巢湖一中 合肥八中 淮南二中 六安一中 南陵中学
滁州中学 池州一中 阜阳一中 灵璧中学 宿城一中

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两

第Ⅰ卷 选择题（共58分）

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(m,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,-4)$，若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则实数 m 的值为（　　）

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. -2　　C. -1　　D. 8

2. 复数 $z=\mathrm{i}+\dfrac{3}{1-\mathrm{i}^3}$ 在复平面内对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知直线 l 与曲线 $f(x)=\mathrm{e}^x+\sin x$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线垂直，则直线 l 的斜率为（　　）

A. -1　　B. 1　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. 2

4. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\dfrac{n+1}{2n}a_n$，则 $\dfrac{a_8}{a_4}=$（　　）

A. $\dfrac{1}{16}$　　B. $\dfrac{1}{8}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

5. 已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的准线为 $y=-2$，点 P,Q 在抛物线 C 上，且线段 PQ 的中点为 $(-2,4)$，则直线 PQ 的方程为（　　）

A. $x+2y-6=0$　　B. $x+3y-10=0$　　C. $2x+y=0$　　D. $2x+3y-8=0$

6. 近期，哈尔滨这座“冰城”火了，2024年元旦假期三天接待游客300多万人次，神秘的鄂伦春族再次走进世人的眼帘，这些英雄的后代讲述着英雄的故事，让哈尔滨大放异彩.现安排6名鄂伦春小伙去三个不同的景点宣传鄂伦春族的民俗文化，每个景点至少安排1人，则不同的安排方法种数是（　　）

A. 240　　B. 420　　C. 540　　D. 900

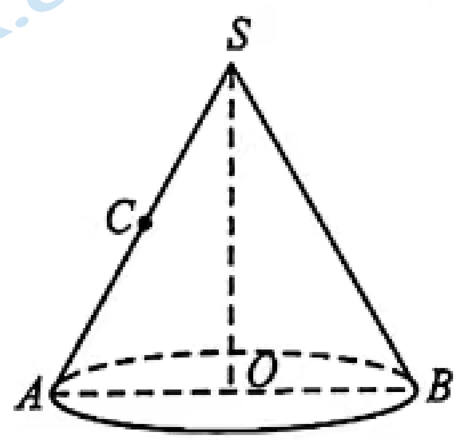
7. 如图，AB 为圆锥 SO 底面圆的一条直径，点 C 为线段 SA 的中点，现沿 SA 将圆锥 SO 的侧面展开，所得的平面图形中 $\triangle ABC$ 为直角三角形，若 $SA=4$，则圆锥 SO 的表面积为（　　）

A. $\dfrac{32\pi}{9}$

B. $\dfrac{64\pi}{9}$

C. 8π

D. 12π



盟2024届高三开年考

学试题

学 舒城中学 太湖中学 天长中学 屯溪一中 宣城中学

中 合肥六中 太和中学 合肥七中 科大附中 野寨中学

部分。满分150分，考试时间120分钟。请在答题卡上作答。

8. “曼哈顿距离”是人脸识别中的一种重要测距方式，其定义如下：设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 A,B 两点间的曼哈顿距离 $d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$．已知 $M(4,6)$，点 N 在圆 $C:x^2+y^2+6x+4y=0$ 上运动，若点 P 满足 $d(M,P)=2$，则 $|PN|$ 的最大值为（　　）

A. $7\sqrt{3}+\sqrt{13}$　　B. $\dfrac{17\sqrt{2}}{2}+\sqrt{13}$　　C. $\sqrt{145}+\sqrt{13}$　　D. $\sqrt{149}+\sqrt{13}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，则（　　）

A. 直线 $x=\dfrac{9\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴

B. 点 $\left(-\dfrac{3\pi}{4},0\right)$ 为 $f(x)$ 图象的一个对称中心

C. 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{3\pi}{4}$ 个单位长度后关于 y 轴对称

D. $f(x)$ 在 $[\pi,3\pi]$ 上单调递增

10. 已知棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，动点 M 在棱 DD_1 上，记平面 BC_1M 截正方体所得的截面图形为 Ω，则（　　）

A. 平面 $A_1BC\perp$ 平面 B_1C_1D　　B. 不存在点 M，使得直线 $CM//$ 平面 BA_1C_1

C. B_1M+CM 的最小值为 $2\sqrt{4+2\sqrt{2}}$　　D. Ω 的周长随着线段 DM 长度的增大而增大

11. 已知函数 $f(x),g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，其中 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,1)$ 中心对称，$g(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，$f(x)-g(2+x)=4$，$g(2)=3$，则（　　）

A. $f(-x)+f(x)=0$　　B. $f(2024)=7$

C. $g(2024)=-1$　　D. $\sum\limits_{k=1}^{2024}f(k)=2024$

第Ⅱ卷　非选择题(共 92 分)

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知集合 $M=\{x\in\mathbf{N}\mid(x+2)(x-3)<0\},N=\{-2,-1,0,1,2\}$，则 $M\cap N=$________.

13. 在 $\triangle ABC$ 中，$AC=4$，且 $\sin B=2\sin A\sin C$，则 $\triangle ABC$ 的面积为________；若 $C=\frac{\pi}{4}$，则 $B=$________.

14. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线与 C 交于 M，N 两点，若 $3S_{\triangle MNF_2}=7S_{\triangle MF_1F_2}$，且 $\angle F_2F_1N=\angle F_2NF_1$，则 C 的离心率为________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分）

2023 年 12 月 28 日，小米汽车举行了技术发布会，首款产品 SU7 揭开神秘面纱，引起了广大车迷爱好者的热议，为了了解车迷们对该款汽车的购买意愿与性别是否具有相关性，某车迷协会随机抽取了 200 名车迷朋友进行调查，所得数据统计如下表所示.

性别	购车意愿		合计
	愿意购置该款汽车	不愿购置该款汽车	
男性	100	20	120
女性	50	30	80
合计	150	50	200

（1）请根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，分析车迷们对该款汽车的购买意愿与性别是否有关；

（2）用频率估计概率，随机抽取两名车迷作深度访谈，记其中愿意购置该款汽车的人数为 X，求 X 的分布列与期望.

参考公式：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

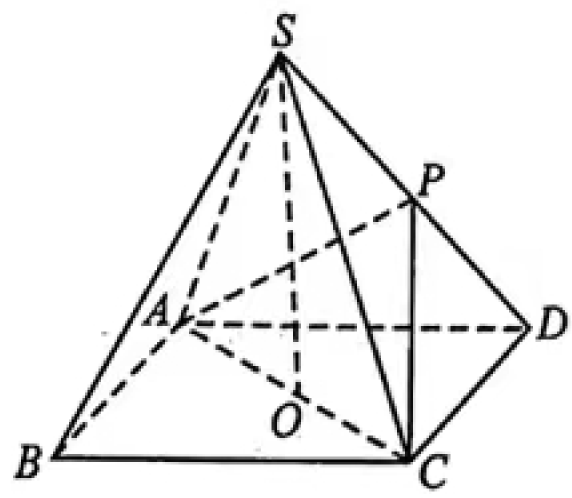
α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

16.（15 分）

如图，在正四棱锥 $S-ABCD$ 中，$SA=AB=\sqrt{2}$，点 O 是 AC 的中点，点 P 在棱 SD 上（异于端点）.

（1）若点 P 是棱 SD 的中点，求证：平面 $SAD\perp$ 平面 PAC；

（2）若二面角 $S-AC-P$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$，求线段 SP 的长.



17.（15分）

已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，点$A\left(-\sqrt{6},\sqrt{2}\right)$在$C$上，且$\triangle AF_1F_2$的面积为$\sqrt{6}$.

（1）求双曲线C的方程；

（2）记点A在x轴上的射影为点B，过点B的直线l与C交于M,N两点.探究：$\frac{1}{|BM|^2}+\frac{1}{|BN|^2}$是否为定值，若是，求出该定值；若不是，请说明理由.

18.（17分）

已知函数$f(x)=x^{k+1}(\ln x-\lambda x)$，其中$k,\lambda\in\mathbf{R}$.

（1）若$k=-1$，讨论$f(x)$在$[1,4]$上的单调性；

（2）若存在正数k，使得$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1\neq x_2$时，$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，求$\lambda$的取值范围.

19.（17分）

基本不等式可以推广到一般的情形：对于n个正数$a_1,a_2,\cdots,a_n$，它们的算术平均不小于它们的几何平均，即$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时，等号成立.

若无穷正项数列$\{a_n\}$同时满足下列两个性质：①$\exists M>0,a_n<M$；②$\{a_n\}$为单调数列，则称数列$\{a_n\}$具有性质P.

（1）若$a_n=n+\frac{4}{n^2}$，求数列$\{a_n\}$的最小项；

（2）若$b_n=\frac{1}{2^n-1}$，记$S_n=\sum_{i=1}^{n}b_n$，判断数列$\{S_n\}$是否具有性质P，并说明理由；

（3）若$c_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，求证：数列$\{c_n\}$具有性质$P$.

号卷·A10联盟2024届高三开年考

数学参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	C	B	A	C	B	D

1. A　由题意得，$-4m-2=0$，解得 $m=-\frac{1}{2}$. 故选 A.

2. D　$z=\mathrm{i}+\frac{3}{1-\mathrm{i}^3}=\mathrm{i}+\frac{3}{1+\mathrm{i}}=\mathrm{i}+\frac{3(1-\mathrm{i})}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$，则在复平面内对应的点为 $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$，位于第四象限，故选 D.

3. C　由题意得，$f'(x)=\mathrm{e}^x+\cos x$，$f'(0)=2$，则直线 l 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，故选 C.

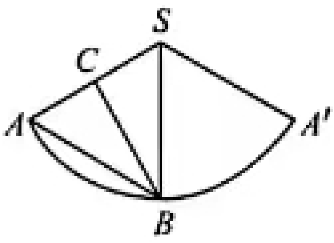
4. B　由题意得，$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n}{n}$，所以数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，故 $\frac{a_8}{8}=\frac{a_4}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4$，所以 $\frac{a_8}{a_4}=\frac{1}{8}$. 故选 B.

5. A　由题意得，抛物线 $C:x^2=8y$. 设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则直线 PQ 的斜率

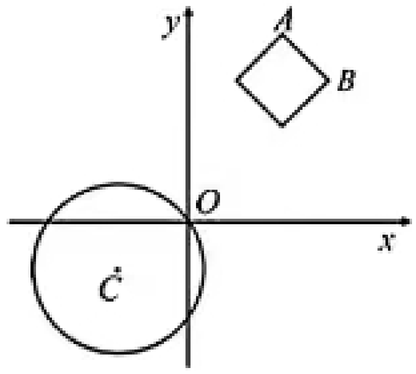
$$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{\frac{x_1^2}{8}-\frac{x_2^2}{8}}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{8}=-\frac{1}{2}$$，故直线 PQ 的方程为 $y-4=-\frac{1}{2}(x+2)$，即 $x+2y-6=0$，故选 A.

6. C　若三个景点安排的人数之比为 $1:2:3$，则有 $\mathrm{C}_6^1\mathrm{C}_5^2\mathrm{A}_3^3=360$ 种安排方法；若三个景点安排的人数之比为 $1:1:4$，则有 $\frac{\mathrm{C}_6^1\mathrm{C}_5^1}{\mathrm{A}_2^2}\cdot\mathrm{A}_3^3=90$ 种安排方法；若三个景点安排的人数之比为 $2:2:2$，则有 $\frac{\mathrm{C}_6^2\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{A}_3^3}\cdot\mathrm{A}_3^3=90$ 种安排方法，故不同的安排方法种数是 $360+90+90=540$. 故选 C.

7. B　作出展开图如图所示，显然 $\angle CAB,\angle CBA$ 为锐角，故 $BC\perp SA$，又 $SC=CA$，故 $BS=BA$，即 $\triangle ASB$ 为等边三角形，故 $\angle ASA'=\frac{2\pi}{3}$，则圆锥的侧面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times16=\frac{16\pi}{3}$，底面积为 $\pi\times\left(\frac{4\times\frac{2\pi}{3}}{2\pi}\right)^2=\frac{16\pi}{9}$，故圆锥 SO 的表面积为 $\frac{64\pi}{9}$，故选 B.



8. D　由题意得，圆 $C:(x+3)^2+(y+2)^2=13$；设点 $P(x_0,y_0)$，则 $|x_0-4|+|y_0-6|=2$，故点 P 的轨迹为如下所示的正方形，其中 $A(4,8)$，$B(6,6)$，则 $|AC|=\sqrt{149},|BC|=\sqrt{145}$，则 $|PN|\leqslant|AC|+r=\sqrt{149}+\sqrt{13}$，故选 D.



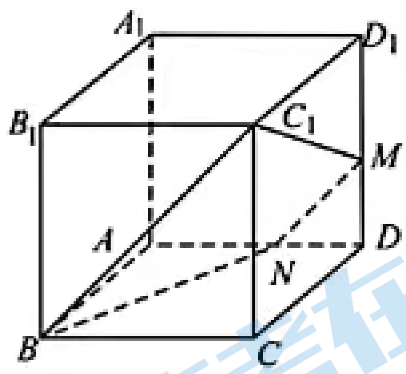
二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

注：双选答对1个给3分，三选答对1个给2分，对2个给4分.

题号	9	10	11
答案	AC	ACD	BD

9. AC $f\left(\frac{9\pi}{4}\right)=2\sin\left(\frac{1}{3}\times\frac{9\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=2$，故 A 正确；$f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=2\sin\left(-\frac{1}{3}\times\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=-2$，故 B 错误；将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{3\pi}{4}$ 个单位长度后，得到 $f\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)=2\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\frac{x}{3}$，偶函数，故 C 正确；因为 $x\in[\pi,3\pi]$，所以 $\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{3\pi}{4}\right]$，则函数 $f(x)$ 在 $[\pi,3\pi]$ 上先增后减，故 D 错误. 故选 AC.

10. ACD 由于正方体的对角面相互垂直，故 A 正确；当点 M 与 D_1 重合时，直线 $CM//$ 平面 BA_1C_1，故 B 错误；将四边形 DCC_1D_1 翻折至与四边形 BB_1D_1D 共面，则 $B_1M+CM\geqslant B_1C=\sqrt{\left(2\sqrt{2}+2\right)^2+2^2}=2\sqrt{4+2\sqrt{2}}$，故 C 正确；当 $DM=0$ 时，Ω 为 $\triangle BC_1D$，且 $\triangle BC_1D$ 的周长为 $6\sqrt{2}$. 当 $DM=2$ 时，Ω 为四边形 ABC_1D_1，且四边形 ABC_1D_1 的周长为 $4+4\sqrt{2}$. 当 $0<DM<2$ 时，如图，过点 M 作 $MN//AD_1$，易得 $MN//BC_1$，所以 Ω 为四边形 $MNBC_1$，设 $DM=x$，四边形 $MNBC_1$ 的周长为 l，



则 $l(x)=2\sqrt{2}+2\sqrt{(2-x)^2+4}+\sqrt{2}x$，所以

$l'(x)=\frac{2x-4}{\sqrt{(x-2)^2+4}}+\sqrt{2}$，令 $l'(x)>0$，解得 $0<x<4$，

所以 $l(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，所以 Ω 的周长随着线段 DM 长度的增大而增大，故 D 正确. 故选 ACD.

11. BD 由题意得，$f(x)-4=g(2+x)$，$g(2+x)=g(2-x)$，$\therefore f(x)-4=f(-x)-4$，

$\therefore f(x)=f(-x)$，又 $f(0)=4+g(2)=7$，故 A 错误；$\because f(x)$ 关于点 $(1,1)$ 中心对称，

$\therefore f(1)=1$，$f(x+2)+f(-x)=2$，$\therefore f(x+4)+f(-x-2)=2$，$\because f(x+2)=f(-x-2)$，

$\therefore f(x+4)=f(-x)=f(x)$，$\therefore f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，$\therefore f(2024)=f(0)=7$，

故 B 正确；$g(2024)=f(2022)-4=f(2)-4=2-f(0)-4=2-7-4=-9$，故 C 错误；

$\because f(1)=1$，$f(2)=2-f(0)=2-7=-5$，$f(3)=f(-1)=f(1)=1$，$f(4)=f(0)=7$，

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=4$，$\therefore \sum_{k=1}^{2024}f(k)=2024$，故 D 正确. 故选 BD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. $\{0,1,2\}$

因为 $M=\{x\in\mathbf{N}|-2<x<3\}=\{0,1,2\}$，$N=\{-2,-1,0,1,2\}$，所以 $M\cap N=\{0,1,2\}$.

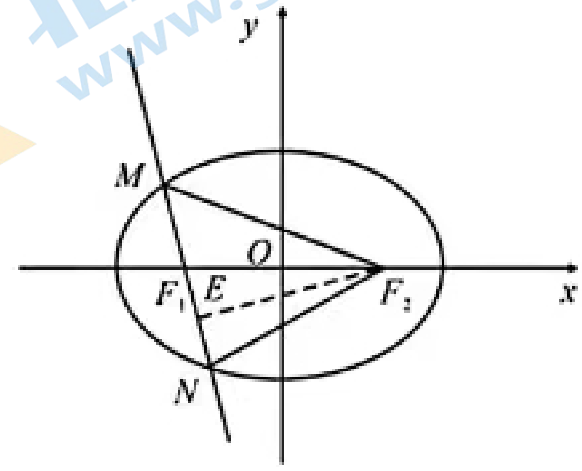
13. 4（2 分） $\frac{\pi}{2}$（3 分）

设角 A,B,C 所对边分别为 a,b,c，由 $\sin B=2\sin A\sin C$，结合正弦定理可得 $b=2a\sin C$，因为 $b=4$，所以 $a\sin C=2$，所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times4a\sin C=4$. 当 $C=\frac{\pi}{4}$ 时，

$\sin B=2\sin A\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\sin A$，即 $b=\sqrt{2}a$，由余弦定理可得

$c^2=a^2+\left(\sqrt{2}a\right)^2-2a\times\sqrt{2}a\times\frac{\sqrt{2}}{2}=a^2$，即 $c=a$，所以 $A=C=\frac{\pi}{4},B=\frac{\pi}{2}$.

14. $\frac{5}{7}$



如图，作 $F_2E\perp MN$，垂足为 E．$\because\angle F_2F_1N=\angle F_2NF_1$，

$\therefore|F_1F_2|=|F_2N|=2c$，点 E 为 F_1N 的中点，$\therefore|F_1N|=2a-2c$，

$|F_1E|=a-c$．$\because 3S_{\triangle MNF_2}=7S_{\triangle MF_1F_2}$，$\therefore\frac{|MF_1|}{|MN|}=\frac{3}{7}$，

$\therefore|MF_1|=\frac{3}{4}|F_1N|=\frac{3}{4}\cdot 2(a-c)=\frac{3}{2}(a-c)$，

$\therefore|ME|=|MF_1|+|F_1E|=\frac{3}{2}(a-c)+(a-c)=\frac{5}{2}(a-c)$，

$\therefore|MF_2|=2a-|MF_1|=2a-\frac{3}{2}(a-c)=\frac{a+3c}{2}$．在 Rt$\triangle MF_2E$ 中，由勾股定理得，

$\left[\frac{5}{2}(a-c)\right]^2+(2c)^2-(a-c)^2=\left(\frac{a+3c}{2}\right)^2$，化简整理得：$5a^2-12ac+7c^2=0$，

即 $(5a-7c)(a-c)=0$，$\because e=\frac{c}{a}\in(0,1)$，$\therefore(5-7e)(1-e)=0$，解得 $e=\frac{5}{7}$（$e=1$ 舍去）.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分）

（1）零假设为 H_0：车迷们对该款汽车的购买意愿与性别无关. ……………………1 分

根据表中数据可得 $\chi^2=\frac{200\times(100\times30-50\times20)^2}{120\times80\times150\times50}\approx11.111>10.828$，……………………5 分

根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，

即认为车迷们对该款汽车的购买意愿与性别有关. ……………………6 分

（2）由题意得，随机抽取到 1 名愿意购置该款汽车的车迷的概率为 $\frac{150}{200}=\frac{3}{4}$，

故 $X\sim B\left(2,\frac{3}{4}\right)$，……………………7 分

所以 $P(X=0)=C_2^0\left(1-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$，$P(X=1)=C_2^1\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{8}$，

$P(X=2)=C_2^2\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$，……………………10 分

故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$

……………………11 分

$EX = 0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{9}{16}=\frac{3}{2}$.（或 $EX = 2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$ ）……………………13 分

16.（15 分）

（1）由题意得，正四棱锥所有棱长均为 $\sqrt{2}$，

因为 P 是 SD 的中点，所以 $CP\perp SD$，$AP\perp SD$，……………………3 分

因为 $AP\cap CP=P$，且 $AP,CP\subset$ 平面 PAC，所以 $SD\perp$ 平面 PAC，……………………4 分

又因为 $SD\subset$ 平面 SAD，所以平面 $SAD\perp$ 平面 PAC．……………………5 分

（2）如图，连接 OB，易知 OB，OC，OS 两两垂直，分别以 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OS}$ 为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$，

则 $A(0,-1,0)$，$C(0,1,0)$，$S(0,0,1)$，$D(-1,0,0)$，

所以 $\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{SD}=(-1,0,-1)$．……………………7 分

设 $\overrightarrow{SP}=\lambda\overrightarrow{SD}$，$0<\lambda<1$，则 $\overrightarrow{SP}=(-\lambda,0,-\lambda)$，

所以 $P(-\lambda,0,1-\lambda)$，所以 $\overrightarrow{AP}=(-\lambda,1,1-\lambda)$．

设平面 PAC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=-\lambda x+y+(1-\lambda)z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2y=0\end{cases}$，

令 $z=\lambda$，则 $x=1-\lambda$，所以平面 PAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1-\lambda,0,\lambda)$．……………………10 分

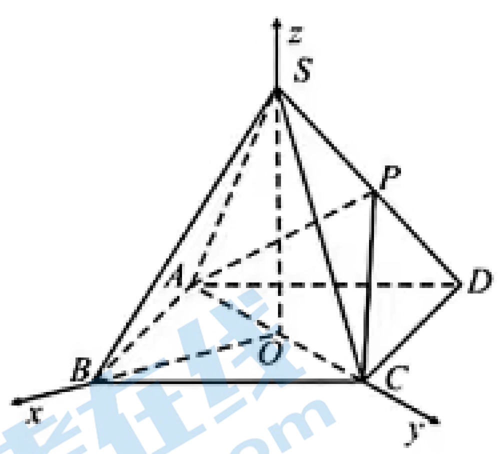
易知平面 SAC 的法向量为 $\overrightarrow{OB}=(1,0,0)$，……………………11 分

设二面角 $S-AC-P$ 的平面角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos<\overrightarrow{OB},\boldsymbol{n}>|=\frac{|\overrightarrow{OB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{OB}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|1-\lambda|}{\sqrt{(1-\lambda)^2+\lambda^2}\times 1}=\frac{\sqrt{5}}{5}$．……………………13 分

即 $3\lambda^2-8\lambda+4=0$，解得 $\lambda=\frac{2}{3}$ 或 $\lambda=2$（不合题意，舍去），……………………14 分

此时 $SP=\frac{2}{3}SD=\frac{2\sqrt{2}}{3}$．……………………15 分



17.（15 分）

（1）设双曲线的焦距为 $2c(c>0)$，

由题意得，$\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6}\\ a^2+b^2=c^2\\ \frac{6}{a^2}-\frac{2}{b^2}=1\end{cases}$，……………………3 分

解得$\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=1\\ c=\sqrt{3}\end{cases}$，故双曲线$C$的方程为$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$. ……………………5 分

（2）由题意得，$B\left(-\sqrt{6},0\right)$，

当直线MN的斜率为零时，

则$\dfrac{1}{|BM|^2}+\dfrac{1}{|BN|^2}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2}{(2-6)^2}=\dfrac{16}{16}=1$. ……8 分

当直线MN的斜率不为零时，设直线MN的方程为$x=my-\sqrt{6}$，点$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-y^2=1\\ x=my-\sqrt{6}\end{cases}$，整理得$(m^2-2)y^2-2\sqrt{6}my+4=0$，

则$\begin{cases}m^2-2\neq 0\\ \Delta=24m^2-16(m^2-2)>0\end{cases}$，解得$m\neq\sqrt{2}$且$m\neq-\sqrt{2}$，

所以$y_1+y_2=\dfrac{2\sqrt{6}m}{m^2-2}$，$y_1y_2=\dfrac{4}{m^2-2}$， ……………………11 分

所以$\dfrac{1}{|BM|^2}+\dfrac{1}{|BN|^2}=\dfrac{1}{(1+m^2)y_1^2}+\dfrac{1}{(1+m^2)y_2^2}=\dfrac{1}{1+m^2}\cdot\dfrac{y_1^2+y_2^2}{y_1^2y_2^2}$

$$=\frac{1}{1+m^2}\cdot\frac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{y_1^2y_2^2}=\frac{1}{1+m^2}\cdot\frac{\left(\dfrac{2\sqrt{6}m}{m^2-2}\right)^2-2\cdot\dfrac{4}{m^2-2}}{\left(\dfrac{4}{m^2-2}\right)^2}=\frac{1}{1+m^2}\cdot\frac{16m^2+16}{16}=1.$$

……………………14 分

综上，$\dfrac{1}{|BM|^2}+\dfrac{1}{|BN|^2}=1$，为定值. …………………… 15 分

18.（17 分）

（1）由题意得，$f(x)=\ln x-\lambda x$，$x\in[1,4]$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\lambda=\dfrac{1-\lambda x}{x}$. ……………………1 分

若$\lambda\leqslant 0$，则$f'(x)>0$，此时$f(x)$在$[1,4]$上单调递增； ……………………2 分

若$0<\lambda\leqslant\dfrac{1}{4}$，则$f'(x)\geqslant 0$，此时$f(x)$在$[1,4]$上单调递增； ……………………3 分

若$\lambda\geqslant 1$，则$f'(x)\leqslant 0$，此时$f(x)$在$[1,4]$上单调递减；

若$\dfrac{1}{4}<\lambda<1$，则当$x\in\left[1,\dfrac{1}{\lambda}\right)$时，$f'(x)>0$，当$x\in\left(\dfrac{1}{\lambda},4\right]$时，$f'(x)<0$，

故$f(x)$在$\left[1,\dfrac{1}{\lambda}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{1}{\lambda},4\right]$上单调递减. ……………………5 分

综上所述，当$\lambda\leqslant\dfrac{1}{4}$时，$f(x)$在$[1,4]$上单调递增；当$\dfrac{1}{4}<\lambda<1$时，$f(x)$在$\left[1,\dfrac{1}{\lambda}\right)$上单调递增，在

$\left(\frac{1}{\lambda},4\right]$上单调递减；当$\lambda\geqslant 1$时，$f(x)$在$[1,4]$上单调递减. ························6 分

（2）由题意得，$\exists k\in(0,+\infty)$，使得函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，

$\therefore f'(x)=(k+1)x^k(\ln x-\lambda x)+x^{k+1}\left(\frac{1}{x}-\lambda\right)=x^k\left[(k+1)\ln x-\lambda(k+2)x+1\right]$. ·········7 分

令$F(x)=(k+1)\ln x-\lambda(k+2)x+1$，

问题即转化为：$\exists k\in(0,+\infty)$，$\forall x\in(0,+\infty)$，$F(x)\leqslant 0$. ························9 分

①当$\lambda\leqslant 0$时，$F'(x)=\frac{k+1}{x}-\lambda(k+2)>0$，且单调递增，

易知$x\to+\infty$，$F(x)\to+\infty$，不合题意，舍去. ························11 分

②当$\lambda>0$时，$\because F'(x)=\frac{k+1}{x}-\lambda(k+2)$，

$\therefore F(x)$在$\left(0,\frac{k+1}{\lambda(k+2)}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{k+1}{\lambda(k+2)},+\infty\right)$上单调递减，

$\therefore F(x)_{\max}=F\left(\frac{k+1}{\lambda(k+2)}\right)=(k+1)\ln\frac{k+1}{\lambda(k+2)}-k\leqslant 0$. ························12 分

即 $\exists k\in(0,+\infty)$，使得$\ln\lambda\geqslant\ln\frac{k+1}{k+2}-\frac{k}{k+1}$. ························13 分

令$G(k)=\ln\frac{k+1}{k+2}-\frac{k}{k+1}=\ln(k+1)-\ln(k+2)+\frac{1}{k+1}-1$，

$\therefore G'(k)=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}-\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{-1}{(k+2)(k+1)^2}<0$，

$\therefore G(k)$在$(0,+\infty)$上单调递减，且当 $k\to+\infty$时，$G(k)=\ln\left(1-\frac{1}{k+2}\right)+\frac{1}{k+1}-1\to-1$，

························16 分

$\therefore\ln\lambda>-1$，$\therefore\lambda>\frac{1}{e}$.

综上所述，实数λ的取值范围为$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$. ························17 分

19.（17 分）

（1）$\because a_n=\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+\frac{4}{n^2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{4}{n^2}}=3$，当且仅当$\frac{n}{2}=\frac{4}{n^2}$，即$n=2$时，等号成立，

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$的最小项为$a_2=2+\frac{4}{2^2}=3$. ························3 分

（2）数列$\{S_n\}$具有性质P.

$\because b_n=\frac{1}{2^n-1}=\frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}-1}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$，

$\therefore S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{i-1}}=1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<2$，

$\therefore$ 数列$\{S_n\}$满足条件①. ························6 分

$\because b_n=\dfrac{1}{2^n-1}>0$，$\therefore S_n<S_{n+1}$，$\therefore\{S_n\}$为单调递增数列，$\therefore$ 数列$\{S_n\}$满足条件②.

综上，数列$\{S_n\}$具有性质P. ························7 分

（3）先证数列$\{c_n\}$满足条件①:

$$c_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=C_n^0+C_n^1\cdot\frac{1}{n}+C_n^2\cdot\frac{1}{n^2}+C_n^3\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+C_n^n\cdot\frac{1}{n^n}.$$

当$k\geqslant 2$时，$C_n^k\cdot\dfrac{1}{n^k}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n\quad k!}=\dfrac{n}{n}\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-2}{n}\cdots\dfrac{n-k+1}{n}\cdot\dfrac{1}{k!}$

$$\leqslant\frac{1}{k!}\leqslant\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k},$$

则$c_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\leqslant 1+1+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)=3-\dfrac{1}{n}<3$，

$\therefore$ 数列$\{S_n\}$满足条件①. ························12 分

再证数列$\{c_n\}$满足条件②:

$$c_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\times 1$$

$$<\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}\quad\left(1+\frac{1}{n}>1\text{，等号取不到}\right)$$

$$=\left(\frac{n+1+\frac{1}{n}\cdot n}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=c_{n+1},$$

$\therefore\{c_n\}$为单调递增数列，$\therefore$ 数列$\{c_n\}$满足条件②.

综上、数列$\{c_n\}$具有性质P. ························17 分

以上各解答题如有不同解法并且正确，请按相应步骤给分.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！