准考证号____________________姓名________

（在此卷上答题无效）

福建省漳州市2024届高三毕业班第一次教学质量检测

数 学 试 题

本试卷共6页，22小题，满分150分，考试时间120分钟。

考生注意：

1. 答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，用0.5mm黑色签字笔将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 设全集 $U=\mathbf{R}$，若集合 $A=\{x \mid 1 \leqslant 2^x \leqslant 4\}$，$B=\{x \mid y=\sqrt{x-1}\}$，则如图所示的阴影部分表示的集合为

A. $(-\infty, 0)$　　B. $[1, 2]$

C. $(2, +\infty)$　　D. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

2. 已知复数 z 满足 $z+(z-1)\mathrm{i}=3$（i 为虚数单位），则 $|z|=$

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

3. 已知函数 $f(x)=2^x+x$, $g(x)=\log_2 x+x$, $h(x)=x^3+x$ 的零点分别是 a, b, c，则 a, b, c 的大小关系是

A. $a>b>c$　　B. $b>c>a$　　C. $c>a>b$　　D. $b>a>c$

4. 已知向量 $\vec{a}=(-1,1)$, $\vec{b}=(2,x)$，若 $\vec{a} \perp \vec{b}$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{10}$　　D. $2\sqrt{3}$

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的一条渐近线被圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 所截得的弦长为2，则双曲线的离心率为

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{10}$

6. 已知 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$，则 $\sin2\alpha=$

A. $-\frac{7}{9}$　　B. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$　　C. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$　　D. $\frac{7}{9}$

7. 如图，在五面体 $ABCDEF$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$EF<AB$，$EF // AB$，若 $AB=25$，$AD=10$，且底面 $ABCD$ 与其余各面所成角的正切值均为 $\frac{3}{5}$，则该五面体的体积是

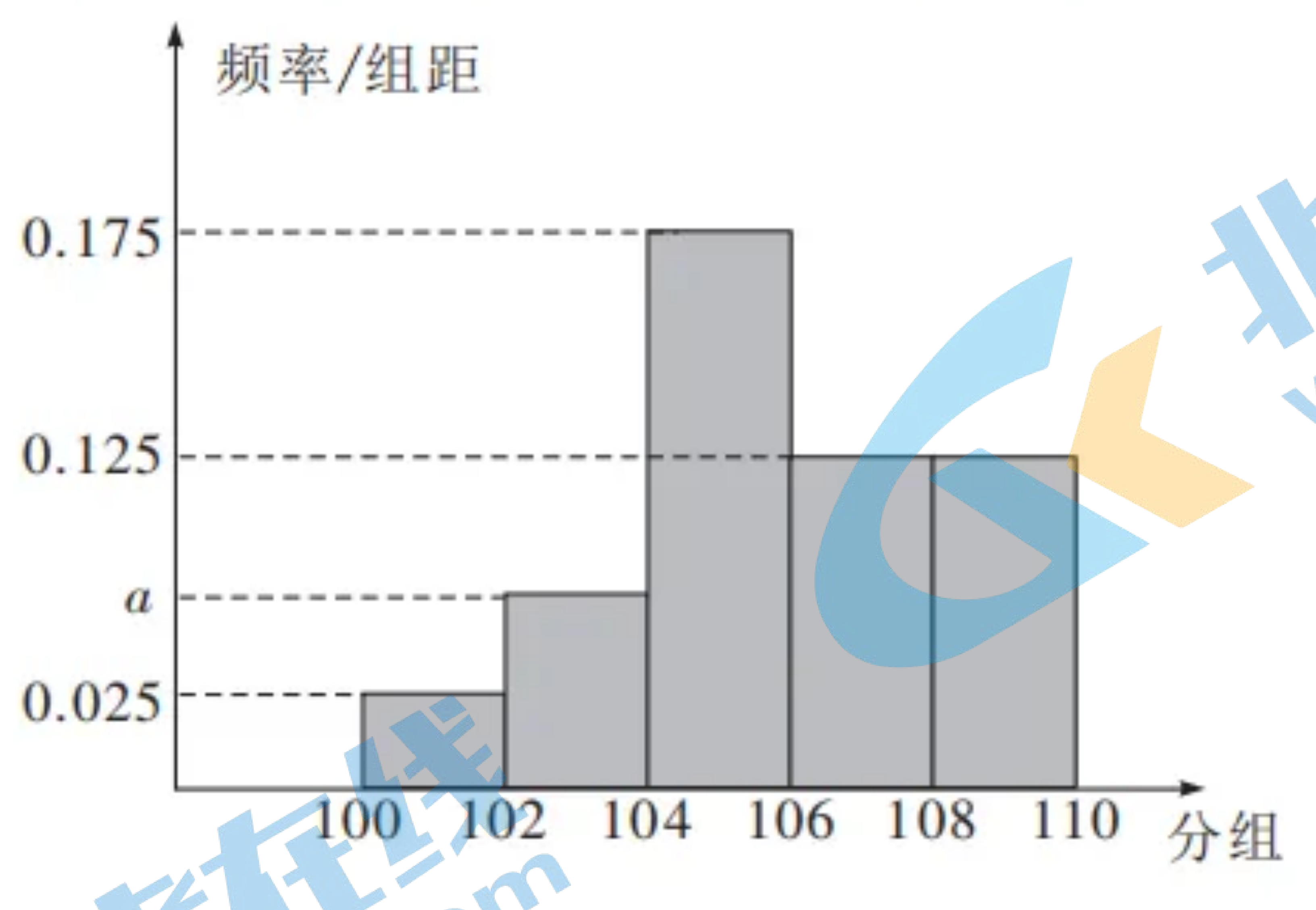
A. 225　　B. 250　　C. 325　　D. 375

8. 已知直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=x^2-(a+1)$ 的切线，也是曲线 $y=a\ln x-1$ 的切线，则 k 的最大值是

A. $\frac{2}{e}$　　B. $\frac{4}{e}$　　C. $2e$　　D. $4e$

二、多项选择题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分)

9. 将 100 个数据整理并绘制成频率分布直方图(如图所示)，则下列结论正确的是



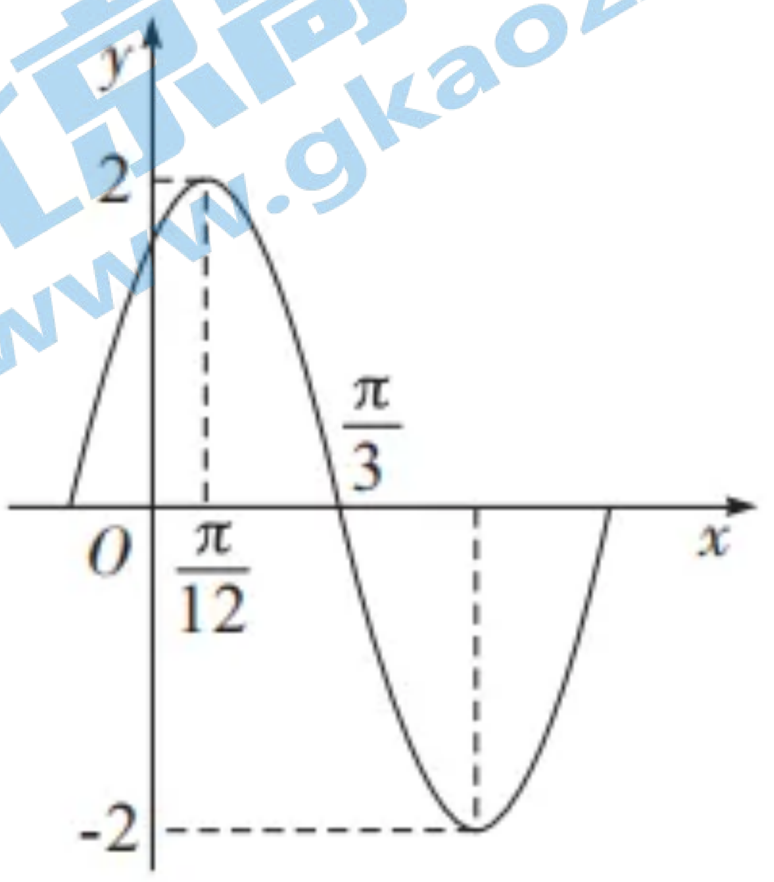
A. $a=0.100$

B. 该组数据的平均数的估计值大于众数的估计值

C. 该组数据的第 90 百分位数约为 109.2

D. 在该组数据中随机选取一个数据记为 n，已知 $n\in[100,104)$，则 $n\in[100,102)$ 的概率为 $\frac{1}{2}$

10. 函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0, \omega>0, |\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，则下列结论正确的是



A. $\omega=2$

B. $y=f(x)$的图象关于直线$x=-\dfrac{5\pi}{12}$对称

C. 将$y=f(x)$的图象向右平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位长度后，得到的图象关于原点对称

D. 若$y=f(\lambda x)(\lambda>0)$在$[0,\pi]$上有且仅有一个零点，则$\lambda\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{6}\right)$

11. 已知正项等比数列$\{a_n\}$的前n项积为T_n，且$a_1>1$，则下列结论正确的是

A. 若$T_6=T_8$，则$T_{14}=1$

B. 若$T_6=T_8$，则$T_n\leqslant T_7$

C. 若$T_6<T_7$，则$T_7<T_8$

D. 若$T_6>T_7$，则$T_7>T_8$

12. 已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$，其导函数$f'(x)$的定义域也为$\mathbf{R}$.
若$f(x+2)=-f(x)$，且$f(x-1)$为奇函数，则

A. $f(1)=0$

B. $f(2024)=0$

C. $f'(x)=-f'(-x)$

D. $f'(x)=f'(2022-x)$

三、填空题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13. $\left(\dfrac{1}{x}+x^2\right)^6$的展开式中的常数项是________.

14. 有一批同一型号的产品，其中甲工厂生产的占 40%，乙工厂生产的占 60%. 已知甲、乙两工厂生产的该型号产品的次品率分别为 3%，2%，则从这批产品中任取一件是次品的概率是________.

15. 已知抛物线$y^2=2x$的焦点为F，过点F的直线与抛物线交于A，B两点，则$4|AF|+|BF|$的最小值是________.

16. 一个封闭的圆台容器(容器壁厚度忽略不计)的上底面半径为 1，下底面半径为 6，母线与底面所成的角为 60°. 在圆台容器内放置一个可以任意转动的正方体，则正方体的棱长的最大值是________.

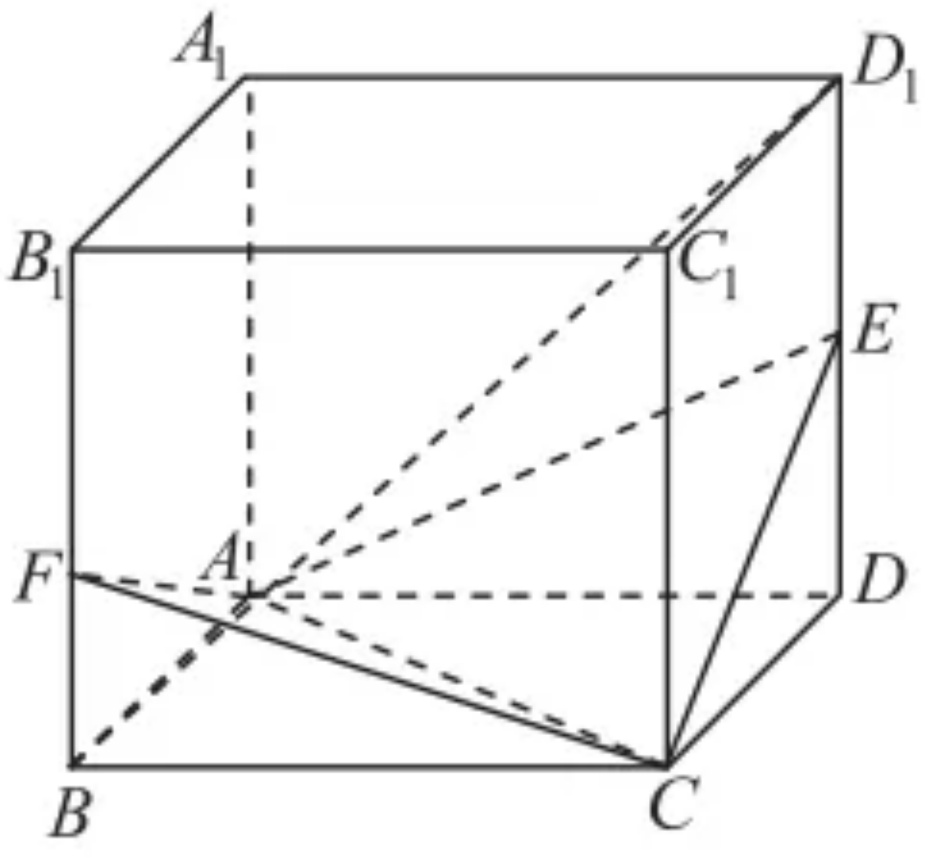
四、解答题(本大题共6小题，共70分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分10分)

如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2，E 为棱 DD_1 的中点.

(1) 证明：BD_1 // 平面 ACE;

(2) 若 F 是棱 BB_1 上一点，且二面角 $F-AC-E$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求 BF.



18. (本小题满分12分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $a\sin B=b\sin\dfrac{B+C}{2}$.

(1) 求 A;

(2) 若 D 为边 BC 上一点，且 $BD=\dfrac{1}{3}BC$，$AD=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}c$，证明：$\triangle ABC$ 为直角三角形.

19. (本小题满分12分)

已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足 $a_1=b_1=1$，$b_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_{n+2}}b_n$，记 T_n 为$\{b_n\}$的前 n 项和.

(1) 若$\{a_n\}$为等比数列，其公比 $q=2$，求 T_n;

(2) 若$\{a_n\}$为等差数列，其公差 $d=2$，证明：$T_n<\dfrac{3}{2}$.

20. (本小题满分 12 分)

甲、乙两选手进行一场体育竞技比赛，采用 $2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$ 局 n 胜制(当一选手先赢下 n 局比赛时，该选手获胜，比赛结束). 已知每局比赛甲获胜的概率为 p，乙获胜的概率为 $1-p$.

(1) 若 $n=2$，$p=\frac{1}{2}$，比赛结束时的局数为 X，求 X 的分布列与数学期望；

(2) 若 $n=3$ 比 $n=2$ 对甲更有利，求 p 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 $F_1(-\sqrt{3},0)$，且过点 $A\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$.

(1) 求 C 的方程；

(2) 不过原点 O 的直线 l 与 C 交于 P，Q 两点，且直线 OP，PQ，OQ 的斜率成等比数列.

(i) 求 l 的斜率；

(ii) 求 $\triangle OPQ$ 的面积的取值范围.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=ae^{x}+x+1$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $x>1$ 时，$f(x)>\ln\frac{x-1}{a}+x$，求实数 a 的取值范围.

福建省漳州市2024届高三毕业班第一次教学质量检测

数学参考答案及评分细则

评分说明：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4. 只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
A	D	B	C	B	D	C	B

二、多项选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分，在每小题给出的四个选项中，有多个选项符合题目要求，全部选对的得5分，选对但不全的得2分，有选错的得0分。

9	10	11	12
BC	ABD	ABD	ACD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 15　　14. 0.024　　15. $\frac{9}{2}$　　16. 4

四、解答题：本大题共6小题，共70分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（10分）

【解析】解法一：

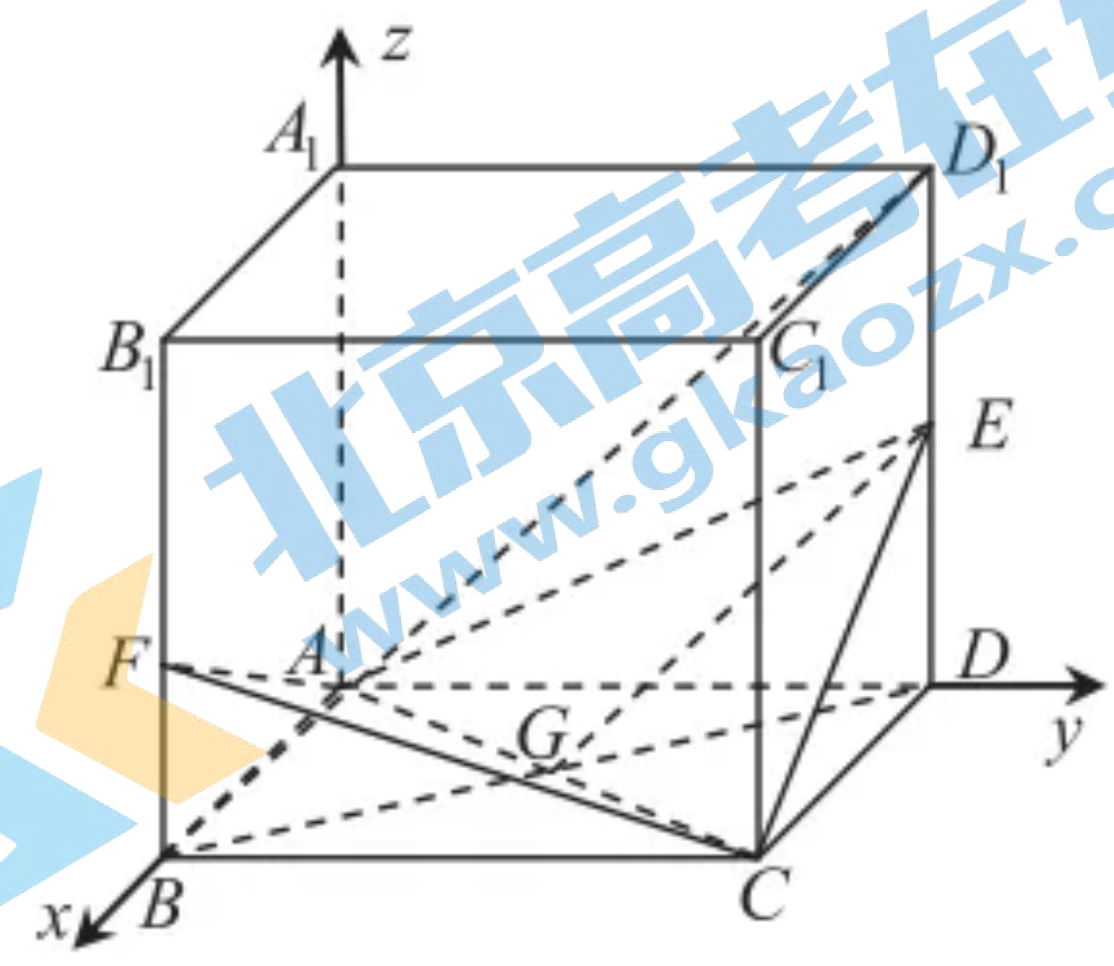
（1）证明：连接 BD 交 AC 于点 G，连接 EG，　…………………………… 1分

则 G 为 DB 中点，又 E 为 DD_1 中点，所以 $GE \parallel BD_1$，　……………… 2分

又 $BD_1 \not\subset$ 平面 ACE，$GE \subset$ 平面 ACE，所以 $BD_1 \parallel$ 平面 ACE.　……… 4分

（2）如图，以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ 的方向为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$E(0,2,1)$，$B_1(2,0,2)$，　………………………………………………………… 5分

所以$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{AE}=(0,2,1)$.



设平面 ACE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2x+2y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=2y+z=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $y=-1,z=2$，

所以取 $\vec{n}=(1,-1,2)$. ………… 6 分

设 $F(2,0,k)\ (0\leqslant k\leqslant 2)$，

则$\overrightarrow{AF}=(2,0,k)$.

设平面 ACF 的法向量为 $\vec{m}=(a,b,c)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=2a+2b=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AF}=2a+ck=0\end{cases}$，令 $a=k$，则 $b=-k$，$c=-2$，

所以取 $\vec{m}=(k,-k,-2)$. …………………………………………………… 7 分

因为二面角 $F-AC-E$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{|2k-4|}{\sqrt{6}\sqrt{2k^2+4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$， ……………………… 9 分

解得 $k=\dfrac{1}{2}$，即 $BF=\dfrac{1}{2}$. · …………………………………… 10 分

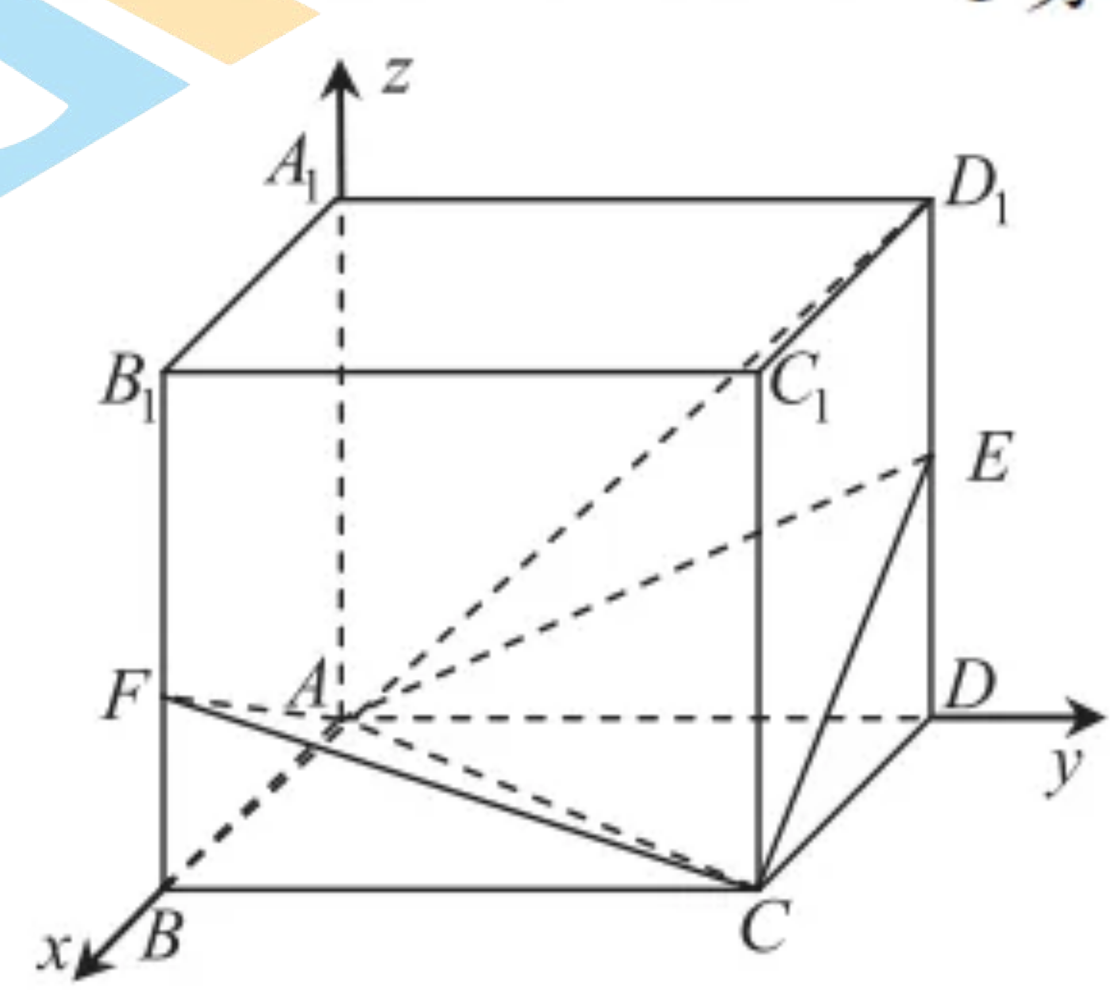
解法二：

(1) 如图，以 A 为原点，分别以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA_1}$的方向为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立空间直角坐标系，则

$A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$E(0,2,1)$，$B_1(2,0,2)$，$D_1(0,2,2)$，

…………………………………………………………………………… 1 分

所以$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{AE}=(0,2,1)$.



设平面 ACE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2x+2y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=2y+z=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $y=-1$，$z=2$，

所以取 $\vec{n}=(1,-1,2)$. ………… 3 分

又$\overrightarrow{BD_1}=(-2,2,2)$，

所以$\overrightarrow{BD_1}\cdot\vec{n}=(-2)\times1+2\times(-1)+2\times2=0$，所以$\overrightarrow{BD_1}\perp\vec{n}$.

…………………………………………………………………………… 5 分

又 $BD_1\not\subset$ 平面 ACE，所以 BD_1 // 平面 ACE. ………………………… 6 分

（2）设 $F(2,0,k)$ $(0\leqslant k\leqslant 2)$，则$\overrightarrow{AF}=(2,0,k)$.

设平面 ACF 的法向量为 $\vec{m}=(a,b,c)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=2a+2b=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AF}=2a+ck=0\end{cases}$，令 $a=k$，则 $b=-k$，$c=-2$，

所以取 $\vec{m}=(k,-k,-2)$. ………………………………………………………… 7 分

又平面 ACE 的法向量为 $\vec{n}=(1,-1,2)$，

且二面角 $F-AC-E$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{|2k-4|}{\sqrt{6}\sqrt{2k^2+4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$， …………………………… 9 分

解得 $k=\dfrac{1}{2}$，即 $BF=\dfrac{1}{2}$. …………………………………………………………… 10 分

18.（12 分）

【解析】解法一：

（1）因为 $a\sin B=b\sin\dfrac{B+C}{2}$，

所以 $\sin A\sin B=\sin B\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}\right)=\sin B\cos\dfrac{A}{2}$， ………………………… 2 分

因为 $\sin B>0$，所以 $\sin A=\cos\dfrac{A}{2}$，即 $2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}=\cos\dfrac{A}{2}$. ……… 3 分

又 $\cos\dfrac{A}{2}\neq 0$，所以 $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………… 4 分

又 $0<\dfrac{A}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\dfrac{A}{2}=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………… 5 分

（2）因为$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

所以 $|\overrightarrow{AD}|^2=\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}^2+\dfrac{1}{9}\overrightarrow{AC}^2+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\dfrac{4}{9}c^2+\dfrac{1}{9}b^2+\dfrac{2}{9}bc=\dfrac{4}{3}c^2$.

即 $b^2+2bc-8c^2=0$，所以 $(b+4c)(b-2c)=0$，所以 $b=2c$. …… 9 分

因此 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle BAC=b^2+c^2-bc=3c^2$， …………… 10 分

又 $b=2c$，所以 $b^2=a^2+c^2$， ………………………………………………… 11 分

所以 $B=90°$，所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形. ………………………………… 12 分

解法二：

（1）同解法一； …………………………………………………………………… 5 分

（2）因为 $\angle ADB=\pi-\angle ADC$，所以 $\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$，

所以$\dfrac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}+\dfrac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}=0$，

又 $BD=\dfrac{1}{3}BC=\dfrac{1}{3}a$，$AD=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}c$，

所以$\dfrac{\frac{4}{3}c^2+\frac{1}{9}a^2-c^2}{\frac{4\sqrt{3}}{9}ac}+\dfrac{\frac{4}{3}c^2+\frac{4}{9}a^2-b^2}{\frac{8\sqrt{3}}{9}ac}=0$，

即 $6c^2-3b^2+2a^2=0$. …………………………………………………… 9 分

又 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle BAC=b^2+c^2-bc$， ………………………… 10 分

所以 $6c^2-3b^2+2(b^2+c^2-bc)=0$，

即 $8c^2-2bc-b^2=0$，所以 $(4c+b)(2c-b)=0$，

所以 $b=2c$，所以 $a^2=3c^2$.

因此 $b^2=a^2+c^2$， …………………………………………………………… 11 分

所以 $B=90°$，所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形. ………………………………… 12 分

19.（12 分）

【解析】解法一：

（1）因为$\{a_n\}$为等比数列，$a_1=1$，$q=2$，

所以$\dfrac{a_n}{a_{n+2}}=\dfrac{1}{4}$，所以$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{a_n}{a_{n+2}}=\dfrac{1}{4}$. …………………………………… 1 分

又 $b_1=1$，所以$\{b_n\}$是以 $b_1=1$ 为首项，$\dfrac{1}{4}$ 为公比的等比数列， … 3 分

所以 $T_n=\dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}\left[1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right]$. …………………………………… 5 分

（2）因为$\{a_n\}$为等差数列，$a_1=1$，$d=2$，

所以 $a_n=2n-1$，所以 $a_{n+2}=2n+3$. ……………………………………… 7 分

因为 $b_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_{n+2}}b_n=\dfrac{2n-1}{2n+3}b_n$，即$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{2n-1}{2n+3}$，

所以$\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=\dfrac{2n-3}{2n+1}(n\geqslant 2)$， ……………………………………………… 9 分

所以当 $n \geqslant 2$ 时，

$$b_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} \times \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \times \frac{b_{n-2}}{b_{n-3}} \times \cdots \times \frac{b_3}{b_2} \times \frac{b_2}{b_1} \times b_1$$

$$= \frac{2n-3}{2n+1} \times \frac{2n-5}{2n-1} \times \frac{2n-7}{2n-3} \times \cdots \times \frac{3}{7} \times \frac{1}{5} \times 1 = \frac{3}{(2n-1)(2n+1)}.$$

又 $b_1 = 1$ 符合上式，

所以 $b_n = \dfrac{3}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$. ……………… 10 分

所以 $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} + b_n$

$= \dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$ … 11 分

$= \dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right) < \dfrac{3}{2}$. ………………………………………… 12 分

解法二：

(1) 同解法一； ………………………………………………………………… 5 分

(2) 因为$\{a_n\}$为等差数列，$a_1 = 1$，$d = 2$，

所以 $a_n = 2n - 1$，所以 $a_{n+2} = 2n + 3$. ……………………………… 7 分

因为 $b_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_{n+2}} b_n = \dfrac{2n-1}{2n+3} b_n$，即 $b_{n+1}(2n+3) = (2n-1)b_n$，

所以 $b_{n+1}(2n+1)(2n+3) = b_n(2n-1)(2n+1)$， ……………………… 9 分

所以数列$\{b_n(2n-1)(2n+1)\}$为常数列.

因此 $b_n(2n-1)(2n+1) = 3b_1 = 3$，

所以 $b_n = \dfrac{3}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$. ……………… 10 分

所以 $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} + b_n$

$= \dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$ … 11 分

$= \dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right) < \dfrac{3}{2}$. ………………………………………… 12 分

20. (12 分)

【解析】解法一：

(1) 依题意得，X 所有可能取值为 2，3. ……………………………… 1 分

$P(X=2) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$， ……………………………………… 2 分

$P(X=3) = C_2^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + C_2^1\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$， ……………… 3 分

所以 X 的分布列为

X	2	3
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

…………………………………… 4 分

所以 X 的数学期望 $E(X)=2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$. ………………………… 5 分

(2) 若采用 3 局 2 胜制，甲最终获胜的概率为：

$p_1=p^2+C_2^1p^2(1-p)=p^2(3-2p)$， ………………………………………… 7 分

若采用 5 局 3 胜制，甲最终获胜的概率为：

$p_2=p^3+C_3^1p^3(1-p)+C_4^2p^3(1-p)^2=p^3(6p^2-15p+10)$， ……… 9 分

若采用 5 局 3 胜制比采用 3 局 2 胜制对甲更有利，则 $p_2-p_1>0$，

即 $p^3(6p^2-15p+10)-p^2(3-2p)=p^2(6p^3-15p^2+10p-3+2p)$

$=3p^2(2p^3-5p^2+4p-1)$

$=3p^2(p-1)(2p^2-3p+1)=3p^2(p-1)^2(2p-1)>0$，

解得 $\frac{1}{2}<p<1$. …………………………………………………………… 12 分

解法二：

(1) 同解法一； ……………………………………………………………… 5 分

(2) 采用 3 局 2 胜制，不妨设赛满 3 局，用 ξ 表示 3 局比赛中甲获胜的局数，则 $\xi\sim B(3,p)$，

甲最终获胜的概率为：$p_1=P(\xi=2)+P(\xi=3)=C_3^2p^2(1-p)+C_3^3p^3$

$=p^2[C_3^2(1-p)+C_3^3p]=p^2(3-2p)$， ……………………………………… 7 分

采用 5 局 3 胜制，不妨设赛满 5 局，用 η 表示 5 局比赛中甲获胜的局数，

则 $\eta\sim B(5,p)$，

甲最终获胜的概率为：

$p_2=P(\eta=3)+P(\eta=4)+P(\eta=5)=C_5^3p^3(1-p)^2+C_5^4p^4(1-p)+C_5^5p^5$

$=p^3(6p^2-15p+10)$， ………………………………………………………… 9 分

若采用 5 局 3 胜制比采用 3 局 2 胜制对甲更有利，则 $p_2-p_1>0$，

即 $p^3(6p^2-15p+10)-p^2(3-2p)=p^2(6p^3-15p^2+10p-3+2p)$

$=3p^2(2p^3-5p^2+4p-1)$

$=3p^2(p-1)(2p^2-3p+1)=3p^2(p-1)^2(2p-1)>0$，

解得 $\frac{1}{2}<p<1$. …………………………………………………………… 12 分

21. (12 分)

【解析】

(1) 由题知，椭圆 C 的右焦点为 $F_2(\sqrt{3},0)$，且过点 $A\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$，

所以 $2a=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{3})^2+\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{4}}=4$，所以 $a=2$. ……………… 2 分

又 $c=\sqrt{3}$，所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=1$， ……………………………… 3 分

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………… 4 分

(2) (ⅰ) 由题知，直线 l 的斜率存在，且不为 0. 设 l：$y=kx+m(m\neq 0)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

则 $\begin{cases}y=kx+m\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}$，所以 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4(m^2-1)=0$， … 5 分

所以 $x_1+x_2=\frac{-8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4(m^2-1)}{1+4k^2}$， ………………………… 6 分

且 $\Delta=64k^2m^2-16(1+4k^2)(m^2-1)>0$，即 $4k^2-m^2+1>0$.

因为直线 OP，PQ，OQ 的斜率成等比数列.

所以 $\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=k^2$，即 $\frac{k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2}=k^2$，$x_1x_2\neq 0$

所以 $\frac{-8k^2m^2}{1+4k^2}+m^2=0$，且 $m^2\neq 1$. …………………………………… 7 分

因为 $m\neq 0$，所以 $k^2=\frac{1}{4}$，所以 $k=\pm\frac{1}{2}$. ………………………………… 8 分

(ⅱ) 由(ⅰ)知 $4k^2-m^2+1>0$，$k=\pm\frac{1}{2}$，所以 $0<m^2<2$，且 $m^2\neq 1$.

……………………………………………………………………………… 9 分

设点 O 到直线 PQ 的距离为 d，所以 $d=\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$.

因为 $k=\pm\frac{1}{2}$，所以 $(x_1+x_2)^2=4m^2$，$x_1x_2=2(m^2-1)$，

所以 $S_{\Delta OPQ}=\frac{1}{2}d\cdot|PQ|=\frac{1}{2}\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$

$$=\frac{1}{2}|m|\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{m^2(2-m^2)}.$$

$=\sqrt{-(m^2-1)^2+1}$，

又 $0<m^2<2$，且 $m^2\neq 1$. 所以 $S_{\triangle OPQ}\in(0,\ 1)$

即 $\triangle OPQ$ 的面积的取值范围$(0,\ 1)$. ………………………………… 12 分

22. (12 分)

【解析】

(1) 依题意，得 $f'(x)=ae^x+1$. ……………………………………………… 1 分

当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增. ………… 2 分

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)>0$，可得 $x<-\ln(-a)$；

令 $f'(x)<0$，

可得 $x>-\ln(-a)$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln(-a))$ 单调递增，在 $(-\ln(-a),+\infty)$ 单调递减.

…………………………………………………………………………………… 4 分

综上所述，当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增；当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln(-a))$ 单调递增，在 $(-\ln(-a),+\infty)$ 单调递减. ……… 5 分

(2) 因为当 $x>1$ 时，$f(x)>\ln\dfrac{x-1}{a}+x$，所以 $ae^x+x+1>\ln\dfrac{x-1}{a}+x$，

即 $e^{\ln a}e^x+x+1>\ln(x-1)-\ln a+x$，

即 $e^{x+\ln a}+\ln a+x>\ln(x-1)+x-1$，

即 $e^{x+\ln a}+x+\ln a>e^{\ln(x-1)}+\ln(x-1)$. ………………………………… 7 分

令 $h(x)=e^x+x$，则有 $h(x+\ln a)>h(\ln(x-1))$ 对 $\forall x\in(1,+\infty)$ 恒成立.

因为 $h'(x)=e^x+1>0$，所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，……… 8 分

故只需 $x+\ln a>\ln(x-1)$，

即 $\ln a>\ln(x-1)-x$ 对 $\forall x\in(1,+\infty)$ 恒成立. …………………… 9 分

令 $F(x)=\ln(x-1)-x$，则 $F'(x)=\dfrac{1}{x-1}-1=\dfrac{2-x}{x-1}$，令 $F'(x)=0$，

得 $x=2$.

当 $x\in(1,2)$ 时，$F'(x)>0$，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$F'(x)<0$，

所以 $F(x)$ 在 $(1,2)$ 单调递增，在 $(2,+\infty)$ 单调递减，

所以 $F(x)\leqslant F(2)=-2$. ……………………………………………… 11 分

因此 $\ln a>-2$，所以 $a>\dfrac{1}{e^2}$. ……………………………………………… 12 分