长沙市 2024 年新高考适应性考试

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	D	C	D	A	A	B	ACD	BC	ACD	BCD

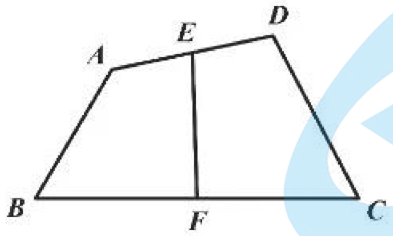
5. **解析** 若从甲盒中抽到黄球放入乙盒，则从乙盒中抽到红球的概率为 $p_1=\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{4}{20}$；若从甲盒中抽到红球放入乙盒，则从乙盒中抽到红球的概率为 $p_2=\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{20}$．因此，从乙盒中抽到的红球的概率为 $p_1+p_2=\frac{4}{20}+\frac{9}{20}=\frac{13}{20}$．

6. **解析** 由已知得 $\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\frac{4(1+\tan\alpha)}{1-\tan\alpha}=0$，即 $2\tan^2\alpha+5\tan\alpha+2=0$（$\tan\alpha\neq\pm1$），则 $1+\tan^2\alpha=-\frac{5}{2}\tan\alpha$．从而 $\sin2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{4}{5}$．

7. **解析** 易知 $e^{x_A}=\ln x_B=a$，且 $a\in(0,+\infty)$．由 $f'(x)=e^x$，$g'(x)=\frac{1}{x}$，可得 $k_1=e^{x_A}=a$，$k_2=\frac{1}{x_B}=\frac{1}{e^a}$，则 $k_1k_2=\frac{a}{e^a}$．

设 $h(x)=\frac{x}{e^x}$，则 $h'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，可得 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减，有 $h(x)_{\max}=h(1)=\frac{1}{e}$，即 k_1k_2 的最大值为 $\frac{1}{e}$．

8. **解析** 如图，可知 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC})=\frac{1}{2}[(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC})]=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$．



由 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC})$，即 $2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=4$，可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=4$．从而，$|\overrightarrow{EF}|^2=\overrightarrow{EF}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}^2)=\frac{21}{4}$，即 $|\overrightarrow{EF}|=\frac{\sqrt{21}}{2}$．

10. **解析** 由 $\begin{cases}a-c=d_1\\a+c=d_2\end{cases}$，解得 $a=\frac{d_1+d_2}{2}$，$c=\frac{d_2-d_1}{2}$，则轨道的焦距为 d_2-d_1，离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{d_2-d_1}{d_2+d_1}$，轨道的短轴长为 $2\sqrt{a^2-c^2}=2\sqrt{d_1d_2}$．又 $\frac{d_2-d_1}{d_2+d_1}=\frac{1-\frac{d_1}{d_2}}{1+\frac{d_1}{d_2}}=-1+\frac{2}{1+\frac{d_1}{d_2}}$，则 $\frac{d_1}{d_2}$ 越大时，离心率越小，则轨道越圆．

11. **解析** 当点 P 与 D_1 点重合时，由 $BB_1 // DD_1$，可知 $BB_1 //$ 面 A_1DP，即 A 正确.

若 $B_1P \perp$ 面 A_1DP，则 $B_1P \perp A_1D$，可得 $B_1P \perp B_1C$，即 $\triangle PB_1C$ 为直角三角形，且 PC 为斜边. 易知 $B_1P = PC$，与之矛盾，即 B 错误.

当 P 不是 BD_1 的中点时，由 $A_1D // B_1C$，可知 $A_1D //$ 面 B_1CP，又直线 m 为面 A_1DP 与面 B_1CP 的交线，则 $A_1D // m$. 从而，可得 $m //$ 面 A_1B_1CD，即 C 正确.

同上，有 $A_1D // m$，而 $A_1D \perp$ 面 ABD_1，则 $m \perp$ 面 ABD_1，即 D 正确.

12. **解析** 若 $T_8 = T_{12}$，则 $\dfrac{T_{12}}{T_8} = a_9a_{10}a_{11}a_{12} = (a_{10}a_{11})^2 = 1$，可得 $a_{10}a_{11} = \pm 1$，即选项 A 错误；

而 $T_{20} = a_1a_2\cdots a_{19}a_{20} = (a_{10}a_{11})^{10} = 1$，即选项 B 正确.

若 $a_1 = 1024$，且 T_{10} 是数列 $\{T_n\}$ 的唯一最大项. 当 $q<0$ 时，$T_{10}<0$，不合题意；当 $q>0$ 时，由 $\begin{cases} T_{10} > T_9 \\ T_{10} > T_{11} \end{cases}$，可得 $\begin{cases} a_{10} > 1 \\ a_{11} < 1 \end{cases}$，即 $\begin{cases} 1024q^9 > 1 \\ 1024q^{10} < 1 \end{cases}$，解得 $(\dfrac{1}{2})^{\frac{10}{9}} < q < \dfrac{1}{2}$，即选项 C 正确.

若 $T_{10} > T_{11} > T_9$，当 $q<0$ 时，$T_9 > 0$，$T_{10} < 0$，满足 $T_{10} < T_9$，不合题意；当 $q>0$ 时，由 $\begin{cases} T_{10} > T_{11} \\ T_{10} > T_9 \\ T_{11} > T_9 \end{cases}$，可得 $a_{11} < 1$，$a_{10} > 1$，$a_{10}a_{11} > 1$，则 $T_{20} = a_1a_2\cdots a_{20} = (a_{10}a_{11})^{10} > 1$，$T_{21} = a_1a_2\cdots a_{21} = (a_{11})^{21} < 1$，…，（$n \ge 10$ 时，数列 $\{T_n\}$ 单调递减），即选项 D 正确.

13. 【答案】2.1

14. 【答案】$(2,+\infty)$

15. 【答案】$[2\sqrt{2}-1, 2\sqrt{2}+1]$

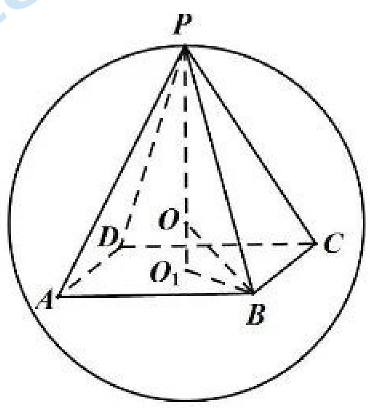
解析 设 $P(x,y)$，将坐标代入式子 $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2=13$，可得 $x^2+y^2-4x-4y+7=0$，即 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$，则点 P 的轨迹是以 $(2,2)$ 为圆心，1 为半径的圆.

依题意，两圆有公共点，则 $|r-1| \le 2\sqrt{2} \le r+1$，解得 $2\sqrt{2}-1 \le r \le 2\sqrt{2}+1$.

16. 【答案】$\dfrac{27}{16}\pi$

解析 设球 O 的半径为 R，正四棱锥的高、底面外接圆的半径分别为 h，r. 如图，球心在正四棱锥内时，由 $OO_1^2 + O_1B^2 = OB^2$，可得 $(h-R)^2 + r^2 = R^2$，即 $h^2 - 2Rh + r^2 = 0$（*）.

球心在正四棱锥外时，亦能得到（*）式.



又正四棱锥的体积为$\frac{1}{3}(2r^2)h=1$，则$r^2=\frac{3}{2h}$，代入(*)式可得$R=\frac{h}{2}+\frac{3}{4h^2}$. 通过对关于$h$的函数$R(h)$求导，即$R'(h)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2h^3}$，可得函数$R(h)$在$(0,\sqrt[3]{3})$单调递减，在$(\sqrt[3]{3},+\infty)$单调递增，则$R(h)_{\min}=R(\sqrt[3]{3})=\frac{3}{4}\sqrt[3]{3}$. 从而，球$O$的体积的最小值$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{27}{16}\pi$.

17. （本题满分 10 分）

解析 （1）由$\frac{a_{n+1}+(n+1)}{a_n+n}=\frac{3a_n+2n-1+(n+1)}{a_n+n}=\frac{3a_n+3n}{a_n+n}=3$，可知数列$\{a_n+n\}$是以$a_1+1=2$为首项，3 为公比的等比数列. ……………………5 分

（2）由（1）可知，$a_n+n=2\cdot 3^{n-1}$，则$a_n=2\cdot 3^{n-1}-n$.

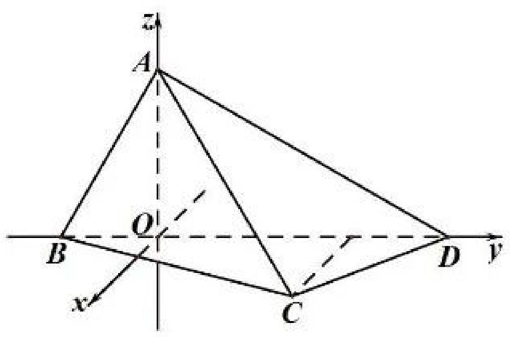
从而$S_n=(2\times 3^0-1)+(2\times 3^1-2)+\cdots+(2\times 3^{n-1}-n)=2(3^0+3^1+\cdots+3^{n-1})-(1+2+\cdots+n)$

$=\frac{2(1-3^n)}{1-3}-\frac{(1+n)n}{2}=3^n-\frac{(1+n)n}{2}-1$. ……………………10 分

18. （本题满分 12 分）

解析 （1）由$AB\perp CD$，$BC\perp CD$，且$AB\cap BC=B$，可得$CD\perp$平面ABC，则$AC\perp CD$. 在$Rt\triangle ACD$中，根据勾股定理，$AC=\sqrt{AD^2-CD^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2}=2\sqrt{2}$. ……………………5 分

（2）如图，过A点作$AO\perp BD$于点O，易知$AO=\sqrt{3}$. 由平面$ABD\perp$平面BCD，可知$AO\perp$平面BCD.



在平面BCD中，过O点作BD的垂线为x轴，以O为坐标原点，BD,AO所在直线分别为y,z轴，建立空间直角坐标系，则$A(0,0,\sqrt{3})$，$B(0,-1,0)$，$C(\sqrt{3},2,0)$，$D(0,3,0)$，有$\overrightarrow{AB}=(0,-1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(\sqrt{3},3,0)$，$\overrightarrow{CD}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{AD}=(0,3,-\sqrt{3})$.

设平面ABC的法向量$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=-y_1-\sqrt{3}z_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=\sqrt{3}x_1+3y_1=0\end{cases}$，令$z_1=1$，解得其中一个法向量$\vec{m}=(3,-\sqrt{3},1)$；

设平面ACD的法向量$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=-\sqrt{3}x_2+y_2=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=3y_2-\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$，令$x_2=1$，解得其中一个法向量$\vec{n}=(1,\sqrt{3},3)$.

从而$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{3}{\sqrt{13}\times\sqrt{13}}=\frac{3}{13}$，即平面$ABC$和平面$ACD$夹角的余弦值为$\frac{3}{13}$. ……12 分

19．（本题满分 12 分）

解析（1）零假设为

H_0：设备更新与产品的优质率独立，即设备更新前与更新后的产品优质率没有差异．

由列联表可计算 $\chi^2=\dfrac{100\times(24\times12-48\times16)^2}{40\times60\times72\times28}\approx4.762>3.841$，依据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，我们可以推断 H_0 不成立，因此可以认为设备更新后能够提高产品优质率．....................6 分

（2）根据题意，设备更新后的优质率为 0.8．可以认为从生产线中抽出的 5 件产品是否优质是相互独立的．

①设 X 表示这 5 件产品中优质品的件数，则 $X\sim B(5,0.8)$，可得

$p=P(X\le2)=C_5^0\times0.2^5+C_5^1\times0.8\times0.2^4+C_5^2\times0.8^2\times0.2^3=0.05792$．...10 分

②实际上设备更新后提高了优质率．当这 5 件产品中的优质品件数不超过 2 件时，认为更新失败，此时作出了错误的判断，由于作出错误判断的概率很小，则核查方案是合理的．..............................12 分

注意：若考生能给出合适理由，说明核查方案是不合理的，则可以酌情给 1 分．

20．（本题满分 12 分）

证明（1）由 $\sin B+\sin C=2\sin A\cos B$，可得 $b+c=2a\cos B$，则 $b+c=2a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，整理得 $a^2-b^2=bc$．...5分

（2）根据 $\cos\angle ABC+\cos\angle CBD=0$，结合余弦定理可得 $\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\dfrac{a^2+|BD|^2-|CD|^2}{2a\cdot|BD|}=0$，即 $4a^2-b^2+12-3|CD|^2=0$，则 $|CD|^2=\dfrac{4}{3}a^2-\dfrac{1}{3}b^2+4=\dfrac{4}{3}(b^2+3b)-\dfrac{1}{3}b^2+4=b^2+4b+4=(b+2)^2$，

从而 $|CD|=b+2$，故 $|CD|-|CA|=2$ 为定值．...12 分

21．（本题满分 12 分）

解析（1）易知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$．由 $f(x)=0$，可得 $a\ln x-x+\dfrac{1}{x}=0$．

设 $g(x)=a\ln x-x+\dfrac{1}{x}$，则 $g(1)=0$，$g'(x)=\dfrac{a}{x}-1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{-x^2+ax-1}{x^2}$，且 $g(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的零点个数．

思路 1：令 $\varphi(x)=-x^2+ax-1,x>0$，则 $\Delta=a^2-4$．

当 $-2\le a\le2$ 时，$\Delta\le0$，则 $\varphi(x)\le0$，即 $g'(x)\le0$，可得 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，则 $g(x)$ 有且仅有一个零点．

当 $a<-2$ 时，显然 $\varphi(x)<0$，则 $g'(x)<0$，可得 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，则 $g(x)$ 有且仅有一个零点．

当 $a>2$ 时，由 $\varphi(x)=0$，解得 $x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$，$x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，且 $0<x_1<1<x_2$．当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$\varphi(x)>0$，即 $g'(x)>0$，则 $g(x)$ 单调递增；当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$\varphi(x)<0$，即 $g'(x)<0$，则 $g(x)$ 单调递减．

不难得知 $g(x_2)>g(1)=0$，$g(4a^2)=a\ln4a^2+\dfrac{1}{4a^2}-4a^2<2a\ln2a-4a^2+2a=2a(\ln2a-2a+1)<0$，则 $g(x)$ 在 $(x_2,+\infty)$ 有一个零点，可知 $g(x)$ 不只一个零点，不合题意．

综上，可知 $a\in(-\infty,2]$．...6 分

思路 2：令 $\varphi(x)=-x^2+ax-1, x>0$.

当 $a\le 0$ 时，$\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，有 $\varphi(x)<\varphi(0)=-1$，即 $g'(x)<0$，可得 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，则 $g(x)$ 有且仅有一个零点.

当 $a>0$ 时，$\varphi(x)_{\max}=g(\frac{a}{2})=\frac{1}{4}a^2-1$.

若 $a\le 2$，$\varphi(x)\le 0$，则 $g'(x)\le 0$，可得 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，则 $g(x)$ 有且仅有一个零点.

若 $a>2$，存在 $x_1,x_2\in R$，且 $0<x_1<1<x_2$，使得 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$. 后续过程同思路 1.

综上，可知 $a\in(-\infty,2]$. ……………………………………………………………………6 分

（2）取 $a=2$，当 $x>1$ 时，$f(x)<0$，有 $0<2\ln x<x-\frac{1}{x}$，即 $0<\ln x^2<x-\frac{1}{x}$，则 $(\ln x^2)^2<x^2+\frac{1}{x^2}-2$.

令 $x^2=\frac{k+1}{k}, k=1,2,\cdots,n$，则 $(\ln\frac{k+1}{k})^2<\frac{k+1}{k}+\frac{k}{k+1}-2$，即 $(\ln\frac{k+1}{k})^2<\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$，从而

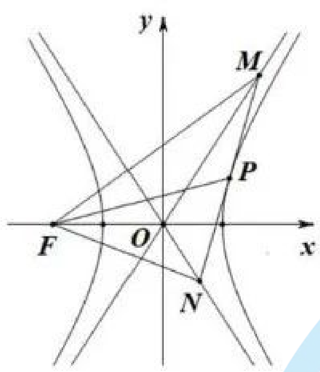
$(\ln 2)^2+(\ln\frac{3}{2})^2+(\ln\frac{4}{3})^2+\cdots+(\ln\frac{n+1}{n})^2<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}<1$. …………12 分

22. （本题满分 12 分）

解析 （1）联立方程 $\begin{cases} y=kx+m \\ x^2-\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，整理得 $(3-k^2)x^2-2kmx-(m^2+3)=0$ （*）.

由 $k\ne\pm\sqrt{3}$，且 P 是双曲线与直线 l 的唯一公共点，可得 $\Delta=(-2km)^2+4(3-k^2)(m^2+3)=0$，则

$k^2-m^2=3$，即为参数 k,m 满足的关系式. ……………………………………………4 分



结合图象，由点 P 在第一象限，可知 $k>\sqrt{3}$，且 $m<0$. （若考生没有给出 k,m 的范围，不扣分）

（2）易知，双曲线的左焦点 $F(-2,0)$，渐近线为 $y=\pm\sqrt{3}x$.

联立方程 $\begin{cases} y=kx+m \\ y=\sqrt{3}x \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=\frac{m}{\sqrt{3}-k} \\ y=\frac{\sqrt{3}m}{\sqrt{3}-k} \end{cases}$，即 $M(\frac{m}{\sqrt{3}-k},\frac{\sqrt{3}m}{\sqrt{3}-k})$；联立方程 $\begin{cases} y=kx+m \\ y=-\sqrt{3}x \end{cases}$，解得

$\begin{cases} x=-\frac{m}{\sqrt{3}+k} \\ y=\frac{\sqrt{3}m}{\sqrt{3}+k} \end{cases}$，即 $N(-\frac{m}{\sqrt{3}+k},\frac{\sqrt{3}m}{\sqrt{3}+k})$.

结合 $k^2-m^2=3$，（*）式可变形为 $m^2x^2+2kmx+k^2=0$，解得 $x=-\frac{k}{m}$，可得 $P(-\frac{k}{m},-\frac{3}{m})$.

要证 $\angle MFP=\angle NFO$，即证 $\tan\angle MFP=\tan\angle NFO$，即证 $\tan(\angle MFO-\angle PFO)=\tan\angle NFO$，即证 $\dfrac{k_{FM}-k_{FP}}{1+k_{FM}k_{FP}}=-k_{FN}$，即证 $k_{FM}+k_{FN}=k_{FP}(1-k_{FM}k_{FN})$ （**）．

思路 1：由 $k_{FM}+k_{FN}=k_{FP}(1-k_{FM}k_{FN})$，得 $\dfrac{1}{k_{FM}}+\dfrac{1}{k_{FN}}=k_{FP}(\dfrac{1}{k_{FM}k_{FN}}-1)$．

根据直线的斜率公式，$k_{FM}=\dfrac{\sqrt{3}m}{2\sqrt{3}+m-2k}$，$k_{FN}=\dfrac{\sqrt{3}m}{2\sqrt{3}-m+2k}$，$k_{FP}=\dfrac{3}{k-2m}$，则

$$\frac{1}{k_{FM}}+\frac{1}{k_{FN}}=\frac{2\sqrt{3}+m-2k}{\sqrt{3}m}+\frac{2\sqrt{3}-m+2k}{\sqrt{3}m}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}m}=\frac{4}{m},$$

$$\frac{1}{k_{FM}k_{FN}}-1=\frac{2\sqrt{3}+m-2k}{\sqrt{3}m}\cdot\frac{2\sqrt{3}-m+2k}{\sqrt{3}m}-1=\frac{(2\sqrt{3}+m-2k)(2\sqrt{3}-m+2k)}{3m^2}-1=\frac{12-(m-2k)^2}{3m^2}-1$$

$$=\frac{12-m^2-4k^2+4mk}{3m^2}-1=\frac{12-4m^2-4k^2+4mk}{3m^2}=\frac{-8m^2+4mk}{3m^2}=\frac{4(k-2m)}{3m},$$

可得 $k_{FP}(\dfrac{1}{k_{FM}k_{FN}}-1)=\dfrac{3}{k-2m}\cdot\dfrac{4(k-2m)}{3m}=\dfrac{4}{m}$，

因此，$\dfrac{1}{k_{FM}}+\dfrac{1}{k_{FN}}=k_{FP}(\dfrac{1}{k_{FM}k_{FN}}-1)$． ……………………………………………………12 分

思路 2：根据直线的斜率公式，$k_{FM}=\dfrac{\sqrt{3}m}{2\sqrt{3}+m-2k}$，$k_{FN}=\dfrac{\sqrt{3}m}{2\sqrt{3}-m+2k}$，$k_{FP}=\dfrac{3}{k-2m}$，则

$$k_{FM}+k_{FN}=\frac{\sqrt{3}m}{2\sqrt{3}+m-2k}+\frac{\sqrt{3}m}{2\sqrt{3}-m+2k}=\frac{12m}{(2\sqrt{3}+m-2k)(2\sqrt{3}-m+2k)},$$

$$k_{FM}k_{FN}=\frac{\sqrt{3}m}{2\sqrt{3}+m-2k}\cdot\frac{\sqrt{3}m}{2\sqrt{3}-m+2k}=\frac{3m^2}{(2\sqrt{3}+m-2k)(2\sqrt{3}-m+2k)}.$$

要证（**）式，即证 $\dfrac{12m}{(2\sqrt{3}+m-2k)(2\sqrt{3}-m+2k)}=\dfrac{3}{k-2m}\cdot(1-\dfrac{3m^2}{(2\sqrt{3}+m-2k)(2\sqrt{3}-m+2k)})$，

即证 $(2\sqrt{3}+m-2k)(2\sqrt{3}-m+2k)-3m^2-4m(k-2m)=0$，化简得 $k^2-m^2-3=0$，由（*）式可知该式显然成立．……………………………………………………………………12 分