{2}x_1+t-1}+\frac{x_2-2}{\frac{1}{2}x_2+t-1}\right)$$

$$=4-\frac{x_1x_2+(t-2)(x_1+x_2)-4(t-1)}{\frac{1}{4}x_1x_2+\frac{1}{2}(t-1)(x_1+x_2)+(t-1)^2}=4-\frac{2t^2-4+(t-2)(-2t)-4(t-1)}{\frac{1}{4}(2t^2-4)+\frac{1}{2}(t-1)\cdot(-2t)+(t-1)^2}$$

$=4$．

故$|OM|+|ON|=4$.

21.【答案】（1）②③　（2）证明见详解

（3）1008

【分析】（1）由题干的四个限定条件对数列序号逐一判断即可；

（2）由反证法证明即可；

（3）由（2）得出一个B_n，证明B_n满足题意，即可得到n的最小值，

【小问1详解】

由题可知，数列A_n必满足：$a_1=1,a_n=m,a_{k+1}-a_k=0$或1，对任意$i$，$j$，都存在$s$，$t$，使得$a_i+a_j=a_s+a_t$，$i,j,s,t\in\{1,2,\ldots,n\}$且两两不相等，

对①，$a_1+a_2=2$，不满足$a_i+a_j=a_s+a_t$，故①不符合；

对②，当$a_i+a_j=2$时，存在$a_s+a_t=2$，同理当$a_i+a_j=4$时，存在$a_s+a_t=4$，当$a_i+a_j=3$时，存在$a_s+a_t=3$，故②符合；

同理对③也满足，故满足题目条件的序列号为：②③；

【小问2详解】

证明：当$m=3$时，设数列A_n中1，2，3出现的频次为q_1,q_2,q_3，由题意知，$q_i\geq1$，假设$q_1<4$时，$a_1+a_2<a_s+a_t$，（对任意$s>t>2$），与已知矛盾，故$q_1\geq4$，同理可证$q_3\geq4$，

假设$q_2=1$，数列A_n可表示为：$1,1,1,1,2,3,3,3,3$，显然$a_4+a_5\neq a_s+a_t$，故$q_2\geq2$，经验证$q_2=2$时，显然符合$a_i+a_j=a_s+a_t$，所以$q_1\geq4$，$q_2\geq2$，$q_3\geq4$，数列A_n的最短数列可表示为：$1,1,1,1,2,2,3,3,3,3$，

故$S=4+4+12=20$；

【小问3详解】

由（2）知，数列A_n:首尾应该满足B_n:$1,1,1,1,2,2,3,\cdots998,999,999,1000,1000,1000,1000$，假设中间$3,4,5,\cdots998$各出现一次，此时$n=1008$，显然满足$a_{k+1}-a_k=0$或1，

对$a_i=a_j=1$或$a_i=a_j=1000$时显然满足$a_i+a_j=a_s+a_t$（$q_1=4,q_{1000}=4$）；

对$a_i=1$，$a_j=2$或$a_i=999,a_j=1000$时显然满足$a_i+a_j=a_s+a_t$（$q_1=4,q_2=2,q_{999}=2,q_{1000}=4$）；

对$a_i=1$，$a_j>2$时，则可选取$a_s=2,a_k=a_j-1$，满足$a_i+a_j=a_s+a_t$；同理若$a_i=1000$，$a_j<999$，则

可选取 $a_s=999, a_t=a_j+1$，满足 $a_i+a_j=a_s+a_t$；

如果 $1<a_i\le a_j<1000$，则可取 $a_s=a_i-1, a_t=a_j+1$，这种情况下每个数最多被选取一次，因此也成立，故对任意 i，j，都存在 s，t，使得 $a_i+a_j=a_s+a_t$，其中 $i,j,s,t\in\{1,2,\ldots,n\}$ 且两两不相等，故 n 的最小值为 1008

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！