2019 北京延庆区高三一模

数　　学（理）

2019 年 3 月

本试卷共 5 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟

第 I 卷（选择题）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x|x(x+1)\le 0\}$，集合 $B=\{x|-1<x<1\}$，则 $A\cup B=$

（A）$\{x|-1\le x\le 1\}$　（B）$\{x|-1<x\le 0\}$　（C）$\{x|-1\le x<1\}$　（D）$\{x|0<x<1\}$

2. “$0<k<1$”是“方程 $\frac{x^2}{k-1}-\frac{y^2}{k+2}=1$ 表示双曲线”的

（A）充分而不必要条件　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　（D）既不充分也不必要条件

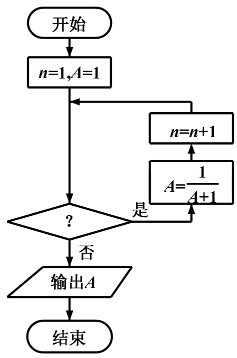
3. 已知 $x\in(0,1)$，令 $a=\log_x 3$，$b=\sin x$ ，$c=2^x$，那么 a,b,c 之间的大小关系为

（A）$a<b<c$　（B）$b<a<c$　（C）$b<c<a$　（D）$c<a<b$

4. 函数 $f(x)=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上的零点之和是

（A）$-\frac{\pi}{3}$　（B）$-\frac{\pi}{6}$　（C）$\frac{\pi}{6}$　（D）$\frac{\pi}{3}$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1, a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}$，若利用下面程序框图计算该数列的第 2019 项，则判断框内的条件是

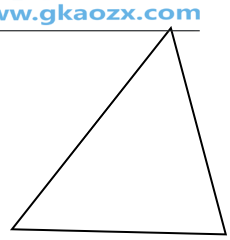


（A）$n\le 2016$　（B）$n\le 2017$　（C）$n\le 2018$　（D）$n\le 2019$

6. 已知曲线 $C:\begin{cases} x=2t, \\ y=a+2t \end{cases}$（$t$ 为参数），若曲线 C 上存在点 P 为曲线 $D:\rho=1$ 上一点，则实数 a 的取值范围为

（A）$[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$　（B）$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$　（C）$[-1,1]$　（D）$[-2,2]$

7. 已知一个正四面体的底面积为$3\sqrt{3}$，那么它的正视图（如右图）的面积为



（A） $4\sqrt{2}$　　（B） $3\sqrt{3}$　　（C） $2\sqrt{6}$　　（D） $3\sqrt{2}$

8. 5 名运动员参加一次乒乓球比赛，每 2 名运动员都赛 1 场并决出胜　负．设第 i 位运动员共胜 x_i 场，负 y_i 场（$i=1,2,3,4,5$），则错误的结论是

（A） $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=y_1+y_2+y_3+y_4+y_5$

（B） $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2$

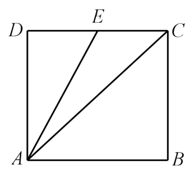
（C） $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$ 为定值，与各场比赛的结果无关

（D） $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2$ 为定值，与各场比赛结果无关

第 II 卷（非选择题）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9. 已知等比数列$\{a_n\}$的公比为 2，若 $a_1+a_3=4$，则 $a_2=$_____．



10. 设 i 为虚数单位，如果复数 z 满足 $(1-i)z=i$，那么 z 的虚部为____．

11. 如右图，正方形 $ABCD$ 中，E 为 DC 的中点，若 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{AE}$，则 $\lambda+\mu$ 的值为_____．

12. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的单调递减函数，能说明“一定存在 $x_0\in R$ 使得 $f(x_0)<1$”为假命题的一个函数是

$f(x)=$_____．

13. 已知 $f(x)=(2x-1)^4$，设 $(2x-1)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，则 $a_1+2a_2+3a_3+4a_4=$_____．

14. 已知集合 $M=\{x\in N|1\le x\le 21\}$，集合 A_1,A_2,A_3 满足

① 每个集合都恰有 7 个元素；② $A_1\cup A_2\cup A_3=M$．集合 A_i 中元素的最大值与最小值之和称为集合 A_i 的特征数，记为 X_i（$i=1,2,3$），则 $X_1+X_2+X_3$ 的最大值与最小值的和为_______．

三、解答题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

15.（本小题满分 13 分）

如图，在 ΔABC 中，点 D 在 BC 边上，$\cos\angle ADB=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，$\cos\angle C=\dfrac{3}{5}$，$AC=7$．

（I）求 $\sin\angle CAD$ 的值；

（II）若 $BD=10$，求 AD 的长及 ΔABD 的面积．

16.（本小题满分 13 分）

2020 年我国全面建成小康社会，其中小康生活的住房标准是城镇人均住房建筑面积 30 平方米．下表为 2007 年—2016 年中，我区城镇和农村人均住房建筑面积统计数据．单位：平方米.

	2007 年	2008 年	2009 年	2010 年	2011 年	2012 年	2013 年	2014 年	2015 年	2016 年
城镇	18.66	20.25	22.79	25	27.1	28.3	31.6	32.9	34.6	36.6
农村	23.3	24.8	26.5	27.9	30.7	32.4	34.1	37.1	41.2	45.8

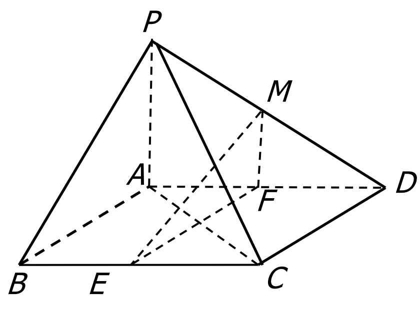
（Ⅰ）现从上述表格中随机抽取连续两年数据，求这两年中城镇人均住房建筑面积增长不少于 2 平方米的概率；

（Ⅱ）在给出的 10 年数据中，随机抽取三年，记 X 为同年中农村人均住房建筑面积超过城镇人均住房建筑面积 4 平方米的年数，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（Ⅲ）将城镇和农村的人均住房建筑面积经四舍五入取整后作为样本数据．记 2012—2016 年中城镇人均住房面积的方差为 $s_1{}^2$，农村人均住房面积的方差为 s_2^2，判断 $s_1{}^2$ 与 s_2^2 的大小．（只需写出结论）．

17．（本小题满分 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle BCD=135^\circ$，侧面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$，$PA\perp AB$，$AB=AC=PA=2$， E,F 分别为 BC,AD 的中点，点 M 在线段 PD 上.



（Ⅰ）求证：直线 $EF\perp$ 平面 PAC；

（Ⅱ）若 M 为 PD 的中点，求平面 MEF 与平面 PBC 所成锐二面角的余弦值；

（Ⅲ）设 $\dfrac{PM}{PD}=\lambda$，当 λ 为何值时，直线 ME 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{15}$，求 λ 的值.

18.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\ln(x+a)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $x-2y=0$ 平行.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，求函数 $g(x)$ 的单调区间.

19.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 G: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{2}=1$，左、右焦点分别为 $(-c,0)$、$(c,0)$，若点 $M(c,1)$ 在椭圆上.

（Ⅰ）求椭圆的标准方程；

（Ⅱ）若直线 $l:\sqrt{2}x-2y+m=0(m\neq 0)$ 与椭圆 G 交于两个不同的点 A，B，直线 MA，MB

与 x 轴分别交于 P，Q 两点，求证：$|PM|=|QM|$.

20.（本小题满分 13 分）

已知集合 $S_n=\{X\mid X=(x_1,x_2,\cdots,x_n),x_i\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,n\}\ (n\geq 2)$.

对于 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n),B=(b_1,b_2,\cdots b_n)\in S_n$，定义 A 与 B 之间的距离为 $d(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$.

（Ⅰ）$\forall A,B\in S_2$，写出所有 $d(A,B)=2$ 的 A,B；

（Ⅱ）任取固定的元素 $I\in S_n$，计算集合 $M_k=\{A\in S_n\mid d(A,I)\leq k\}(1\leq k\leq n)$ 中元素个数；

（Ⅲ）设 $P\subseteq S_n$，P 中有 $m(m\geq 2)$ 个元素，记 P 中所有不同元素间的距离的最小值为 $\overline{d}$.

证明：$m\leq 2^{n-\overline{d}+1}$.

数学试题答案

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	A	B	C	B	D	D

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分）

9. $\frac{8}{5}$	10. $\frac{1}{2}$	11. 0
12. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+1$	13. 8	14. 132

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分）

15.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $\cos\angle ADB=-\frac{\sqrt{2}}{10}$， 所以 $\cos\angle ADC=\frac{\sqrt{2}}{10}$， ………………………1 分

$\sin\angle ADC=\frac{7\sqrt{2}}{10}$ ………………….2 分

又因为 $\cos\angle C=\frac{3}{5}$，$\sin\angle C=\frac{4}{5}$， 所以， ………………….3 分

$\sin\angle DAC=\sin(\angle ADC+\angle ACD)=\sin\angle ADC\cdot\cos\angle ACD+\cos\angle ADC\cdot\sin\angle ACD$ ……………5 分

$=\frac{7\sqrt{2}}{10}\cdot\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{2}}{10}\cdot\frac{4}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………7 分

（Ⅱ）在 ΔACD 中，由 $\frac{AD}{\sin\angle C}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$， …………9 分

得 $AD=\frac{AC\cdot\sin\angle C}{\sin\angle ADC}=\frac{7\cdot\frac{4}{5}}{\frac{7\sqrt{2}}{10}}=4\sqrt{2}$. …………11 分

$\sin\angle ADB=\frac{7\sqrt{2}}{10}$ …………12 分

所以 $S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot BD\cdot\sin\angle ADB=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot10\cdot\frac{7\sqrt{2}}{10}=28$. …………13 分

16．（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）随机抽取连续两年数据：共 9 次。……………………1 分

两年中城镇人均住房建筑面积增长不少于 2 平方米：共 5 次。……………………2 分

设“两年中城镇人均住房建筑面积增长不少于 2 平方米”为事件 A，

因此 $P(A)=\dfrac{5}{9}$　……………………3 分

（Ⅱ）　X 所有可能的取值为：0，1，2，3　……………………4 分

$$P(X=0)=\frac{C_6^0C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$$

$$P(X=1)=\frac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$$

$$P(X=2)=\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$$

$$P(X=3)=\frac{C_6^3C_4^0}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$$ ……………………8 分

随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{30}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{6}$

……………………10 分

$$E(X)=\frac{1}{30}\times 0+\frac{3}{10}\times 1+\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{6}\times 3=\frac{9}{5}$$ ……………………11 分

（Ⅲ）$s_1^{\ 2}<s_2^2$　……………………13 分.

17．（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）证明：在平行四边形 $ABCD$ 中，因为 $AB=AC$，$\angle BCD=135^\circ$，所以 $AB\perp AC$.

由 E,F 分别为 BC,AD 的中点，得 $EF//AB$，

所以 $EF\perp AC$.　………………1 分

因为侧面 $PAB\perp$底面 $ABCD$，且 $PA\perp AB$，面 $PAB\cap$面 $ABCD=AB$

且 $PA\subset$面 PAB　　所以 $PA\perp$底面 $ABCD$.　………………3 分

又因为 $EF\subset$底面 $ABCD$，所以 $PA\perp EF$.　………………4 分

又因为 $PA\cap AC=A$， $PA\subset$ 平面 PAC， $AC\subset$ 平面 PAC，

所以 $EF\perp$ 平面 PAC. ··················5 分

（Ⅱ）解：因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$， $AB\perp AC$，所以 $AP,\ AB,\ AC$ 两两垂直，故以 $AB,\ AC,\ AP$

分别为 x 轴、 y 轴和 z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $A(0,0,0),\ B(2,0,0),\ C(0,2,0),\ P(0,0,2),\ D(-2,2,0),\ E(1,1,0)$， ··················6 分

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0$， $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，得 $\begin{cases}-2x+2y=0,\\ 2x-2z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$. ··················7 分

M 为 PD 的中点，由（1）知， $AC\perp$ 平面 MEF 且 $\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$， ·········8 分

所以 $|\cos<\overrightarrow{AC},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$， ··················9 分

平面 MEF 与平面 PBC 所成锐二面角的余弦值 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$； ··················10 分

（Ⅲ）

设 $\dfrac{PM}{PD}=\lambda\ (\lambda\in[0,1])$，则 $\overrightarrow{PM}=(-2\lambda,2\lambda,-2\lambda)$，

所以 $M(-2\lambda,2\lambda,2-2\lambda)$， ··················11 分

$\overrightarrow{ME}=(1+2\lambda,1-2\lambda,2\lambda-2)$， ··················12 分

由（1）知 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$.   直线 ME 与平面 PBC 所成的角正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{15}$

所以 $|\cos<\overrightarrow{ME},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$，即 $\dfrac{|2\lambda|}{|\sqrt{3}|\cdot|\sqrt{12\lambda^2-8\lambda+6}|}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$， ··················13 分

解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$. 或 $\lambda=-\dfrac{3}{2}$ （舍） ··················14 分

18.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ） Q $f(x)=\ln(x+a)$ $\therefore f'(x)=\dfrac{1}{x+a}$ ·········1 分

$\therefore f'(1)=\dfrac{1}{1+a}$ ·········2 分

Q $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $x-2y=0$ 平行

$\therefore \dfrac{1}{1+a}=\dfrac{1}{2}$ 解得 $a=1$ ·········4 分

（II）由（I）可知 $g(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ ·········5 分

函数 $g(x)$ 的定义域是 $(-1,0)\cup(0,+\infty)$， ·········6 分

所以 $g'(x)=\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2}$， ···········7 分

令 $h(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)$， ···········8 分

又 $h'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x+1}=-\dfrac{x}{(x+1)^2}$， ···········9 分

$\therefore \forall x\in(-1,0)$ 有 $h'(x)>0$ 恒成立

故 $h(x)$ 在 $(-1,0)$ 上为增函数，

由 $h(x)<h(0)=-\ln 1=0$，

所以函数 $g(x)$ 是 $(-1,0)$ 上单调递减. ··············· 11 分

$\therefore \forall x\in(0,+\infty)$ 有 $h'(x)<0$ 恒成立

故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，

由 $h(x)<h(0)=-\ln 1=0$，

所以函数 $g(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上单调递减. ··············· 13 分

综上， $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 单调递减

19.（本小题满分 14 分）

解：（I）$\because M(c,1)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上

$\therefore \dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{1}{2}$　　由 $\therefore b^2=2$

解得　$\therefore a^2=4$　　………………3 分

所以，椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$　　………………4 分

(Ⅱ) 由 $\begin{cases}\sqrt{2}x-2y+m=0,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 得 $4x^2+2\sqrt{2}mx+m^2-8=0$. ………………5 分

因为直线 l 与椭圆 C 有两个交点，并注意到直线 l 不过点 M，

所以 $\begin{cases}8m^2-4\times4(m^2-8)>0,\\ m\neq0.\end{cases}$ 解得 $-4<m<0$ 或 $0<m<4$. ……………6 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}m$，$x_1x_2=\dfrac{m^2-8}{4}$，……………8 分

$y_1=\dfrac{\sqrt{2}x_1+m}{2}$，$y_2=\dfrac{\sqrt{2}x_2+m}{2}$. ……………10 分

显然直线 MA 与 MB 的斜率存在，设直线 MA 与 MB 的斜率分别为 k_1，k_2，

由（Ⅰ）可知 $M(\sqrt{2},1)$

则 $k_1+k_2=\dfrac{y_1-1}{x_1-\sqrt{2}}+\dfrac{y_2-1}{x_2-\sqrt{2}}$　　……………11 分

$$=\frac{\left(\dfrac{\sqrt{2}x_1+m}{2}-1\right)(x_2-\sqrt{2})+\left(\dfrac{\sqrt{2}x_2+m}{2}-1\right)(x_1-\sqrt{2})}{(x_1-\sqrt{2})(x_2-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}x_1+m-2)(x_2-\sqrt{2})+(\sqrt{2}x_2+m-2)(x_1-\sqrt{2})}{2(x_1-\sqrt{2})(x_2-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}x_1x_2+(m-4)(x_1+x_2)-2\sqrt{2}m+4\sqrt{2}}{2[x_1x_2-\sqrt{2}(x_1+x_2)+2]}$$

$$=\frac{\dfrac{2\sqrt{2}(m^2-8)}{4}-\dfrac{(m-4)2\sqrt{2}m}{4}-\dfrac{8\sqrt{2}m}{4}+\dfrac{16\sqrt{2}}{4}}{2[x_1x_2-\sqrt{2}(x_1+x_2)+2]}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}(m^2-8)-(m-4)2\sqrt{2}m-8\sqrt{2}m+16\sqrt{2}}{8[x_1x_2-\sqrt{2}(x_1+x_2)+2]}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}m^2-16\sqrt{2}-2\sqrt{2}m^2+8\sqrt{2}m-8\sqrt{2}m+16\sqrt{2}}{8[x_1x_2-\sqrt{2}(x_1+x_2)+2]}=0.$$

因为 $k_1+k_2=0$，所以 $\angle MPQ=\angle MQP$.　……………13 分

所以 $|PM|=|QM|$.　　………………14 分

20.（本小题满分 13 分）

解 （Ⅰ）$A(1,1)$ $B(0,0)$　$A(1,0)$ $B(0,1)$　$A(0,1)$ $B(1,0)$　$A(0,0)$ $B(1,1)$ ……………………4 分

（Ⅱ）当 $k=1$ 时，$M_1=n+1=C_n^0+C_n^1$ ……………………5 分

当 $k=2$ 时，$M_2=C_n^0+C_n^1+C_n^2$ ……………………6 分

写出 $|M_k|=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^k$ ，……………………7 分

特别的，$|M_n|=2^n$.

所以 M_K 元素个数为 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^k$ ……………………8 分

（Ⅲ）记 $P'=\{(c_1,c_2,\cdots,c_{n-\bar{d}+1})\,|\,(c_1,c_2,\cdots,c_{n-\bar{d}+1},\cdots,c_n)\in P\}$,

我们证明 $|P'|=|P|$. 一方面显然有 $|P'|\le|P|$. 另一方面，$\forall A,B\in S_n$ 且 $A\ne B$ ，

假设他们满足 $a_1=b_1,a_2=b_2,\cdots,a_{n-\bar{d}+1}=b_{n-\bar{d}+1}$. 则由定义有 $d(A,B)\le\bar{d}-1$ ，

与 P 中不同元素间距离至少为 $\bar{d}$ 相矛盾.

从而 $(a_1,a_2,\cdots,a_{n-\bar{d}+1})\ne(b_1,b_2,\cdots,b_{n-\bar{d}+1})$.

这表明 P' 中任意两元素不相等. 从而 $|P'|=|P|=m$.

又 P' 中元素有 $n-\bar{d}+1$ 个分量，至多有 $2^{n-\bar{d}+1}$ 个元素.

从而 $m\le 2^{n-\bar{d}+1}$. 证毕. ……………………13 分