首师大附中 2022—2023 学年度第一学期月考试卷

高三数学　　　2022.12

本试卷满分共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知 $\cos x=\frac{1}{3}, x\in(0,\pi)$，则 $\tan x=$（　）

（A）$\pm 2\sqrt{2}$　　（B）$2\sqrt{2}$　　（C）$-2\sqrt{2}$　　（D）$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

（2）在复平面内，复数 $z=1+\frac{1}{i}$，则 $z\cdot\bar{z}=$

（A）2　　（B）$-2i$　　（C）$\sqrt{2}$　　（D）$2i$

（3）已知集合 $A=\{x|-1<x<5\}$，$B=\{x|x\leqslant 4\}$，则 $A\cup B=$

（A）$(-1,4]$　　（B）$(-1,5)$　　（C）$(-\infty,4]$　　（D）$(-\infty,5)$

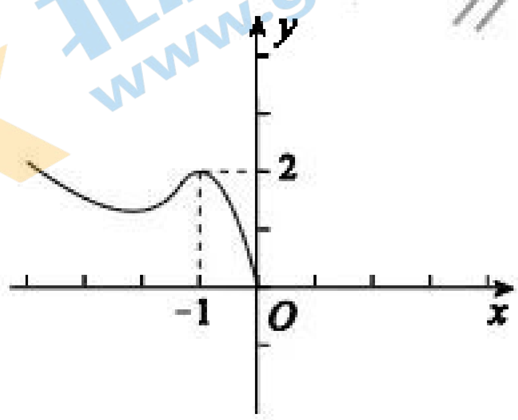
（4）已知 $f(x)$ 为奇函数，其局部图象如图所示，那么

（A）$f(2)=2$

（B）$f(2)=-2$

（C）$f(2)>-2$

（D）$f(2)<-2$



（5）函数 $y=2^{1-x}$ 的图像可看作是把函数 $y=2^x$ 经过以下哪种变换得到（　）

（A）把函数 $y=2^x$ 向右平移一个单位

（B）先把函数 $y=2^x$ 的图像关于 x 轴对称，然后把所得函数图像向左平移一个单位

（C）先把函数 $y=2^x$ 的图像关于 y 轴对称，然后把所得函数图像向左平移一个单位

（D）先把函数 $y=2^x$ 的图像关于 y 轴对称，然后把所得函数图像上各点的纵坐标变为原来的 2 倍，横坐标不变

（6）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的离心率 $e=\sqrt{5}$，则其渐近线的方程为

（A）$y=\pm 2x$　　（B）$y=\pm\sqrt{3}x$　　（C）$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$　　（D）$y=\pm\frac{1}{2}x$

（7）已知函数 $f(x)=\sin 2x, x\in[a,b]$，则“$b-a\geqslant\frac{\pi}{2}$”是“$f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

(8) 设 O 为坐标原点，点 $A(1,0)$，动点 P 在抛物线 $y^2=2x$ 上，且位于第一象限，M 是线段 PA 的中点，则直线 OM 的斜率的范围为微信搜《高三答案公众号》

(A) $(0,\ 1]$　　(B) $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$　　(C) $(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$　　(D) $[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$

(9) 被誉为信息论之父的香农提出了一个著名的公式：$C=W\log_2(1+\frac{S}{N})$，其中 C 为最大数据传输速率，单位为 bit / s；W 为信道带宽，单位为 Hz；$\frac{S}{N}$ 为信噪比．香农公式在 5G 技术中发挥着举足轻重的作用．当 $\frac{S}{N}=99$，$W=2000\text{Hz}$ 时，最大数据传输速率记为 C_1；当 $\frac{S}{N}=9999$，$W=3000\text{Hz}$ 时，最大数据传输速率记为 C_2，则 $\frac{C_2}{C_1}$ 为

（A）1　　（B）$\frac{5}{2}$　　（C）$\frac{15}{4}$　　（D）3

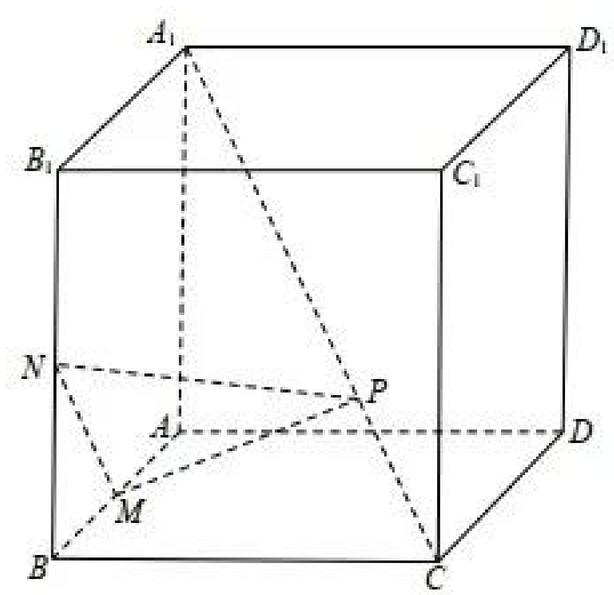
（10）如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别是棱 AB，BB_1 的中点，点 P 在对角线 CA_1 上运动．当△PMN 的面积取得最小值时，点 P 的位置是

（A）线段 CA_1 的三等分点，且靠近点 A_1

（B）线段 CA_1 的中点

（C）线段 CA_1 的三等分点，且靠近点 C

（D）线段 CA_1 的四等分点，且靠近点 C



（第 10 题图）

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）若 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{a}$，则 $<\vec{a},\vec{b}>=$______

（12）数列 $\{a_n\}$ 是公差为 -2 的等差数列，记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 a_1,a_3,a_4 成等比数列，则 $a_1=$________；$S_n=$________.

（13）已知半径为 2 的圆经过点 $(1,0)$，其圆心到直线 $3x-4y+12=0$ 的距离的范围是_______

（14）已知抛物线 $C:y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点为 F，过点 $M(-1,4)$ 作 y 轴的垂线交抛物线 C 于点 A，且满足 $|AF|=|AM|$，则抛物线 C 的方程为________；设直线 AF 交抛物线 C 于另一点 B，则点 B 的纵坐标为_______.

（15）数学中有许多寓意美好的曲线，曲线 $C:(x^2+y^2)^3=4x^2y^2$ 被称为"四叶玫瑰线"（如图所示）.

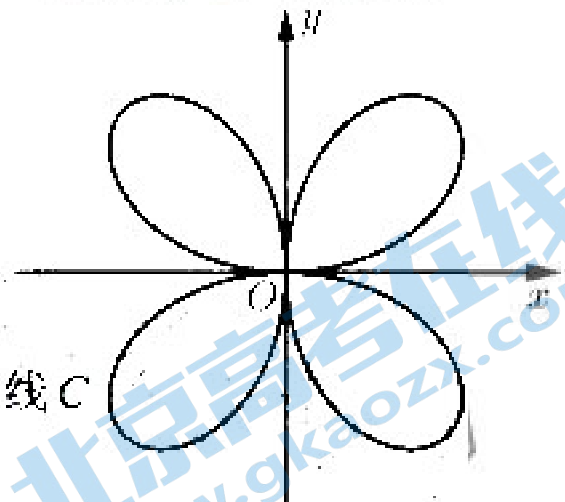
给出下列三个结论：

① 曲线 C 关于直线 $y=x$ 对称；

② 曲线 C 上任意一点到原点的距离都不超过1；

③ 存在一个以原点为中心、边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，使得曲线 C 在此正方形区域内（含边界）.

其中，正确结论的序号是________.

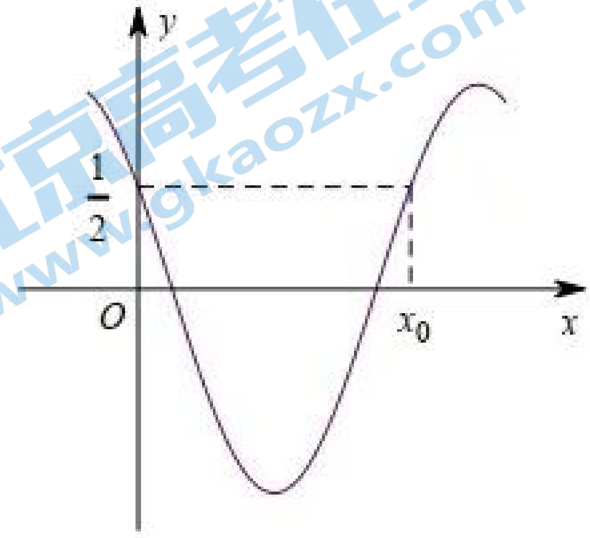


（第 15 题图）

注：本题给出的结论中，有多个符合题目要求。全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16)（本小题满分 13 分）



函数 $f(x)=\cos(\pi x+\varphi)(0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示.

（I）求 φ 及图中 x_0 的值，并求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

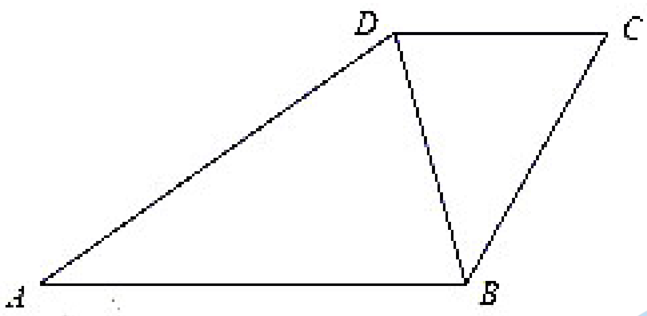
（II）若 $f(x)$ 在区间 $[0,m]$ 上只有一个最小值点，求实数 m 的取值范围

（17）本小题满分 13 分）

如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB // CD$，$AB=2\sqrt{6}$，$CD=\sqrt{6}$，$\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\angle ADB=\frac{1}{3}$.

（Ⅰ）求 $\cos\angle BDC$；

（Ⅱ）求 BC 的长.



（18）（本小题满分 15 分）

如图 1，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=4$，E 为 AD 的中点，O 为 BE 中点．将 ΔABE 沿 BE 折起到 $A'BE$，使得平面 $A'BE\perp$ 平面 $BCDE$（如图 2）.

（I）求证：$A'O\perp CD$；

（II）求直线 $A'C$ 与平面 $A'DE$ 所成角的正弦值；

（III）在线段 $A'C$ 上是否存在点 P，使得 $OP//$ 平面 $A'DE$？若存在，求出 $\frac{A'P}{A'C}$ 的值；若不存在，请说明理由.

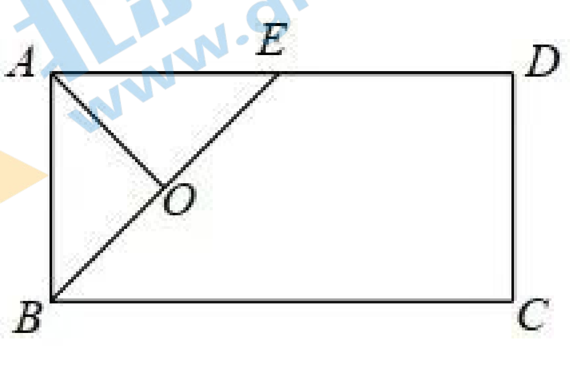


图 1

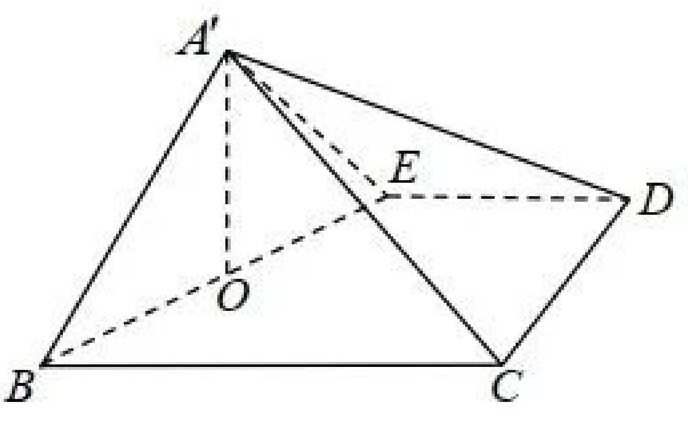


图 2

(19)(本小题满分 15 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的长轴长为 4，短轴长与焦距相等.

(I) 求椭圆 C 的标准方程和离心率;

(II) 已知直线 $y=kx+2$ 与椭圆 C 有两个不同的交点 A,B，$P(-\frac{2}{3},0)$，是否存在实数 k，使得 $\triangle PAB$ 是以 AB 为底边的等腰三角形? 若存在，求出直线的方程; 若不存在，说明理由.

(20)(本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x)=x^3-x$.

(I) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(II) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(III) 设函数 $t(x)=\frac{f(x)}{x\sin x}-2$，$x\in(0,\pi)$，试判断 $t(x)$ 的零点个数，并证明你的结论.

21(本题满分 14 分)

设 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2$，集合 $S_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\|\,x_1|=1,|x_{i+1}|=2|x_i|(i=1,2,\cdots,n-1)\}$.

(I) 写出集合 S_2 中的所有元素;

(II) 设 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in S_n$，证明: "$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i$" 的充要条件是 "$a_i=b_i(i=1,2,3,\cdots,n)$";

(III) 设集合 $T_n=\{\sum_{i=1}^{n}x_i\,|\,(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in S_n\}$，求 T_n 中所有正数之和.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。