顺义区 2022—2023 学年度第二学期期末质量监测

高一数学试卷

考生须知	1. 本试卷总分 150 分，考试用时 120 分钟。 2. 本试卷共 6 页，分为选择题（40 分）和非选择题（110 分）两个部分。 3. 试卷所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效．第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。 4. 考试结束后，请将答题卡交回，试卷自己保留。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

(1) 在平面直角坐标系中，$A(-2,1)$，$B(1,0)$，则向量$\overrightarrow{AB}=$

(A) $(-3,1)$　　(B) $(3,-1)$　　(C) $(-3,-1)$　　(D) $(3,1)$

(2) 在以下 4 项调查中：

① 调查一个 40 人班级的学生每周的体育锻炼时间；

② 调查某省的一种结核病的发病率；

③ 调查一批食品的合格率；

④ 调查一个水库所有鱼中草鱼所占的比例；

适合用全面调查的是

(A) ①　　(B) ②　　(C) ③　　(D) ④

(3) 复数 $z=i(2+i)$ 在复平面内对应的点位于

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

(4) 已知向量 $\boldsymbol{a}=(m,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则实数 $m=$

(A) -4　　(B) -1　　(C) 1　　(D) 4

(5) 某中学高一年级有 280 人，高二年级有 320 人，为了解该校高一高二学生对暑假生活的规划情况，现用比例分配的分层随机抽样方法抽取一个容量为 60 的样本，则高一年级应抽取的人数为

(A) 14　　(B) 16　　(C) 28　　(D) 32

(6) 若 α,β 是两个不同的平面．则“存在两条异面直线 m,n，满足 $m/\!/\beta$，$n/\!/\alpha$”是“$\alpha/\!/\beta$”的

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

(7)为了得到函数 $y=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ 的图象，只需把函数 $y=\sin x$ 的图象

(A)向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度　　(B)向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度

(C)向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度　　(D)向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度

(8)已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为

(A)$\frac{\pi}{4}$　　(B)$\frac{\pi}{2}$　　(C)$\frac{3\pi}{4}$　　(D)$\frac{5\pi}{6}$

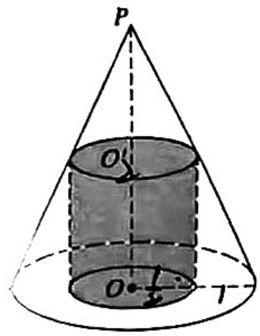
(9)如图，圆锥 PO 的底面直径和高均是 2，过 PO 的中点 O' 作平行于底面的截面，以该截面为底面挖去一个圆柱，则剩下几何体的体积是

(A)$\frac{5}{3}\pi$

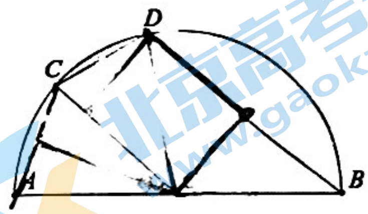
(B)$\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

(C)$\frac{1}{6}\pi$

(D)$\frac{5}{12}\pi$



(10)已知半圆的直径 $AB=2$，O 为圆心，圆周上有两动点 C,D 满足 $\angle AOC=\angle COD=\theta$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 设弦 CD 与弦 BD 的长度之和 y 与 θ 的关系为 $y=f(\theta)$，则 $f(\theta)$ 最大值为



(A)3　　(B)$\frac{9}{4}$

(C)$1+\sqrt{2}$　　(D)$2\sqrt{2}$

第二部分(非选择题　共 110 分)

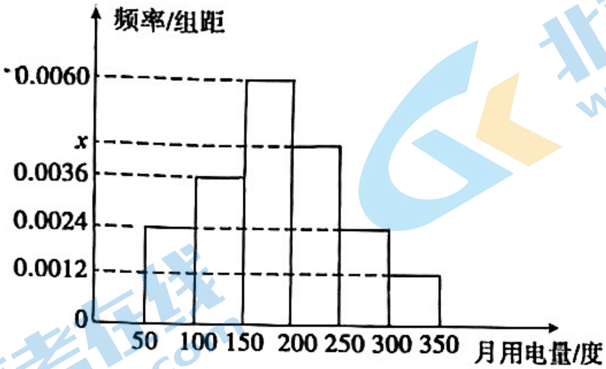
二、填空题共 5 道小题，每题 5 分，共 25 分，把答案填在答题卡上.

(11)求值：$\sin\frac{4\pi}{3}=$________.

(12)已知 $\bar{z}$ 是复数 z 的共轭复数，$\bar{z}=1-3\mathrm{i}$，其中 i 是虚数单位，则 $|z|=$________.

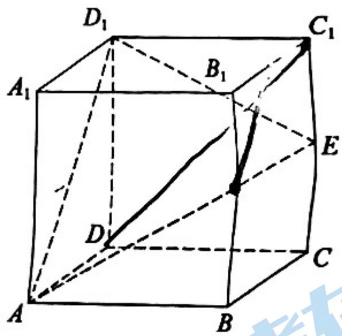
(13)在 $\triangle ABC$ 中，$a=2$，$b=2\sqrt{3}$，$A=\frac{\pi}{6}$，则 $B=$________.

(14) 为了解某小区 6 月份的用电量情况，通过随机抽样获得其中 300 户居民的月用电量(单位：度)，发现都在 [50,350] 之间．将所有数据按照 [50,100)，[100,150)，…，[300,350] 分成六组，制成了如图所示的频率分布直方图.



则 $x=$________；该小区居民 6 月份用电量的 45% 分位数大约是________.

(15) 在正方体 AC_1 中，E 是棱 CC_1 的中点，F 是侧面 B_1BCC_1 内的动点，且 A_1F // 平面 AD_1E，有以下四个说法：



① A_1F 可能与 B_1E 相交；

② A_1F 与 D_1E 不可能平行；

③ A_1F 与 BE 是异面直线；

④ 三棱锥 $F-AC_1D$ 的体积为定值；

其中，所有正确说法的序号是________.

三、解答题共 6 道题，共 85 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

(16)（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调递增区间；

（Ⅲ）求方程 $f(x)=1$ 的解集.

(17)(本小题 13 分)

某球员在 8 场篮球比赛中的投篮情况如下(假设各场比赛互相独立):

场次	投篮次数	命中次数	场次	投篮次数	命中次数
主场 1	22	14	客场 1	18	6
主场 2	15	12	客场 2	13	5
主场 3	22	8	客场 3	21	7
主场 4	23	17	客场 4	18	15

(Ⅰ)从上述比赛中随机选择一场,求该球员在本场比赛中投篮命中率超过 0.5 的概率;

(Ⅱ)从上述比赛中选择一个主场和一个客场,求该球员的投篮命中率一场超过 0.5,另一场不超过 0.5 的概率;

(Ⅲ)记$\overline{x}$是表中 8 场命中率的平均数,$\overline{x_1}$是表中 4 个主场命中率的平均数,$\overline{x_2}$是表中 4 个客场命中率的平均数,比较$\overline{x}$,$\overline{x_1}$,$\overline{x_2}$的大小.(只需写出结论)

(18)(本小题 14 分)

已知平面直角坐标系中,等边$\triangle ABC$ 的顶点坐标为 $A(0,0)$,$B(2,0)$,点 C 在第一象限,点 D 是平面内任意一点.

(Ⅰ)若 A,B,C,D 四点能构成一个平行四边形,求点 D 的坐标;(写出所有满足条件的情况)

(Ⅱ)若点 E 为线段 BC 边上一动点(包含 B,C 点),求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$的取值范围.

(19)(本小题 14 分)

在$\triangle ABC$中,$2\cos^2\frac{B}{2}-2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=1$.

(Ⅰ)求$\angle B$;

(Ⅱ)再从下列三个条件中,选择两个作为已知,使得$\triangle ABC$存在且唯一,求$\triangle ABC$的面积.

条件①:$\cos A=-\frac{1}{2}$;

条件②:$b=\sqrt{2}$;

条件③:AB边上的高为$\frac{\sqrt{6}}{2}$.

注:如果选择多个符合要求的条件分别解答,接第一个解答计分.

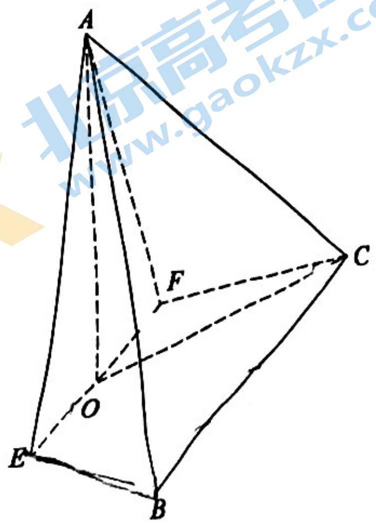
(20)(本小题 15 分)

如图,在四棱锥$A-EFCB$中,$\triangle AEF$为等边三角形,平面$AEF\perp$平面$EFCB$,$EF/\!/BC$,$BC=2$,$EF=a$,$\angle EBC=\angle FCB=60°$,$O$为$EF$的中点.

(Ⅰ)求证:$BC/\!/$平面AEF;

(Ⅱ)求证:$AO\perp BE$;

(Ⅲ)若$BE\perp$平面AOC,求实数a的值.



(21)(本小题 14 分)

设集合 A 为 n 元数集,若 A 的 2 个非空子集 B,C 满足:$B\cup C=A,B\cap C=\varnothing$,则称 B,C 为 A 的一个二阶划分．记 B 中所有元素之和为 $S(B)$,C 中所有元素之和为 $S(C)$.

(Ⅰ)若 $A=\{1,2,3\}$,求 A 的一个二阶划分,使得 $S(B)=2S(C)$;

(Ⅱ)若 $A=\{1,2,\cdots,10\}$.求证:不存在 A 的二阶划分 B,C 满足 $S(C)=2S(B)$;

(Ⅲ)若 $A=\{1,2,\cdots,n\}(n\geqslant 3,n\in N^{*})$,$B,C$ 为 A 的一个二阶划分,满足:① 若 $x\in B$,则 $2x\notin B$;② 若 $x\in C$,则 $2x\notin C$.

记 $f(n)$ 为符合条件的 B 的个数,求 $f(n)$ 的解析式.

顺义区 2022—2023 学年度第二学期期末质量监测

高一（数学）参考答案

一、选择题

BABCC，CACDB

二、填空题共 5 道小题，每题 5 分，共 25 分

(11) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ （没有求出数值不得分）

(12) $\sqrt{10}$ （没有求出数值不得分）

(13) $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$ （写对一个给 3 分，有错不得分）

(14) 0.0044，175 （答对一空 3 分）

(15) ①③④（有错不得分，选对 1 个三分，2 个四分）

三、解答题共 6 道题，共 85 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（16）（本小题 15 分）

解：(I) 最小正周期 $T=\frac{2\pi}{|\varpi|}$ …………2 分

$=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$ …………4 分

(II) $\because$ $y=\sin t$ 在 $t\in\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in Z)$ 上单增 …………6 分

$\therefore$ 令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$ …………7 分

$\therefore$ $-\frac{2\pi}{3}+4k\pi\le x\le\frac{4\pi}{3}+4k\pi$ …………9 分

$\therefore$ $f(x)$的单增区间为$\left[-\frac{2\pi}{3}+4k\pi,\frac{4\pi}{3}+4k\pi\right](k\in Z)$ …………11 分

(III) 令 $f(x)=1$ 即 $\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $2k\pi+\frac{5\pi}{6}$ …………13 分

$\therefore x=4k\pi+\frac{2\pi}{3}$ 或 $4k\pi+2\pi$ …………14 分

$\therefore$ 方程 $f(x)=1$ 的解集是 $\left\{x \mid x=4k\pi+\frac{2\pi}{3} 或 x=4k\pi+2\pi, k\in Z\right\}$ …………15 分

（17）（本小题 13 分）

解：（I）根据投篮统计数据，在 8 场比赛中，该球员投篮命中率超过 0.5 的有 4 场，分别是主场 1，主场 2，主场 4，客场 4. …………2 分

$\therefore$ 在随机选择的一场比赛中，该球员投篮命中率超过 0.5 的概率是 0.5. …………4 分

（II）设事件 A 为“在随机选择的一场主场比赛中，该球员的投篮命中率超过 0.5”， …………5 分

事件 B 为“在随机选择的一场客场比赛中，该球员的投篮命中率超过 0.5”， …………6 分

事件 C 为“在随机选择的一个主场和一个客场中，该球员的投篮命中率一场超过 0.5，一场不超过 0.5”. …………7 分

则 $C=A\overline{B}+\overline{A}B$，A，B 相互独立. …………8 分

根据投篮统计数据，$P(A)=\frac{3}{4}$，$P(A)=\frac{1}{4}$. …………9 分

故 $P(C)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$ …………10 分

$\therefore$ 在随机选择的一个主场和一个客场中，该球员的投篮命中率一场超过 0.5，一场不超过 0.5 的概率是 $\frac{5}{8}$.

（III）$\overline{x_1}>\overline{x}>\overline{x_2}$ …………13 分

（18）（本小题 14 分）

解：（I）$\because$ 等边 $\triangle ABC$ 的顶点坐标为 $A(0,0), B(2,0)$，点 C 在第一象限

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $C(1,\sqrt{3})$ …………2 分

又 $\because$ 若 A,B,C,D 四点能构成一个平行四边形

$\therefore \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ 或者 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$ 或者 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ …………5 分

设 $D(x,y)$，则 $\overrightarrow{AC}=(1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(-1,\sqrt{3})$

由$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$可得$\left(1,\sqrt{3}\right)=\left(x-2,y\right)$即$x=3,y=\sqrt{3}$ $\therefore D\left(3,\sqrt{3}\right)$

由$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$可得$\left(1,\sqrt{3}\right)=\left(2-x,-y\right)$即$x=1,y=-\sqrt{3}$ $\therefore D\left(1,-\sqrt{3}\right)$

由$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$可得$\left(-1,\sqrt{3}\right)=\left(x,y\right)$即$x=-1,y=\sqrt{3}$ $\therefore D\left(-1,\sqrt{3}\right)$

$\therefore$ D 的坐标为$D\left(3,\sqrt{3}\right)$或$D\left(1,-\sqrt{3}\right)$或$D\left(-1,\sqrt{3}\right)$. ············8 分

(II) $\because$ 点E为BC边上一动点（包含B,C点），$\overrightarrow{BC}=\left(-1,\sqrt{3}\right)$

$\therefore$ 可设$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}=\lambda\left(-1,\sqrt{3}\right)$，$\lambda\in[0,1]$ ············9 分

$\therefore E\left(2-\lambda,\sqrt{3}\lambda\right)$，$\overrightarrow{AE}=\left(2-\lambda,\sqrt{3}\lambda\right)$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=2(2-\lambda)+0=4-2\lambda$ ············11 分

$\therefore$ 当$\lambda=0$时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$的最大值为 4， ············12 分

当$\lambda=1$时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$的最小值为 2. ············13 分

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$的取值范围是$[2,4]$. ············14 分

(19)（本小题 14 分）

解：(I) 在$\triangle ABC$中，$2\cos^2\dfrac{B}{2}-2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}=1$

$\therefore 2\cos^2\dfrac{B}{2}-1=2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}$

$\therefore \cos B=\sin B$ ············2 分

$\because$ 在$\triangle ABC$中，$0<B<\pi$ ············3 分

$\therefore B=\dfrac{\pi}{4}$ ············5 分

(II) 选择①②，则$\cos A=-\dfrac{1}{2}$，$b=\sqrt{2}$，$B=\dfrac{\pi}{4}$

$\because B=\dfrac{\pi}{4}$ $\quad\therefore \sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ············6 分

$\because \cos A=-\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore \sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，$b=\sqrt{2}$ ············7 分

$\therefore a=\sqrt{3}$

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ ············8 分

············10 分

$\therefore \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ············12 分

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ ············14 分

选择①③，$\because$ AB 边上的高为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，$B=\frac{\pi}{4}$

$\therefore a=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sin B}=\sqrt{3}$ ············8 分

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ ············10 分

$\therefore \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ············12 分

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ ············14 分

选择②③，$\because$ AB 边上的高为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，$B=\frac{\pi}{4}$

$\therefore a=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sin B}=\sqrt{3}$ ············6 分

$\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，$b=\sqrt{2}$

············8 分

$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$0<A<\pi$

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$，此时 $\triangle ABC$ 不唯一.（选择②③最多得 8 分）

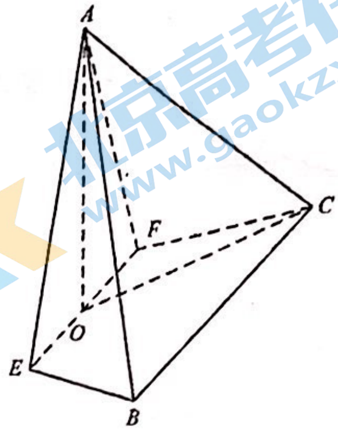
(20)（本小题 15 分）

证明：（I）$\because EF \parallel BC$ …………2分

$AE \subset$ 平面 AEF …………3分

$BC \not\subset$ 平面 AEF

$\therefore BC \parallel$ 平面 AEF …………4分



（II）$\because \triangle AEF$ 为等边三角形，O 为 EF 的中点

$\therefore AO \perp EF$ …………5分

又$\because$ 平面 $AEF \perp$ 平面 $EFCB$

平面 $AEF \cap$ 平面 $EFCB = EF$ …………6分

$AO \subset$ 平面 AEF …………7分

$\therefore AO \perp$ 平面 $EFCB$ …………8分

又$\because BE \subset$ 平面 $EFCB$ …………9分

$\therefore AO \perp BE$ …………10分

（III）延长 CO 交 BE 于点 D

$\because BE \perp$ 平面 AOC

$OC \subset$ 平面 AOC

$\therefore BE \perp OC$ …………11分

$\therefore BD \perp CD$ 即 $\angle EDO = 90^\circ$

$\because \angle EBC = \angle FCB = 60^\circ$，$EF \parallel BC$

$\therefore BE = CF$

$\because \angle EBC = \angle DEO = 60^\circ$

$\therefore \angle FOC = \angle DOE = 30^\circ$

$\therefore OF = CF$，又 O 为 EF 的中点，$EF = a$

$\therefore BE = CF = OF = EO = \frac{1}{2}a$ …………13分

$\because$ 在 $Rt\triangle DEO$ 中，$DE = \frac{1}{2}EO = \frac{1}{4}a$

$\therefore BD = BE + ED = \frac{3a}{4}$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle DBC$ 中，$BD = \frac{1}{2}BC = 1$

$\therefore \frac{3a}{4} = 1$ 即 $a = \frac{4}{3}$ …………15分

（21）解：（I）B 中所有元素之和为 $S(B)$，C 中所有元素之和为 $S(C)$

且 $S(B) = 2S(C)$

$\therefore S(A) = S(B) + S(C) = 3S(C) = 6$

$\therefore S(C)=2$ 即可知 $C=\{2\}$

$\because B\cup C=A$，$B\cap C=\varnothing$

$\therefore B=\{1,3\}$

…………4 分

（II）假设存在符合条件的一个二阶划分 B,C 满足 $S(C)=2S(B)$，

则 $S(A)=S(B)+S(C)=3S(B)$，从而 $S(A)$ 是 3 的倍数

又 $A=\{1,2,\cdots,10\}$ $\therefore S(A)=1+2+...+10=55$

$\because$ 55 不是 3 的倍数

$\therefore$ 假设不成立

$\therefore$ 不存在 A 的二阶划分 B,C 满足 $S(C)=2S(B)$ …………9 分

（III）任取偶数 $x\in A$，将 x 除以 2，若商仍为偶数，再除以 2，...经过 k 次以后.

商必为奇数，此时记商为 m，即 $x=m\cdot 2^k$，其中 m 为奇数.

$\because x\in B$，则 $2x\notin B$，即 $2x\in C$

$\therefore$ 若 $m\in B$，k 为奇数时，$x=m\cdot 2^k\notin B$，即 $x\in C$；当 k 为偶数时，$x=m\cdot 2^k\in B$；

$\therefore$ A 中的任意一个偶数 $x=m\cdot 2^k$ 的位置都是确定的，且与 m 的位置相关.

$\therefore$ 可知 B 是由 A 中的奇数 $1,3,5,...$ 的位置确定.

设 Q_n 表示 A 中所有的奇数的集合，则 $f(n)$ 等于 Q_n 的子集的个数.

当 n 是奇数时，A 中的奇数个数有 $\frac{n}{2}$ 个，此时 Q_n 的子集个数有 $2^{\frac{n}{2}}$ 个，即 $f(n)=2^{\frac{n}{2}}$

当 n 是偶数时，A 中的奇数个数有 $\frac{n+1}{2}$ 个，此时 Q_n 的子集个数有 $2^{\frac{n+1}{2}}$ 个，

即 $f(n)=2^{\frac{n+1}{2}}$

所以 $f(n)=\begin{cases}2^{\frac{n}{2}}, n\text{是偶数}\\ 2^{\frac{n+1}{2}}, n\text{是奇数}\end{cases}$ …………14 分