2022 北京大兴高三（上）期中

数　　学

本试卷分为第一部分（选择题）和第二部分（非选择题），满分 150 分，考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 若复数 $z=\mathrm{i}(1-\mathrm{i})$，则 z 在复平面内对应的点位于

A.第一象限　　B.第二象限

C.第三象限　　D.第四象限

2. 已知集合 $A=\{0,1,2,3\}$，集合 $B=\{x\|x|\le 2\}$，则 $A\cap B=$

A. $[-2,2]$ B. $[0,2]$ C. $\{1,2\}$ D. $\{0,1,2\}$

3. 下列函数中，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且值域为 $[0,+\infty)$ 的是

A. $y=2^x$ B. $y=-\dfrac{1}{x}$ C. $y=\sqrt{x}$ D. $y=\log_2 x$

4. 若命题“$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+m\le 0$”是真命题，则实数 m 的取值范围是

A. $m<1$ B. $m\le 1$ C. $m>1$ D. $m\ge 1$

5. “$a=1$”是“函数 $f(x)=\dfrac{2^x+a}{2^x-a}$ 具有奇偶性”的

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$CA=3$，$CB=4$，$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=$

A. 3 B. 5 C. 6 D. 10

7. 已知函数 $f(x)-\sin(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{6})$，则结论正确的是

A. $f(x)$ 的图像关于点 $(\dfrac{5\pi}{3},0)$ 中心对称　　B. $f(x)$ 的图像关于直线 $x=-\dfrac{\pi}{3}$ 对称

C. $f(x)$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内有 2 个零点　　D. $f(x)$ 在区间 $[-\dfrac{\pi}{2},0]$ 上单调递增

8. 若 $a>b>0$，则① $\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{a}$；② $\dfrac{a}{b}>\dfrac{a+1}{b+1}$；③ $\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$．上述结论中，所有正确结论的序号是

A.①②　B.①③　C.②③　D.①②③

9. 已知函数 $f(x)=3^x-2^x$，则

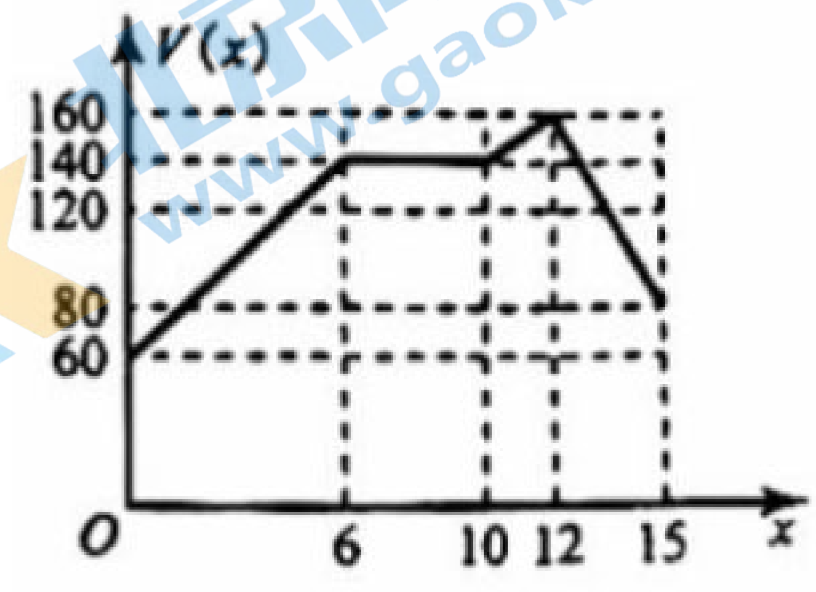
A. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增

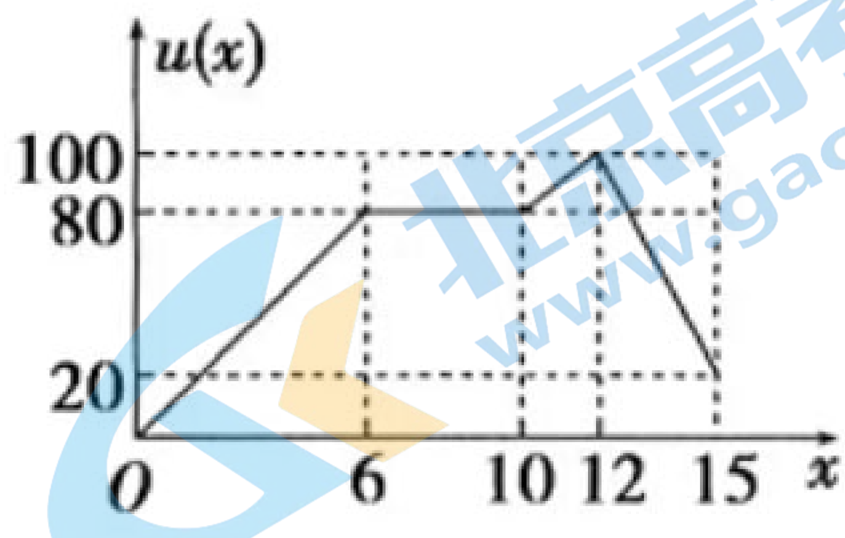
B.对 $\forall x\in\mathbf{R}$， $f(x)>-1$ 恒成立

C.不存在正实数 a，使得函数 $y=\dfrac{f(x)}{a^x}$ 为奇函数

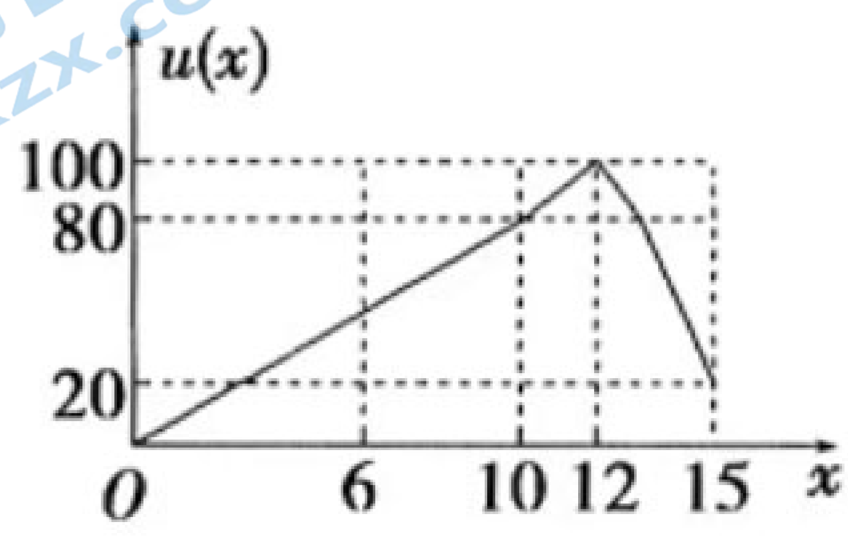
D.方程 $f(x)=x$ 只有一个解

10. 右图为某无人机飞行时，从某时刻开始15分钟内的速度 $V(x)$（单位：米/分钟）与时间 x（单位：分钟）的关系.若定义“速度差函数” $v(x)$ 为无人机在时间段 $[0,x]$ 内的最大速度与最小速度的差，则 $v(x)$ 的图像为

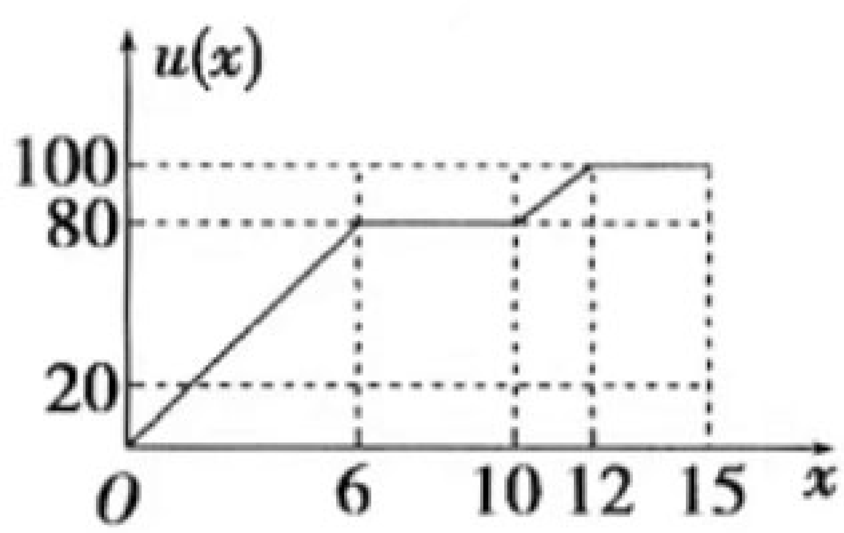




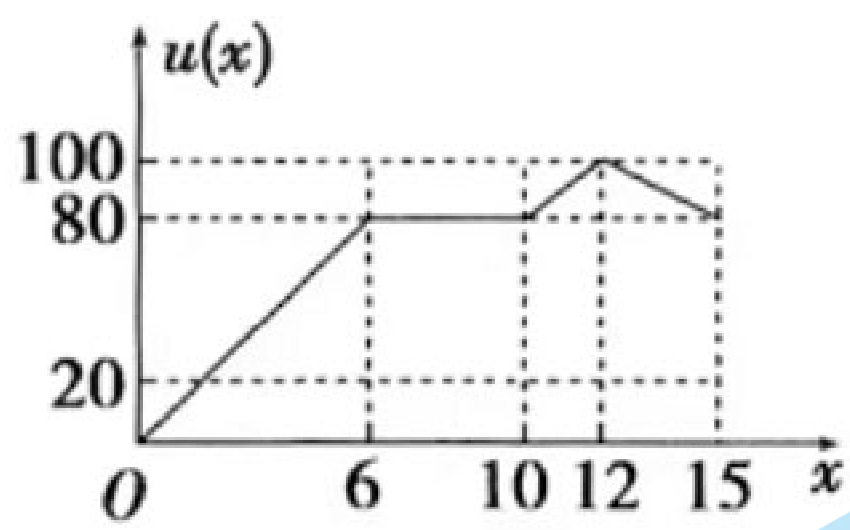
A



B



C



D

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$， $\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，则 $\tan\alpha=$_________.

12. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$， $\boldsymbol{b}=(m,m+3)$，若 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，则 $m=$_________.

13. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边， α 的终边过点 $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，若 α 的终边绕原点按逆时针方向旋转 $90°$ 得到角 β，则 $\sin\beta$ 的值为_________.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3+ax, x<a\\ 2x, x\geq a\end{cases}$，若 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，则 a 的一个取值为_________；若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则实数 a 的取值范围是_________.

15. 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1>0$，$a_{n+1}a_n-a_n^2=\lambda\ (\lambda\in\mathbf{R})$. 给出下列四个结论：

①$\{a_n\}$是递增数列；　　②$\forall\lambda\in\mathbf{R}$，$\{a_n\}$都不是等差数列；

③当$\lambda=1$时，a_1是$\{a_n\}$中的最小项；　　④当$\lambda\geq\frac{1}{4}$时，$S_{2023}>2022$.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.（本小题 14 分）

已知函数$f(x)=\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求函数$f(x)$的最小正周期；

（Ⅱ）求不等式$f(x)\geq 0$的解集.

17.（本小题 14 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_{n+1}=a_n+2$，$S_2=a_3$.

（Ⅰ）若a_1,a_3,a_m成等比数列，求m的值；

（Ⅱ）设$b_n=a_n-2^{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

18.（本小题 14 分）

在$\triangle ABC$中，$\angle B\neq\frac{\pi}{2}$，$\cos 2B=\sqrt{3}\cos B-1$.

（Ⅰ）求$\angle B$；

（Ⅱ）从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得$\triangle ABC$存在且唯一确定，求$\triangle ABC$的面积.

条件①：$\sin A=\sqrt{3}\sin C$，$b=2$；

条件②：$AC=\sqrt{6}$，BC边上的高为2；

条件③：$2b=3a$，$b\sin A=1$.

注：如果选择的条件不符合要求第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，则按第一个解答计分.

19.（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=e^x\sin x$，$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 导函数 $f'(x)$ 的零点；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的最大值与最小值.

20.（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{a(x-1)}{x+1}$.

（Ⅰ）当 $a=2$ 时，求函数 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围；

（Ⅲ）讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.

21.（本小题 14 分）

若数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{kn-i}\}$ $(i=0,1,2,\cdots,k-1)$ 均为等差数列，则称 $\{a_n\}$ 为 k 阶等差数列.

（Ⅰ）若 $a_n=n$，数列 $\{a_{3n-2}\}$ 的前15项与 $\{a_{4n}\}$ 的前15项中相同的项构成数列 $\{b_n\}$，写出 $\{b_n\}$ 的各项，并求 $\{b_n\}$ 的各项和；

（Ⅱ）若数列 $\{a_n\}$ 既是3阶也是4阶等差数列，设 $\{a_{3n-2}\}$，$\{a_{3n-1}\}$，$\{a_{3n}\}$ 的公差分别为 d_1,d_2,d_3.

（ⅰ）判断 d_1,d_2,d_3 的大小关系并证明；

（ⅱ）求证：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	D	C	B	A	C	D	A	B	C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

（12）-2

（13）$-\dfrac{1}{2}$

（14）0（答案不唯一，$a\in[-2,0]\cup[1,+\infty)$）（3 分）；$(-\infty,-2]\cup[0,1]$（2 分）

（15）③④（只写对一个 3 分）

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）$f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\sqrt{3}\cdot\dfrac{\cos 2x+1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……4 分

$=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

$=\sin 2x\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos 2x\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}$

$=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ ……6 分

所以，函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\dfrac{2\pi}{|2|}=\pi$． ……8 分

（Ⅱ）因为 $y=\sin x$ 在区间 $[2k\pi,\pi+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$ 大于等于零，

若 $f(x)\geqslant 0$，则 x 需满足：

$2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\pi+2k\pi$， ……4 分

$-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$，

$-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{3}+k\pi$，

所以 $f(x)\geqslant 0$ 的解集为 $[-\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\dfrac{\pi}{3}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$． ……6 分

（17）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $a_{n+1}=a_n+2$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列， 设公差为 d，则 $d=2$． ……2 分

又因为 $S_2=a_3$，所以 $a_1+a_2=a_3$，得 $a_1=d=2$． ……4 分

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n \quad (n \in \mathbf{N}^*)$．　……6 分

又因为 a_1, a_3, a_m 成等比数列，

所以 $a_3^2 = a_1 \times a_m$，

即 $36 = 2 \times 2m$，得 $m = 9$．　……8 分

（Ⅱ）因为 $b_n = 2n - 2^{2n} = 2n - 4^n$，　……1 分

所以 $T_n = (2\times1-4^1)+(2\times2-4^2)+\cdots+(2\times n-4^n)$

$= 2\times(1+2+\cdots+n)-(4^1+4^2+\cdots+4^n)$　……3 分

$= 2\times\dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{4\times(1-4^n)}{1-4}$　……5 分

$= n(n+1)-\dfrac{4}{3}\times(4^n-1)$

$= n^2+n+\dfrac{4}{3}-\dfrac{4^{n+1}}{3}$　……6 分

（18）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $\cos 2B = \sqrt{3}\cos B - 1$，

所以 $2\cos^2 B - 1 = \sqrt{3}\cos B - 1$．　……2 分

所以 $\cos B(2\cos B - \sqrt{3}) = 0$．

因为 $\angle B \neq \dfrac{\pi}{2}$，所以 $\cos B \neq 0$．

所以 $2\cos B - \sqrt{3} = 0$，解得 $\cos B = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$．　……4 分

又因为 $0 < B < \pi$．　……5 分

所以 $\angle B = \dfrac{\pi}{6}$．　……6 分

（Ⅱ）若选择条件① $\sin A = \sqrt{3}\sin C$，$b = 2$．

在 ΔABC 中，因为 $\sin A = \sqrt{3}\sin C$，

因为 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$，所以 $a = \sqrt{3}c$．　……2 分

因为 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$，

所以 $3c^2 + c^2 - 3c^2 = 4$，解得 $c = 2$．　……5 分

所以 $a = 2\sqrt{3}$．　……6 分

所以 $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}ac\sin B = \dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2\times\dfrac{1}{2} = \sqrt{3}$．　……8 分

若选择条件② $AC = \sqrt{6}$，BC 边上的高为 2．

在 ΔABC 中，因为 $\angle B=\frac{\pi}{6}$， BC 边上的高为 2，

所以 $AB=4$.

因为 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$，

所以 $\sin C=\frac{AB\sin B}{AC}$，即 $\sin C=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

因为 $AB>AC$， $\angle C>\frac{\pi}{6}$，所以 $\angle C$ 为锐角或钝角， ΔABC 不唯一确定.

若选择条件③ $2b=3a$， $b\sin A=1$

方法一：

因为 $2b=3a$，

所以 $2\sin B=3\sin A$，即 $\sin A=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$.

因为 $b\sin A=1$,所以 $b=3$， $a=\frac{2}{3}b=2$.

因为 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,

所以 $c^2-2\sqrt{3}c-5=0$. 解得 $c=\sqrt{3}+2\sqrt{2}$ 或 $c=\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ （舍去）

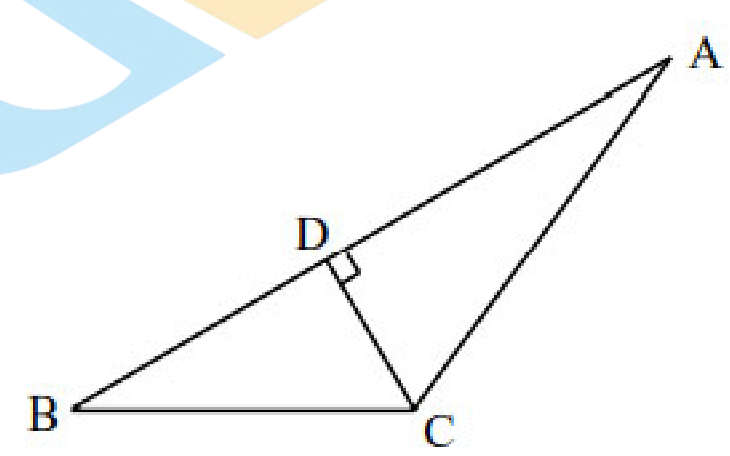
所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 2\times(\sqrt{3}+2\sqrt{2})\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2}$.

方法二：

在 ΔABC 中，因为 $2b=3a$，所以 $2\sin B=3\sin A$，即 $\sin A=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$.

因为 $b\sin A=1$，所以 $b=3$， $a=\frac{2}{3}b=2$，

过 C 作 $CD\perp AB$ 于 D，即 $CD=b\sin A=1$.



在 $Rt\Delta ADC$ 中， $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=2\sqrt{2}$.

在 $Rt\Delta BDC$ 中， $BD=\sqrt{BC^2-CD^2}=\sqrt{3}$.

所以 $AB=AD+DB=2\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}\times(\sqrt{3}+2\sqrt{2})=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2}$.

（19）（本小题 14 分）

解：（I）因为 $f(x)=e^x\sin x$，

所以 $f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$. ……2 分

令 $f'(x)=0$，因为 $e^x>0$，所以 $\sin x+\cos x=0$， ……4 分

即 $\sin(x+\frac{\pi}{4})=0$，

因为 $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，所以 $x=-\frac{\pi}{4}$.

所以函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的零点为 $-\frac{\pi}{4}$. ……7 分

（II）由（I）当 x 变化时 $f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4})$	$-\frac{\pi}{4}$	$(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调减	极小值	单调增

……3 分

当 $x=-\frac{\pi}{4}$ 时，$f(x)$ 有最小值为 $f(-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$. ……5 分

因为 $f(-\frac{\pi}{2})=-e^{-\frac{\pi}{2}}$，$f(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}$，

所以 当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 有最大值为 $f(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}$； ……7 分

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）$a=2$，所以 $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$，

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2(x+1)-2(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}$， ……2 分

所以切线斜率为 $k=f'(1)=0$，又切点为 $(1,0)$，

所以切线方程为 $y=0$. ……4 分

（Ⅱ）$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a(x+1)-a(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-2ax}{x(x+1)^2}$， ……1 分

因为函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，即 $(x+1)^2-2ax\geqslant 0$ 恒成立，

即 $a\leqslant\frac{(x+1)^2}{2x}=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x}+2)$ 恒成立. ……2 分

又 $\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x}+2)\geqslant\frac{1}{2}(2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+2)=2$，

当且仅当 $x=\frac{1}{x}$，即 $x=1$ 时，$\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x}+2)$ 有最小值 2，

所以 $a\leqslant 2$. ……5 分

经检验，$a\leqslant 2$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2]$.

（Ⅲ）当 $a\leqslant 2$ 时，由（Ⅱ）知，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

且 $f(1)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有一个零点 $x=1$． ……2 分

当 $a>2$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x^2+2(1-a)x+1=0$，

$\Delta=4(1-a)^2-4=4a(a-2)>0$，故设两根为 x_1,x_2，

因为 $x_1+x_2=2(a-1)>0$ 且 $x_1\cdot x_2=1$，所以 $0<x_1<1<x_2$，

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的情况如下：

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
	增	极大	减	极小	增

因为 $f(1)=0$，所以 $f(x_1)>0$ 且 $f(x_2)<0$，

又当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\dfrac{x-1}{x+1}=1-\dfrac{2}{x+1}\in(-1,1)$，

取 $x=e^{-a}\in(0,1)$，有 $f(e^{-a})<-a-a\times(-1)=0$，

再取 $x=e^{a}\in(1,+\infty)$，有 $f(e^{a})>a-a\times1=0$．

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$，$(1,+\infty)$ 各有一个零点，且 $f(1)=0$，共 3 个零点；

……6 分

综上，当 $a\leqslant 2$ 时，$f(x)$ 的零点个数为 1；当 $a>2$ 时，$f(x)$ 的零点个数为 3.

（21）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）数列 $\{b_n\}$ 为：4，16，28，40，其和为 4+16+28+40=88． ……4 分

（Ⅱ）（i）d_1,d_2,d_3 值的大小关系为：$d_1=d_2=d_3$． ……1 分

证明：数列 $\{a_n\}$ 是 4 阶等差数列，设 $\{a_{4n}\}$ 的公差为 t，

由题意 $a_{16}=a_{4\times4}=a_{4\times1}+(4-1)t=a_4+3t$，

$a_{16}=a_{3\times6-2}=a_{3\times2-2}+(6-2)d_1=a_4+4d_1$，

得：$4d_1=3t$． ①

$a_{20}=a_{3\times7-1}=a_{3\times3-1}+(7-3)d_2=a_8+4d_2$，

$a_{20}=a_{4\times5}=a_{4\times2}+(5-2)t=a_8+3t$，

得：$4d_2=3t$ ． ②

$a_{24}=a_{8\times3}=a_{4\times3}+(8-4)d_3=a_{12}+4d_3$，

$a_{24}=a_{6\times4}=a_{3\times4}+(6-3)t=a_{12}+3t$，

得：$4d_3=3t$ ． ③

由①②③得 $d_1=d_2=d_3$.　　　　　　　　　　　　……5 分

（ii）由（1）设 $d_3=3d$, $t=4d$,

由题：$a_8=a_2+2d_2=a_2+6d$,

$a_8=a_4+t=a_1+d_1+t=a_1+7d$,

所以，$a_2=a_1+d$.

$a_{12}=a_3+3d_3=a_3+9d$,

所以，$a_3=a_1+2d$.

$a_{3n-2}=a_1+(n-1)d_1=a_1+((3n-2)-1)d$,

所以当 $n=3k-2,k\in N^*$ 时，$a_n=a_1+(n-1)d$,

$a_{3n-1}=a_2+(n-1)d_2=a_1+d+(3n-3)d=a_1+((3n-1)-1)d$,

所以当 $n=3k-1,k\in N^*$ 时，$a_n=a_1+(n-1)d$.

$a_{3n}=a_3+(n-1)d_3=a_1+(3n-1)d$,

所以当 $n=3k,k\in N^*$ 时，$a_n=a_1+(n-1)d$.

综上，$a_n=a_1+(n-1)d$, 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.　　　　　　……5 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。