2023—2024 学年北京市新高三入学定位考试

数　学

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x\mid -3<x<1\}, B=\{x\mid -2<x\le 4\}$，则 $A\cup B=$

（A）$(-3,-2)$　　（B）$(-2,1)$

（C）$(1,4)$　　（D）$(-3,4]$

（2）已知复数 z 的共轭为 $\bar{z}$，若 $z+\bar{z}=2$，则 z 的实部为

（A）1　　（B）-1

（C）$-\mathrm{i}$　　（D）i

（3）在 $(a+x)^3$ 的展开式中，x 的系数为 12，则实数 a 的值为

（A）± 1　　（B）± 2

（C）-3　　（D）4

（4）直线 $y=x+1$ 被圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 所截得的弦长为

（A）1　　（B）$\sqrt{3}$

（C）2　　（D）3

（5）下列函数中，没有对称中心的是

（A）$f(x)=\dfrac{1}{x+1}$　　（B）$f(x)=x^3$

（C）$f(x)=\tan x$　　（D）$f(x)=2^{|x|}$

（6）已知函数 $f(x)=1-2\sin^2 x$，则 $f(\frac{\pi}{8})$ 的值为

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（D）1

（7）等差数列 $\{a_n\}$ 的其前 n 项和为 S_n．若 $a_1=1$，$S_4=a_2a_3+1$，则 $\{a_n\}$ 的公差为

（A）2 或 -2　　（B）2 或 $-\dfrac{1}{2}$

（C）-2 或 $\dfrac{1}{2}$　　（D）-3 或 2

（8）已知不共线的两个非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，则“$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$所成角为钝角”是“$|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

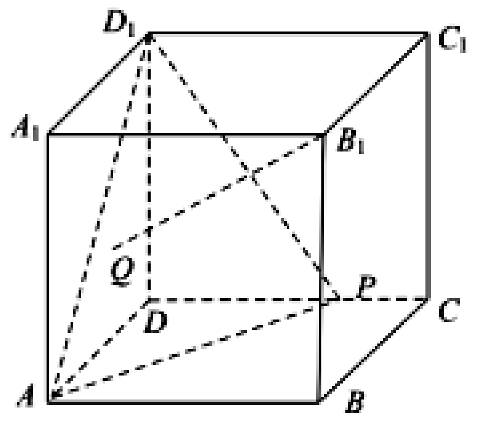
（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（9）抛物线$W:y^2=2px$的焦点为F．点F关于原点O的对称点为A．若以F为圆心的圆经过点A且与W的两个交点为B,C，则下面结论正确的是

（A）$\triangle BOC$一定是钝角三角形　　（B）$\triangle BOC$可能是锐角三角形

（C）$\triangle ABC$一定是钝角三角形　　（D）$\triangle ABC$可能是锐角三角形

（10）棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P在棱CD上运动，点Q在侧面ADD_1A_1上运动，满足$B_1Q\perp$平面AD_1P，则线段PQ的最小值为



（A）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　（B）1

（C）$\sqrt{2}$　　（D）$\sqrt{3}$

第二部分（非选择题　共110分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

（11）函数$f(x)=\lg(1-x)+\sqrt{x}$的定义域为________．

（12）过双曲线$W:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的右焦点$F$作$x$轴的垂线，与两条渐近线的交点分别为$A,B$，若$\triangle OAB$为等边三角形，则$W$的渐近线方程为________，$W$的离心率为________．

（13）在$\triangle ABC$中，$b=\sqrt{3}$，且$\sin B=\sqrt{3}\sin A$，$C=\dfrac{\pi}{6}$，则$a=$________，$c=$________．

（14）函数$f(x)=\begin{cases}x^2-a, & x\ge a,\\ -x+a, & x<a\end{cases}$只有一个零点，则$a$的一个值为________；$a$的最大值为________．

（15）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_n+S_n=kn+b$，其中k,b不同时为0．给出下列四个结论：

① 当$k=0$时，$\{a_n\}$为等比数列；

② 当$k\neq 0$时，$\{a_n\}$一定不是等差数列；

③ 当$k=b$时，$\{a_n\}$为常数列；

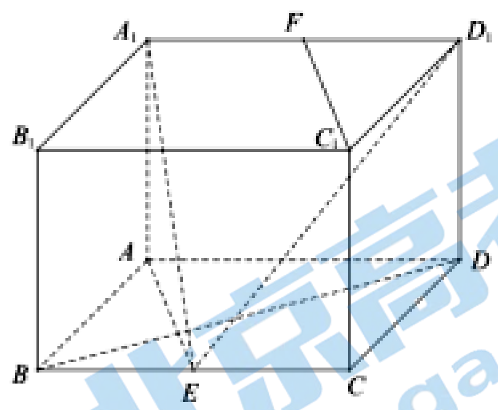
④ 当$k>b$时，$\{a_n\}$是单调递增数列．

其中所有正确结论的序号是________．

三、解答题共6小题，共85分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题13分）

如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，侧面 ABB_1A_1 是正方形，且 $AB=2\sqrt{2}$，$AD=4$，点 E 为 BC 的中点，点 F 在直线 A_1D_1 上.



（Ⅰ）若 C_1F // 平面 AA_1E，求证：CF // 平面 AA_1E；

（Ⅱ）求二面角 $A-A_1E-D_1$ 的余弦值.

（17）（本小题 13 分）

已知 $f(x)=\sin(x+\varphi)+a\cos x$，其中 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$.

（Ⅰ）若 $f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求 φ 的值；

（Ⅱ）从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求 $f(x)$ 的单调递增区间.

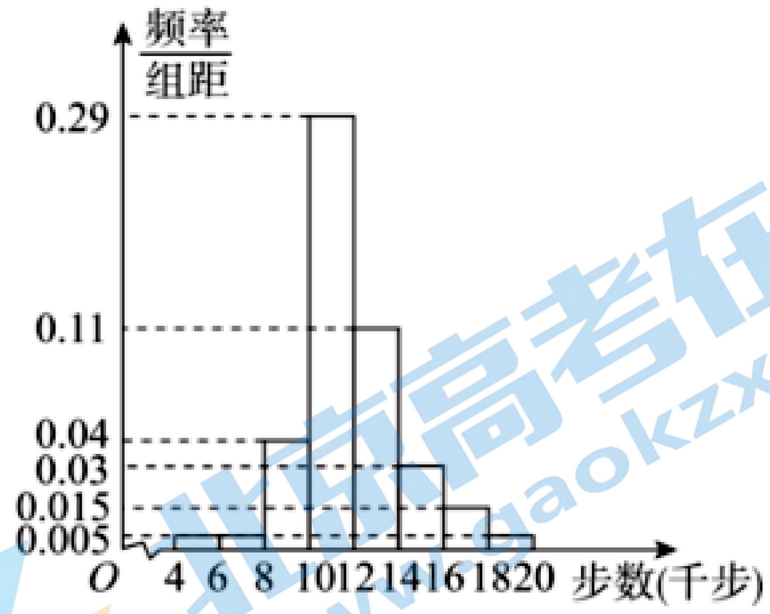
条件①：$a=\sqrt{3}$，$\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$；

条件②：$a=-1$，$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 14 分）

为了解员工每日健步走的情况，某单位工会随机抽取了300名员工，借助计步小程序统计了他们每日健步走的步数(均不低于4千步，不超过20千步)，按步数分组，得到频率分布直方图如图所示.



（Ⅰ）试估计该单位全体员工日行步数（单位：千步）的平均数(每组数据以该组区间的中点值为代表)；

（Ⅱ）单位工会从全体员工中随机选取3人，记 ξ 表示3人中每日健步数在14千步以上的人数，求随机变量 ξ 的分布列和期望；

（Ⅲ）假设单位员工甲、乙、丙三人某日健步走的步数分别为 a,b,c，且 $a\in[4,10)$，$b\in[10,16)$，$c\in[16,20]$，则三人当日健步走的步数的方差 s^2 最小时，写出 a,b,c 的一组值(不要求证明).（单位：千步）

注：$s^2=\dfrac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$，其中 $\bar{x}=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

（19）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=ax-\dfrac{x+b}{e^x}$. 曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 的切线为 $y=-x+1$.

（Ⅰ）求 a,b 的值；

（Ⅱ）求证：函数在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

（Ⅲ）求函数 $f(x)$ 的零点个数，并说明理由.

（20）（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）直线 $l:y=kx-1$ 与椭圆的一个交点为 P（点 P 不在坐标轴上），点 P 关于 x 轴的对称点为Q，经过点Q且斜率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的直线与 l 交于点 M ，点 N 满足 $PN\,//\,x$ 轴， $MN\perp x$ 轴，求证：点 N 在直线 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+1$ 上.

（21）（本小题 15 分）

给定正整数 k,m ，其中 $2\le m\le k$ ，如果有限数列 $\{a_n\}$ 同时满足下列两个条件， 则称 $\{a_n\}$ 为 $(k,m)-$数列. 记 (k,m) $-$数列的项数的最小值为 $G(k,m)$.

条件①： $\{a_n\}$ 的每一项都属于集合 $\{1,2,3,\dots,k\}$ ；

条件②：从集合 $\{1,2,3,\dots,k\}$ 中任取 m 个不同的数排成一列，得到的数列都是 $\{a_n\}$ 的子数列.

注：从 $\{a_n\}$ 中选取第 i_1 项、第 i_2 项、…、第 i_s 项（其中 $i_1<i_2<\dots<i_s$）形成的新数列 a_{i_1} ， a_{i_2} ， …， a_{i_s} 称为 $\{a_n\}$ 的一个子数列.

（Ⅰ）分别判断下面两个数列是否为 $(3,3)-$数列，并说明理由：

数列 $A_1:1,2,3,1,2,3,1,2,3$ ；

数列 $A_2:1,2,3,2,1,3,1$ ；

（Ⅱ）求证: $G(k,2)=2k-1$ ；

（Ⅲ）求 $G(4,4)$ 的值.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

绝密★启用前

2023 年高三开学测试

数学参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）D	（2）A	（3）B	（4）C	（5） D
（6）B	（7）B	（8）C	（9）A	（10）A

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$[0,1)$　（12）$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

（13）1，1　（14）1（答案不唯一），1　（15）①③④

说明：第（12）（13）（14）第一空 3 分，第二个空 2 分，

第（15）题，选择一个正确的给 3 分，两个正确的给 4 分，三个正确的给 5 分，有错误选项的给零分.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为长方体，所以 $AA_1 // CC_1$　…… **1 分**

所以 $CC_1 //$ 平面 AA_1E　…… **2 分**

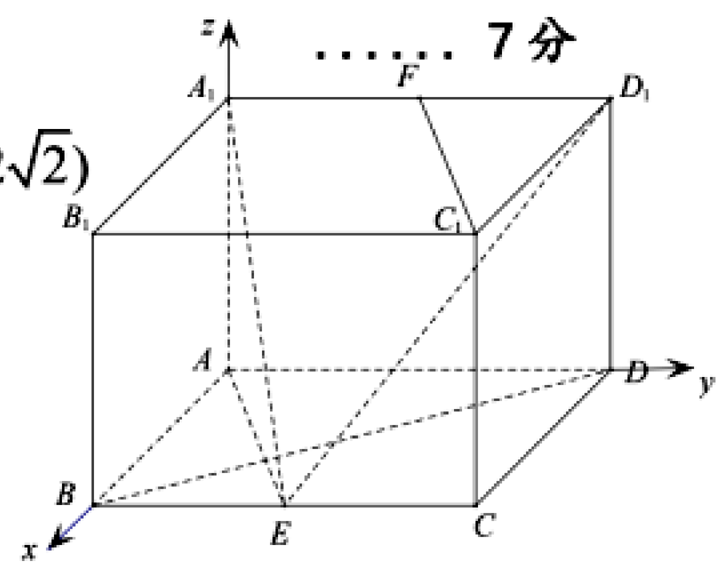
又 $C_1F //$ 平面 AA_1E，$CC_1 \cap C_1F = C_1$　…… **3 分**

所以平面 $CC_1F //$ 平面 AA_1E　…… **5 分**

又 $CF \subset$ 面 CC_1F，

所以 $CF //$ 平面 AA_1E　…… **6 分**

（Ⅱ）如图，建立空间直角坐标系 $A-BDA_1$，　…… **7 分**



则 $A(0,0,0)$，$E(2\sqrt{2},2,0)$，$A_1(0,0,2\sqrt{2})$，$D_1(0,4,2\sqrt{2})$

设二面角 $A-A_1E-D_1$ 的平面角为 θ

因为 $\overrightarrow{AE}=(2\sqrt{2},2,0),\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2\sqrt{2})$，

$\overrightarrow{A_1E}=(2\sqrt{2},2,-2\sqrt{2}),\overrightarrow{A_1D_1}=(0,4,0)$

$\overrightarrow{BD}=(-2\sqrt{2},4,0)$,

所以$\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BD}=0\end{cases}$

所以平面 AA_1E 的法向量为 $\overrightarrow{BD}=(-2\sqrt{2},4,0)$,

设平面 A_1ED_1 的法向量为 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$

所以$\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{n}=2\sqrt{2}x+2y-2\sqrt{2}z=0\\ \overrightarrow{A_1D_1}\cdot\overrightarrow{n}=4y=0\end{cases}$

令 $\overrightarrow{n}=(1,0,1)$

所以 $|\cos\theta|=|\cos\langle\overrightarrow{BD},\overrightarrow{n}\rangle|=|\dfrac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{n}|}|=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

所以二面角 $A-A_1E-D_1$ 余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. ...... 13 分

（17）（共 13 分）

解：

（Ⅰ）因为若 $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}+\varphi)+a\cos\frac{\pi}{2}=\sin(\frac{\pi}{2}+\varphi)=\cos\varphi$ ...... 4 分

所以 $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 或 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$ ...... 6 分

（Ⅱ）**选条件①**

因为 $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}\cos x$

所以 $f(x)=\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}\cos x$ ...... 8 分

$=\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\sqrt{3}\cos x=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

$=\sin(x+\frac{\pi}{3})$ ...... 10 分

当 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le x+\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时， $2k\pi-\frac{5\pi}{6}\le x\le 2k\pi+\frac{\pi}{6}$

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi-\frac{5\pi}{6},2k\pi+\frac{\pi}{6}\right],k\in\mathbf{Z}$ …… 13 分

选条件②

由 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{6})-\cos x$

所以 $f(x)=\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}-\cos x$ …… 8 分

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x-\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$

$=\sin(x-\frac{\pi}{6})$ …… 10 分

当 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le x-\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时， $2k\pi-\frac{\pi}{3}\le x\le 2k\pi+\frac{2\pi}{3}$

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right],k\in\mathbf{Z}$ …… 13 分

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ）根据题意，该单位工会月的人均健步步数估计为：

$5\times0.01+7\times0.01+9\times0.08+11\times0.58+13\times0.22+15\times0.06+17\times0.03+19\times0.01$

$=11.68$（千步） …… 4 分

（Ⅱ）ξ 的所有可能值为 $0,1,2,3$ …… 5 分

$P(\xi=0)=(\frac{9}{10})^3=\frac{729}{1000}$， $P(\xi=1)=C_3^1\frac{1}{10}(\frac{9}{10})^2=\frac{243}{1000}$，

$P(\xi=2)=C_3^2(\frac{1}{10})^2\frac{9}{10}=\frac{27}{1000}$． $P(\xi=3)=(\frac{1}{10})^3=\frac{1}{1000}$ …… 9 分

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{729}{1000}$	$\frac{243}{1000}$	$\frac{27}{1000}$	$\frac{1}{1000}$

故 ξ 的期望 $E(\xi)=0\times\frac{729}{1000}+1\times\frac{243}{1000}+2\times\frac{27}{1000}+3\times\frac{1}{1000}=\frac{3}{10}$． …… 12 分

（Ⅱ）$a=9.999,b=12.999,c=16.000$（或 $a=9.999,b=13.000,c=16.000$）

…… 14 分

(19)(共 15 分)

解:(Ⅰ)因为 $f(x)=ax-\dfrac{x+b}{e^x}$,所以 $f'(x)=a-\dfrac{1-x-b}{e^x}$ ...... 2 分

因为 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 的切线为 $y=-x+1$

所以 $f(0)=0-\dfrac{0+b}{e^0}=1$, ... 3 分

$f'(0)=a-\dfrac{1-0-b}{e^0}=a-1+b=-1$ ...... 4 分

所以 $b=-1,\ a=1$, ... 6 分

(Ⅱ)因为 $f(x)=x-\dfrac{x-1}{e^x}$,$f'(x)=1-\dfrac{2-x}{e^x}=\dfrac{e^x+x-2}{e^x}$

令 $h(x)=e^x+x-2$,所以 $h'(x)=e^x+1$ ...... 8 分

当 $x>1$ 时,$h'(x)>0$,

所以 $h(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增,又 $h(1)>0$

所以 $h(x)>0$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 成立 ...... 10 分

所以 $f'(x)>0$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 成立

所以 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增 ...... 11 分

(Ⅲ)法 1:$f(x)=x+\dfrac{1-x}{e^x}$

当 $x<0$ 时,因为 $0<e^x\le 1$,所以 $\dfrac{1-x}{e^x}>1-x$

所以 $f(x)=x-\dfrac{x-1}{e^x}=x+\dfrac{1-x}{e^x}>x+1-x=0$ ...... 12 分

当 $0\le x<1$ 时,$x\ge 0,\dfrac{1-x}{e^x}>0$,所以 $f(x)=x+\dfrac{1-x}{e^x}>0$ ...... 13 分

当 $x\ge 1$ 由(Ⅱ)$f(x)>f(1)>0$ ...... 14 分

所以 $f(x)>0$ 成立,所以函数 $f(x)$ 没有零点 ...... 15 分

法 2:$f(x)=x+\dfrac{1-x}{e^x}=\dfrac{xe^x+1-x}{e^x}$

令 $g(x)=xe^x+1-x=x(e^x-1)+1$,

当 $x\geq 0$ 时，$e^x-1\geq 0$，所以 $x(e^x-1)+1>0$

当 $x<0$ 时，$e^x-1<0$，所以 $x(e^x-1)+1>0$

所以 $f(x)>0$ 成立，所以函数 $f(x)$ 没有零点 …… 15 分

法 3：$f(x)=x+\dfrac{1-x}{e^x}=\dfrac{xe^x+1-x}{e^x}$

令 $g(x)=xe^x+1-x=x(e^x-1)+1$， 所以 $g'(x)=(x+1)e^x-1$

令 $h(x)=g'(x)$，所以 $h'(x)=(x+2)e^x$

当 $x>-2$ 时，$h'(x)>0$，当 $x<-2$ 时，$h'(x)<0$

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，

而 $x<-1$ 时，$h(x)<0$，且 $h(0)=0$

所以 $h(x)<0$ 对 $x<0$ 成立，$h(x)>0$ 对 $x>0$ 成立

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

即 $g(x)$ 在 $x=0$ 时取得唯一一个极小值，而 $g(0)=1>0$

所以 $g(x)>0$ 成立，所以函数 $f(x)$ 没有零点 …… 15 分

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由题设，得 $a=\sqrt{2}$． …… 1 分

又 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $c=1$． …… 3 分

所以 $b^2=a^2-c^2=1$ …… 4 分

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ …… 5 分

（Ⅱ）依题意，设 $P(x_P,y_P)$， $Q(x_Q,y_Q),M(x_M,y_M),N(x_N,y_N)$.

因为直线 l 的方程为 $y=kx-1$

由 $\begin{cases}y=kx-1,\\x^2+2y^2-2=0\end{cases}$，得 $(1+2k^2)x^2-4kx=0$ ...... 7 分

所以 $x_P=\dfrac{4k}{1+2k^2}$， 所以 $y_P=k\dfrac{4k}{1+2k^2}-1=\dfrac{2k^2-1}{1+2k^2}$ ...... 9 分

所以 $Q(\dfrac{4k}{1+2k^2},\dfrac{1-2k^2}{1+2k^2})$ ...... 10 分

所以直线 QM 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-\dfrac{4k}{1+2k^2})+\dfrac{1-2k^2}{1+2k^2}$ ...... 11 分

所以 $\begin{cases}y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-\dfrac{4k}{1+2k^2})+\dfrac{1-2k^2}{1+2k^2}\\y=kx-1\end{cases}$

所以 $x_M=\dfrac{-2\sqrt{2}}{1+2k^2}$ ...... 13 分

所以 $N(\dfrac{-2\sqrt{2}}{1+2k^2},\dfrac{2k^2-1}{1+2k^2})$ ...... 14 分

在直线方程 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+1$ 中，令 $x=\dfrac{-2\sqrt{2}}{1+2k^2}$，得 $y=\dfrac{2k^2-1}{1+2k^2}$，

即点 N 在直线 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+1$ 上 ...... 15 分

（21）（共 15 分）

（Ⅰ）A_1 是，因为下面 6 个数列：

1，2，3；　1，3，2；　2，1，3；

2，3，1；　3，1，2；　3，2，1 都是 A_1 的子数列；

A_2 不是，因为 3，1，2 不是 A_2 的子数列. ...... 4 分

（Ⅱ）$G(k,2)=2k-1$，构造数列：$1,2,3,\ldots,k-1,k,k-1,k-2,\ldots,2,1$，

检验可知，这个数列是$(k,2)$数列 ...... **5 分**

假设存在数列$\{a_n\}$是$(k,2)-$数列，且$\{a_n\}$的项数$\le 2k-2$，

由于$\{a_n\}$的每一项都属于$\{1,2,3,\ldots,k\}$，

所以$1,2,3,\ldots,k$中一定存在一个数在$\{a_n\}$中至多出现 1 次.

根据条件②，$1,2,3,\ldots,k$中每一个数在$\{a_n\}$中至少出现 1 次，

故不妨设k在$\{a_n\}$中恰好出现 1 次，

由于k的左边必须有$1,2,3,\ldots,k-1$，k的右边也必须有$1,2,3,\ldots,k-1$，

所以$\{a_n\}$的项数$\ge 1+2(k-1)$，矛盾. ...... 9 分

（Ⅲ）首先我们考虑$G(i,i)$与$G(i+1,i+1)$的关系.

任取一个$(i+1,i+1)-$数列，分为下列两种情形：

（i）集合$\{1,2,3,\ldots,i,i+1\}$中存在某个数在数列中只出现一次，不妨设这个数为1，

由于$\{1,2,3,\ldots,i,i+1\}$的所有末位是1的排列，

去掉1之后，得到$\{2,3,\ldots,i,i+1\}$的所有排列，

因此1之前的项数一定不小于$G(i,i)$，同理，1之后的项数也不小于$G(i,i)$.

所以$G(i+1,i+1)\ge 2G(i,i)+1$. ...... 11 分

（ii）集合$\{1,2,3,\ldots,i,i+1\}$中每个数都至少出现两次，

考虑首次出现且其对应项数不小于$i+1$的数，

（因为总共有$i+1$个数，这样的数一定存在）

不妨设为1，则该项前面至少还有i项，该项之后至少还有一项为1.

由于$\{1,2,3,...,i,i+1\}$的所有首位是1的排列，

去掉1之后，得到$\{2,3,...,i,i+1\}$的所有排列，

因此该项之后的项，除去等于1的项之后，项数不小于$G(i,i)$，

所以$G(i+1,i+1)\ge G(i,i)+i+2$. …… 13 分

而由（Ⅱ）知道，$G(2,2)=3$

所以 $G(3,3)\ge 2G(2,2)+1=7$或$G(3,3)\ge G(2,2)+2+2=7$

而$1,2,3,1,2,3,1$显然是一个$(3,3)-$数列，所以$G(3,3)=7$

所以$G(4,4)\ge 2G(3,3)+1=15$或者$G(4,4)\ge G(3,3)+3+2=12$

可以检验 $1,2,3,4,1,2,3,1,4,2,3,1$是一个$(4,4)-$数列，所以$G(4,4)=12$.

…… 15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索"K12 教育+互联网+大数据"的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供"衔接和桥梁纽带"作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。