

2022 北京海淀高三一模

数 学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | x > 0\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $\{x | x \leq 2\}$ B. $\{x | x \geq -1\}$ C. $\{x | x > -1\}$ D. $\{x | x > 0\}$

2. 在复平面内，复数 z 对应的点为 $(1, -1)$, 则 $z(1+i) =$ ()

- A. 2 B. $2i$ C. $-2i$ D. -2

3. 双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$

4. 在 $(\sqrt{x} - x)^4$ 的展开式中， x^2 的系数为 ()

- A. -1 B. 1 C. -4 D. 4

5. 下列说法中正确的是

- A. 平行于同一直线的两个平面平行 B. 垂直于同一直线的两个平面平行
C. 平行于同一平面的两条直线平行 D. 垂直于同一平面的两个平面平行

6. 已知直线 $l: ax + by = 1$ 是圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ 的一条对称轴，则 ab 的最大值为 ()

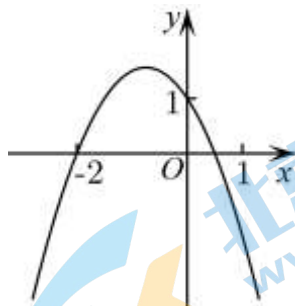
- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{2}$

7. 已知角 α 的终边绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{2}{3}\pi$ 后与角 β 的终边重合，且 $\cos(\alpha + \beta) = 1$, 则 α 的取值可以为 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

8. 已知二次函数 $f(x)$ 的图象如图所示，将其向右平移 2 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象，则不等式

$g(x) > \log_2 x$ 的解集是 ()



- A. $(-\infty, 2)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(0, 2)$ D. $(0, 1)$

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = \frac{\pi}{4}$, 则“ $\sin B < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ”是“ $\triangle ABC$ 是钝角三角形”的 ()

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

10. 甲医院在某段时间内累计留院观察的某病疑似患者有 98 人.经检测后分为确诊组和排除组, 患者年龄分布如下表:

年龄 (岁)	$[0, 20)$	$[20, 40)$	$[40, 60)$	$[60, 80)$	$[80, +\infty)$	总计
确诊组人数	0	3	7	4	0	14
排除组人数	7	41	15	19	2	84

为研究患病与年龄的关系, 现采用两种抽样方式.第一种: 从 98 人中随机抽取 7 人.第二种: 从排除组的 84 人中随机抽取 7 人.用 X, Y 分别表示两种抽样方式下 80 岁及以上的人数与 80 岁以下的人数之比.给出下列四个结论:

- ① 在第一种抽样方式下, 抽取的 7 人中一定有 1 人在确诊组;
② 在第二种抽样方式下, 抽取的 7 人都小于 20 岁的概率是 0;
③ X, Y 的取值范围都是 $\left\{0, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}\right\}$;
④ $E(X) < E(Y)$

其中, 正确结论的个数为 ()

- A. 1
B. 2
C. 3
D. 4

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 准线方程为 $x = -1$, 则 p 等于_____.

12. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且公比为 q , S_n 为其前 n 项和, 若 a_2 是 a_1, S_2 的等差中项, $S_4 = 15$, 则 $q =$ _____, $a_1 =$ _____.

13. 若函数 $f(x) = |2^x - a| - 1$ 的值域为 $[-1, +\infty)$, 则实数 a 的一个取值可以为_____.

14. 已知 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是单位向量, 且 $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$, 设向量 $\vec{a} = \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2$, 当 $\lambda = \mu = 1$ 时, $\langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle =$ _____; 当 $\lambda + \mu = 2$ 时, $|\vec{a} - \vec{e}_1|$ 的最小值为_____.

15. 已知函数 $f(x) = \frac{\cos \pi x}{x^2 + 1}$, 给出下列四个结论: ① $f(x)$ 是偶函数; ② $f(x)$ 有无数个零点; ③ $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$; ④ $f(x)$ 的最大值为 1.其中, 所有正确结论的序号为_____.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

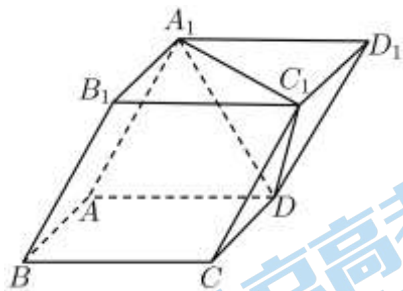
16. 设函数 $f(x) = 2\sin x \cos x + A\cos 2x$ ($A \in \mathbf{R}$). 已知存在 A 使得 $f(x)$ 同时满足下列三个条件中的两个: 条件①:

$f(0) = 0$; 条件②: $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$; 条件③: $x = \frac{\pi}{8}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴.

(1) 请写出 $f(x)$ 满足的两个条件, 并说明理由;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(0, m)$ 上有且只有一个零点, 求 m 的取值范围.

17. 如图, 在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, 平面 $A_1ADD_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $AD = 2$, $AA_1 = A_1D$.



(1) 求证: $A_1D \perp AB$;

(2) 若直线 AB 与平面 A_1DC_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$, 求 AA_1 的长度.

18. 《黄帝内经》中十二时辰养生法认为: 子时的睡眠对一天至关重要 (子时是指 23 点到次日凌晨 1 点). 相关数据表明, 入睡时间越晚, 沉睡时间越少, 睡眠指数也就越低. 根据某次的抽样数据, 对早睡群体和晚睡群体睡眠指数的统计如下表:

组别	睡眠指数	早睡人群占比	晚睡人群占比
1	$[0, 51)$	0.1%	9.2%
2	$[51, 66)$	11.1%	47.4%
3	$[66, 76)$	34.6%	31.6%
4	$[76, 90)$	48.6%	11.8%
5	$[90, 100]$	5.6%	0.0%

注: 早睡人群为 23:00 前入睡的人群, 晚睡人群为 01:00 后入睡的人群.

(1) 根据表中数据, 估计早睡人群睡眠指数 25% 分位数与晚睡人群睡眠指数 25% 分位数分别在哪组?

(2) 据统计, 睡眠指数得分在区间 $[76, 90)$ 内的人群中, 早睡人群约占 80%. 从睡眠指数得分在区间 $[76, 90)$ 内的人群中随着抽取 3 人, 以 X 表示这 3 人中属于早睡人群的人数, 求 X 的分布列与数学期望 $E(X)$;

(3) 根据表中数据, 有人认为, 早睡人群的睡眠指数平均值一定落在区间 $[76, 90)$. 试判断这种说法是否正确, 并说明理由.

19. 已知函数 $f(x) = e^x(ax^2 - x + 1)$.

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线的方程;
- (2) 若函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极大值, 求 a 的取值范围;
- (3) 若函数 $f(x)$ 存在最小值, 直接写出 a 的取值范围.

20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的下顶点 A 和右顶点 B 都在直线 $l_1: y = \frac{1}{2}(x - 2)$ 上.

- (1) 求椭圆方程及其离心率;
- (2) 不经过点 B 的直线 $l_2: y = kx + m$ 交椭圆 C 于两点 P, Q , 过点 P 作 x 轴的垂线交 l_1 于点 D , 点 P 关于点 D 的对称点为 E . 若 E, B, Q 三点共线, 求证: 直线 l_2 经过定点.

21. 设 m 为正整数, 若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_{ik+i}| = |a_{ik} + i| (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots)$, 则称 $\{a_n\}$ 为 P_m 数列.

- (1) 数列 $\{n\}$ 是否为 P_1 数列? 说明理由;
- (2) 已知 $a_n = \begin{cases} s, n \text{ 为奇数,} \\ t, n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 其中 s, t 为常数. 若数列 $\{a_n\}$ 为 P_2 数列, 求 s, t ;
- (3) 已知 P_3 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 < 0$, $a_8 = 2$, $a_{6k} < a_{6k+6} (k = 1, 2, \dots)$, 求 a_n .

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$ ， $B = \{x | x > 0\}$ ，则 $A \cup B =$ ()

A. $\{x | x \leq 2\}$

B. $\{x | x \geq -1\}$

C. $\{x | x > -1\}$

D. $\{x | x > 0\}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用并集的定义可求 $A \cup B$.

【详解】 $A \cup B = [-1, +\infty)$,

故选：B

2. 在复平面内，复数 z 对应的点为 $(1, -1)$ ，则 $z(1+i) =$ ()

A. 2

B. $2i$

C. $-2i$

D. -2

【答案】A

【解析】

【分析】由复数的几何意义可得复数 z ，利用复数的乘法可求得结果.

【详解】由复数的几何意义可知 $z = 1 - i$ ，故 $z(1+i) = (1-i)(1+i) = 2$.

故选：A.

3. 双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的离心率为 ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D. $\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】求出 a 、 b 、 c 的值，可求得双曲线的离心率.

【详解】在椭圆 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 中， $a = \sqrt{3}$ ， $b = 1$ ，则 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$ ，

因此，双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

故选：C.

4. 在 $(\sqrt{x} - x)^4$ 的展开式中， x^2 的系数为 ()

A. -1

B. 1

C. -4

D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】利用二项展开式的通项公式可求 x^2 的系数.

【详解】 $(\sqrt{x}-x)^4$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_4^r (\sqrt{x})^{4-r} (-x)^r = (-1)^r C_4^r x^{2+\frac{r}{2}}$,

令 $2+\frac{r}{2}=2$, 则 $r=0$, 故 x^2 的系数为 $(-1)^0 C_4^0 = 1$,

故选: B.

5. 下列说法中正确的是

A. 平行于同一直线的两个平面平行

B. 垂直于同一直线的两个平面平行

C. 平行于同一平面的两条直线平行

D. 垂直于同一平面的两个平面平行

【答案】B

【解析】

【详解】平行于同一直线的两个平面可以平行、相交, 故不正确, 垂直于同一直线的两个平面平行正确, 平行于同一平面的两条直线平行错误, 因为也可以相交也可以是异面直线, 垂直于同一平面的两个平面平行错误, 因为也可以相交, 故选 B.

6. 已知直线 $l: ax+by=1$ 是圆 $x^2+y^2-2x-2y=0$ 的一条对称轴, 则 ab 的最大值为 ()

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. $\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】圆心必然在直线 l 上, 得到 a, b 的关系式, 再考虑求最大值.

【详解】由于直线 l 是圆的对称轴, 所以圆的圆心必定在直线 l 上,

将圆的一般方程转变为标准方程: $(x-1)^2+(y-1)^2=2$,

圆心为 $(1,1)$, 将圆心坐标代入直线 l 的方程得 $a+b=1$,

$b=1-a$, $ab=a(1-a)$,

函数 $y=a(1-a)$ 是开口向下, 以 $a=\frac{1}{2}$ 为对称轴的抛物线,

所以 $y_{\max} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$,

故选: A.

7. 已知角 α 的终边绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{2}{3}\pi$ 后与角 β 的终边重合, 且 $\cos(\alpha+\beta)=1$, 则 α 的取值可以为 ()

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$

D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】C

【解析】

【分析】由题意易得 $\alpha + \frac{2\pi}{3} = \beta$, 列出余弦函数方程解出即可.

【详解】由于角 α 的终边绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{2}{3}\pi$ 后与角 β 的终边重合，

$$\text{所以 } \alpha + \frac{2\pi}{3} = \beta,$$

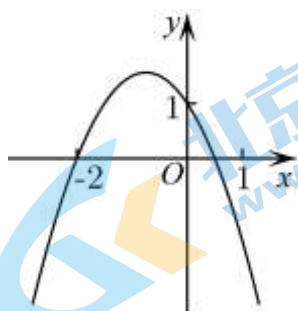
$$\text{所以 } \cos\left(2\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = 1, \text{ 即 } 2\alpha + \frac{2\pi}{3} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 解得 } \alpha = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{当 } k=1 \text{ 时, } \alpha = \frac{2\pi}{3},$$

故选：C.

8. 已知二次函数 $f(x)$ 的图象如图所示，将其向右平移 2 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象，则不等式

$g(x) > \log_2 x$ 的解集是 ()



A. $(-\infty, 2)$

B. $(2, +\infty)$

C. $(0, 2)$

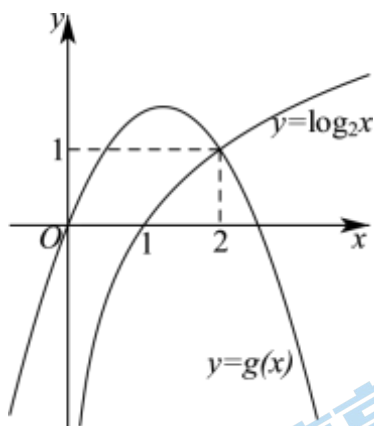
D. $(0, 1)$

【答案】C

【解析】

【分析】作出函数 $g(x)$ 与 $y = \log_2 x$ 的图象，数形结合可得不等式 $g(x) > \log_2 x$ 的解集.

【详解】根据图中信息作出函数 $g(x)$ 、 $y = \log_2 x$ 的图象如下图所示：



因为 $f(0) = 1$ ，则 $g(2) = 1$ ，且 $\log_2 2 = 1$ ，

由图可知，不等式 $g(x) > \log_2 x$ 的解集为 $(0, 2)$ 。

故选：C.

9. 在 $\triangle ABC$ 中， $A = \frac{\pi}{4}$ ，则“ $\sin B < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ”是“ $\triangle ABC$ 是钝角三角形”的 ()

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】先判断如果 $\sin B < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 能不能推出 $\triangle ABC$ 是钝角三角形,

再判断如果 $\triangle ABC$ 是钝角三角形, 是否一定有 $\sin B < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 即可.

【详解】如果 $\sin B < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 由于 B 是三角形的内角, 并且 $A = \frac{\pi}{4}$, 则 $0 < B < \frac{\pi}{4}$,

$A + B < \frac{\pi}{2}$, $\triangle ABC$ 是钝角三角形,

所以 $\sin B < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 是充分条件;

如果 $\triangle ABC$ 是钝角三角形, 不妨设 $B = \frac{2\pi}{3}$, 则 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $\sin B < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 不是必要条件;

故选: A.

10. 甲医院在某段时间内累计留院观察的某病疑似患者有 98 人. 经检测后分为确诊组和排除组, 患者年龄分布如下表:

年龄 (岁)	$[0, 20)$	$[20, 40)$	$[40, 60)$	$[60, 80)$	$[80, +\infty)$	总计
确诊组人数	0	3	7	4	0	14
排除组人数	7	41	15	19	2	84

为研究患病与年龄的关系, 现采用两种抽样方式. 第一种: 从 98 人中随机抽取 7 人. 第二种: 从排除组的 84 人中随机抽取 7 人. 用 X, Y 分别表示两种抽样方式下 80 岁及以上的人数与 80 岁以下的人数之比. 给出下列四个结论:

① 在第一种抽样方式下, 抽取的 7 人中一定有 1 人在确诊组;

② 在第二种抽样方式下, 抽取的 7 人都小于 20 岁的概率是 0;

③ X, Y 的取值范围都是 $\left\{0, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}\right\}$;

④ $E(X) < E(Y)$

其中, 正确结论的个数为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】根据抽样调查和概率的计算以及样本的期望逐项分析即可得答案

【详解】解：对于①：98人中确诊的有14人，若抽取的7人都是84个排除组的，则可能出现7人都不在确诊组，
①错误；

对于②：排除组中小于20岁的人有7人，抽取7人小于20岁的概率为 $P = \frac{C_7^7}{C_{84}^7} \neq 0$ ，故②错误；

对于③：第一种 $[0, 80)$ 有96人， $[80, +\infty)$ 有2人

第二种 $[0, 80)$ 有82人， $[80, +\infty)$ 有2人

故设抽取80岁以上的人数为 M ，则 $M = 0, 1, 2$

当 $M = 0$ 时， $X = Y = 0$

当 $M = 1$ 时， $X = Y = \frac{1}{6}$

当 $M = 2$ 时， $X = Y = \frac{2}{5}$

故③正确；

对于④： $P(X=0) = \frac{C_{96}^7 C_2^0}{C_{98}^7} = \frac{585}{679}$ ， $P(X=\frac{1}{6}) = \frac{C_{96}^6 C_2^1}{C_{98}^7} = \frac{13}{97}$ ， $P(X=\frac{2}{5}) = \frac{C_{96}^5 C_2^2}{C_{98}^7} = \frac{3}{679}$

$P(Y=0) = \frac{C_{82}^7 C_2^0}{C_{84}^7} = \frac{209}{249}$ ， $P(Y=\frac{1}{6}) = \frac{C_{82}^6 C_2^1}{C_{84}^7} = \frac{77}{498}$ ， $P(Y=\frac{2}{5}) = \frac{C_{82}^5 C_2^2}{C_{84}^7} = \frac{1}{166}$

$E(X) = 0 \times \frac{585}{679} + \frac{1}{6} \times \frac{13}{97} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{679} \approx 0.024$

$E(Y) = 0 \times \frac{209}{249} + \frac{1}{6} \times \frac{77}{498} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{166} \approx 0.028$

$E(X) < E(Y)$

故④正确；

故选：B

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分.

11. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线方程为 $x = -1$ ，则 p 等于_____.

【答案】2

【解析】

【分析】根据抛物线的准线方程求解.

【详解】因为抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线方程为 $x = -1$ ，

所以 $-\frac{p}{2} = -1$ ，

解得 $p = 2$.

故答案为：2

【点睛】本题主要考查抛物线的几何性质，还考查了运算求解的能力，属于基础题.

12. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，且公比为 q ， S_n 为其前 n 项和，若 a_2 是 a_1 、 S_2 的等差中项， $S_4 = 15$ ，则 $q =$ _____， $a_1 =$ _____.

【答案】 ①. 2 ②. 1

【解析】

【分析】利用已知条件可得出 $2a_2 = a_1 + S_2$ ，化简可得 q 的值，再利用等比数列的求和公式可求得 a_1 的值.

【详解】由题意可得 $2a_2 = a_1 + S_2 = 2a_1 + a_2$ ， $\therefore a_2 = 2a_1$ ，则 $q = \frac{a_2}{a_1} = 2$ ，

$$S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 15a_1 = 15, \text{ 解得 } a_1 = 1.$$

故答案为：2；1.

13. 若函数 $f(x) = |2^x - a| - 1$ 的值域为 $[-1, +\infty)$ ，则实数 a 的一个取值可以为_____.

【答案】1

【解析】

【分析】考察函数 $f(x) = |2^x - a| - 1$ 的图像，

就是先把 2^x 向上或向下平移 $|a|$ 个单位（取决于 a 的符号），

如果图像存在小于零的部分，则再把小于零的部分以 x 轴为对称轴翻折上去，

最后再把整个图像向下平移一个单位.

【详解】如果 $a \leq 0$ ， $f(x) = |2^x - a| - 1 = 2^x - a - 1$ ，其值域为 $(-a-1, +\infty)$ ，

$-a-1 \geq -1$ ，不符合题意；

如果 $a > 0$ ，当 $x = \log_2 a$ 时， $2^x - a = 0$ ，

$|2^x - a|$ 就是把函数 $x < \log_2 a$ 的部分以 x 轴为对称轴翻折上去，

$\therefore$ 此时 $|2^x - a|$ 的最小值为 0， $f(x) = |2^x - a| - 1$ 的最小值为 -1，值域为 $[-1, +\infty)$ ，

所以 $a \in (0, +\infty)$ ，不妨取 $a = 1$ ；

故答案为：1.

14. 已知 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是单位向量，且 $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$ ，设向量 $\vec{a} = \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2$ ，当 $\lambda = \mu = 1$ 时， $\langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle =$ _____；当

$\lambda + \mu = 2$ 时， $|\vec{a} - \vec{e}_1|$ 的最小值为_____.

【答案】 ①. $\frac{\pi}{4}$ ②. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】求出 $|\vec{a}|$ ，根据夹角公式可得 $\langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle$ ，将 $|\vec{a} - \vec{e}_1|$ 表示为关于 λ 二次函数，求出最小值即可.

【详解】当 $\lambda = \mu = 1$ 时, $\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $|\vec{a}|^2 = \vec{e}_1^2 + 2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2^2 = 2$, 即 $|\vec{a}| = \sqrt{2}$,

$$\cos \langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_1}{|\vec{a}| |\vec{e}_1|} = \frac{(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_1}{|\vec{a}| |\vec{e}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

因为 $\langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle \in [0, \pi]$, 所以 $\langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle = \frac{\pi}{4}$;

当 $\lambda + \mu = 2$ 时, $\vec{a} - \vec{e}_1 = (\lambda - 1)\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2 = (\lambda - 1)\vec{e}_1 + (2 - \lambda)\vec{e}_2$

$$\text{则 } |\vec{a} - \vec{e}_1|^2 = (\lambda - 1)^2 + (2 - \lambda)^2 = 2\left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2},$$

当 $\lambda = \frac{3}{2}$ 时, $|\vec{a} - \vec{e}_1|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

故答案为: $\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}$.

15. 已知函数 $f(x) = \frac{\cos \pi x}{x^2 + 1}$, 给出下列四个结论: ① $f(x)$ 是偶函数; ② $f(x)$ 有无数个零点; ③ $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$; ④ $f(x)$ 的最大值为 1. 其中, 所有正确结论的序号为_____.

【答案】①②④

【解析】

【分析】根据偶函数定义、零点的定义, 结合导数的性质逐一判断即可.

【详解】因为 $f(-x) = \frac{\cos(-\pi x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{\cos \pi x}{x^2 + 1} = f(x)$, 所以该函数是偶函数, 因此结论①正确;

令 $f(x) = \frac{\cos \pi x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow \cos \pi x = 0 \Rightarrow \pi x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = k + \frac{1}{2} (k \in \mathbb{Z})$, 所以结论②正确;

$$f(x) = \frac{\cos \pi x}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\pi(x^2 + 1)\sin \pi x - 2x \cos \pi x}{(x^2 + 1)^2}, \text{ 因为 } f(1) = -\frac{1}{2}, f'(1) = \frac{1}{2} \neq 0,$$

所以函数的最小值不可能为 $-\frac{1}{2}$, 因此结论③不正确;

$|\cos \pi x| \leq 1$, 当 $\pi x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 时取等号, 即 $x = k (k \in \mathbb{Z})$ 时取等号,

因为 $x^2 + 1 \geq 1$, 当且仅当 $x = 0$ 时取等号, 所以有 $0 < \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$, 当且仅当 $x = 0$ 时取等号,

所以有 $\frac{|\cos \pi x|}{x^2 + 1} \leq 1$, 当且仅当 $x = 0$ 时取等号, 因此有 $f(x) = \frac{\cos \pi x}{x^2 + 1} \leq 1$, 所以结论④正确,

故答案为: ①②④

【点睛】关键点睛: 利用函数极值与最值的关系进行判断是解题的关键.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. 设函数 $f(x) = 2\sin x \cos x + A\cos 2x$ ($A \in \mathbf{R}$). 已知存在 A 使得 $f(x)$ 同时满足下列三个条件中的两个: 条件①:

$f(0) = 0$; 条件②: $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$; 条件③: $x = \frac{\pi}{8}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴.

(1) 请写出 $f(x)$ 满足的两个条件, 并说明理由;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(0, m)$ 上有且只有一个零点, 求 m 的取值范围.

【答案】 (1) ②③, 理由见解析

(2) $\left(\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right]$

【解析】

分析】 (1) 首先分析①②可得 $A = 0, 1, -1$, 逐个验证条件③即可得结果;

(2) 由 (1) 得函数的解析式, 通过 x 的范围求出 $2x + \frac{\pi}{4}$ 的范围, 结合正弦函数的性质列出关于 m 的不等式即可得解.

【小问 1 详解】

函数 $f(x) = 2\sin x \cos x + A\cos 2x = \sin 2x + A\cos 2x = \sqrt{1+A^2} \sin(2x + \varphi)$,

其中 $\left(\tan \varphi = A, \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$,

对于条件①: 若 $f(0) = 0$, 则 $A = 0$,

对于条件②: $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$, 则 $\sqrt{1+A^2} = \sqrt{2}$, 得 $A = \pm 1$, ①②不能同时成立,

当 $A = 0$ 时, $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq \pm 1$, 即不满足条件③;

当 $A = 1$ 时, $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}$, 即满足条件③;

当 $A = -1$ 时, $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$, 即不满足条件③;

综上可得, 存在 $A = 1$ 满足条件②③.

【小问 2 详解】

由 (1) 得 $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$,

当 $0 < x < m$ 时, $\frac{\pi}{4} < 2x + \frac{\pi}{4} < 2m + \frac{\pi}{4}$,

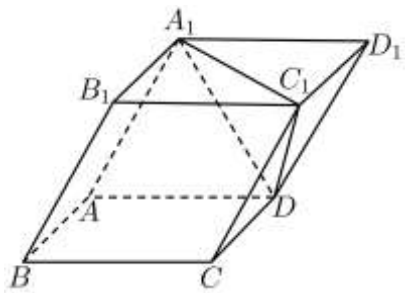
由于 $f(x)$ 在区间 $(0, m)$ 上有且只有一个零点,

则 $\pi < 2m + \frac{\pi}{4} \leq 2\pi$, 解得 $\frac{3\pi}{8} < m \leq \frac{7\pi}{8}$,

即 m 的取值范围是 $\left(\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right]$.

17. 如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，平面 $A_1ADD_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AD=2$ ，

$$AA_1 = A_1D.$$



(1) 求证： $A_1D \perp AB$ ；

(2) 若直线 AB 与平面 A_1DC_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$ ，求 AA_1 的长度.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $AA_1 = 2$

【解析】

【分析】(1) 利用面面垂直的性质可证得 $AB \perp$ 平面 AA_1D_1D ，再利用线面垂直的性质可证得结论成立；

(2) 取 AD 的中点 O ，连接 A_1O ，证明出 $A_1O \perp$ 平面 $ABCD$ ，以点 O 为坐标原点， $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AD}$ 、 $\overrightarrow{OA_1}$ 的方向分别为 x 、 y 、 z 的正方向建立空间直角坐标系，设 $A_1O = a$ ，其中 $a > 0$ ，利用空间向量法可得出关于 a 的方程，求出 a 的值，即可求得棱 AA_1 的长.

【小问 1 详解】

证明：因为四边形 $ABCD$ 为正方形，则 $AB \perp AD$ ，

因为平面 $A_1ADD_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $A_1ADD_1 \cap$ 平面 $ABCD = AD$ ， $AB \subset$ 平面 $ABCD$ ，

$\therefore AB \perp$ 平面 AA_1D_1D ，

$\therefore A_1D \subset$ 平面 AA_1D_1D ，所以， $AB \perp A_1D$.

【小问 2 详解】

解：取 AD 的中点 O ，连接 A_1O ，

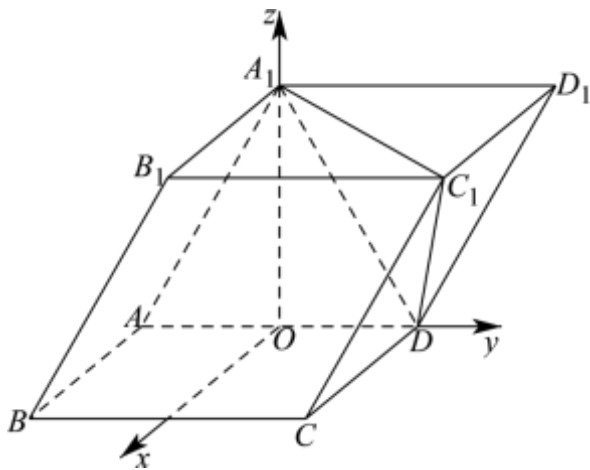
$\because AA_1 = A_1D$ ， O 为 AD 的中点，则 $A_1O \perp AD$ ，

因为平面 $AA_1D_1D \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $AA_1D_1D \cap$ 平面 $ABCD = AD$ ， $A_1O \subset$ 平面 AA_1D_1D ，

所以， $A_1O \perp$ 平面 $ABCD$ ，

以点 O 为坐标原点， $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AD}$ 、 $\overrightarrow{OA_1}$ 的方向分别为 x 、 y 、 z 的正方向建立如下图所示的空间直角坐标系，设

$A_1O = a$ ，其中 $a > 0$ ，



则 $A(0, -1, 0)$ 、 $B(2, -1, 0)$ 、 $A_1(0, 0, a)$ 、 $C_1(2, 2, a)$ 、 $D(0, 1, 0)$,

$$\overrightarrow{AB} = (2, 0, 0), \quad \overrightarrow{AC_1} = (2, 2, 0), \quad \overrightarrow{AD} = (0, 1, -a),$$

设平面 A_1C_1D 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 2x + 2y = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AD} = y - az = 0 \end{cases}$, 取 $x = a$, 则 $\vec{m} = (a, -a, -1)$,

$$\text{由题意可得 } |\cos \langle \overrightarrow{AB}, \vec{m} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{m}|}{|\overrightarrow{AB}| |\vec{m}|} = \frac{2a}{2\sqrt{2a^2 + 1}} = \frac{a}{\sqrt{2a^2 + 1}} = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

$\because a > 0$, 解得 $a = \sqrt{3}$, 则 $|\overrightarrow{AA_1}| = \sqrt{1 + a^2} = 2$.

18. 《黄帝内经》中十二时辰养生法认为：子时的睡眠对一天至关重要（子时是指23点到次日凌晨1点）.相关数据表明，入睡时间越晚，沉睡时间越少，睡眠指数也就越低.根据某次的抽样数据，对早睡群体和晚睡群体睡眠指数的统计如下表：

组别	睡眠指数	早睡人群占比	晚睡人群占比
1	$[0, 51)$	0.1%	9.2%
2	$[51, 66)$	11.1%	47.4%
3	$[66, 76)$	34.6%	31.6%
4	$[76, 90)$	48.6%	11.8%
5	$[90, 100]$	5.6%	0.0%

注：早睡人群为23:00前入睡的人群，晚睡人群为01:00后入睡的人群.

- 根据表中数据，估计早睡人群睡眠指数25%分位数与晚睡人群睡眠指数25%分位数分别在第几组？
- 据统计，睡眠指数得分在区间 $[76, 90)$ 内的人群中，早睡人群约占80%.从睡眠指数得分在区间 $[76, 90)$ 内的人群中随着抽取3人，以 X 表示这3人中属于早睡人群的人数，求 X 的分布列与数学期望 $E(X)$ ；

(3) 根据表中数据, 有人认为, 早睡人群的睡眠指数平均值一定落在区间 $[76, 90)$. 试判断这种说法是否正确, 并说明理由.

【答案】(1) 答案见解析

(2) 分布列答案见解析, $E(X) = \frac{12}{5}$

(3) 这种说法不正确, 理由见解析

【解析】

【分析】(1) 根据百分位数的定义判断可得出结论;

(2) 分析可知 $X \sim B\left(3, \frac{4}{5}\right)$, 利用二项分布可得出随机变量 X 的分布列, 利用二项分布的期望公式可求得 $E(X)$ 的值;

(3) 取第1组的均值为0, 第2组的均值为51, 第3组的均值为66, 第4组的均值为76, 第5组的均值为91, 结合平均数公式判断可得出结论.

【小问1详解】

解: 早睡人群睡眠指数25%分位数估计在第3组, 晚睡人群睡眠指数25%分位数估计在第2组.

【小问2详解】

解: 由题意可知, $X \sim B\left(3, \frac{4}{5}\right)$, 随机变量 X 的可能取值有0、1、2、3,

$$P(X=0) = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}, \quad P(X=1) = C_3^1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{125},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{48}{125}, \quad P(X=3) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125},$$

所以, 随机变量 X 的分布列如下表所示:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{64}{125}$

$$E(X) = 3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5}.$$

【小问3详解】

解: 这种说法不正确, 理由如下:

当第1组的均值为0, 第2组的均值为51, 第3组的均值为66, 第4组的均值为76, 第5组的均值为91, 则睡眠指数的均值为 $0 \times 0.001 + 51 \times 0.111 + 66 \times 0.346 + 76 \times 0.486 + 91 \times 0.056$

$$< 0 + 51 \times 0.12 + 66 \times 0.35 + 76 \times 0.5 + 91 \times 0.06 = 72.68 < 76.$$

19. 已知函数 $f(x) = e^x(ax^2 - x + 1)$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线的方程;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值, 求 a 的取值范围;

(3) 若函数 $f(x)$ 存在最小值, 直接写出 a 的取值范围.

【答案】 (1) $y=1$

(2) $(-\infty, \frac{1}{2})$

(3) $(0, \frac{1}{4}]$

【解析】

【分析】 (1) 先求导后求出切线的斜率 $f'(0)=0$, 然后求出直线上该点的坐标即可写出直线方程;

(2) 根据函数的单调性和最值分类讨论;

(3) 分情况讨论, 根据函数的单调性和极限求解.

【小问 1 详解】

解: 由题意得:

$$f'(x) = e^x(ax^2 - x + 1 + 2ax - 1) = e^x(ax^2 + 2ax - x)$$

$$f'(0) = 0, \quad f(0) = 1$$

故曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线的方程 $y = 1$.

【小问 2 详解】

由 (1) 得要使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值, $f'(x)$ 在 $x < 0$ 时应该 $f'(x) > 0$, $f'(x)$ 在 $x > 0$ 时应该

$$f'(x) < 0,$$

$$\therefore f'(x) = xe^x(ax + 2a - 1)$$

故① $a < 0$ 且 $\frac{1-2a}{a} < 0$, 解得 $a < 0$

② $a > 0$ 且 $\frac{1-2a}{a} > 0$, 解得 $0 < a < \frac{1}{2}$

当 $a = 0$ 时, $f'(x) = -xe^x$, 满足题意;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) = \frac{1}{2}x^2e^x$, 不满足题意;

综上: a 的取值范围为 $(-\infty, \frac{1}{2})$.

【小问 3 详解】

可以分三种情况讨论: ① $a \leq 0$ ② $0 < a < \frac{1}{2}$ ③ $a \geq \frac{1}{2}$

若 $a \leq 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1-2a}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1-2a}{a}, 0)$ 单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 无最小值;

若 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 当 $x < 0$ 时, x 趋向 $-\infty$ 时, $f(x)$ 趋向于 0; 当 $x > 0$, 要使函数取得存在最小值

$f\left(\frac{1-2a}{a}\right) = e^{\frac{1-2a}{a}} \left[a\left(\frac{1-2a}{a}\right)^2 - \frac{1-2a}{a} + 1 \right] = ae^{\frac{1-2a}{a}} (4a-1) \leq 0$, 解得 $0 < a \leq \frac{1}{4}$, 故 $x = \frac{1-2a}{a}$ 处取得最小值, 故 a 的取值范围 $\left(0, \frac{1}{4}\right]$.

若 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 x 趋向 $-\infty$ 时, $f(x)$ 趋向于 0, 又 $f(0) = 1$ 故无最小值;

综上所述函数 $f(x)$ 存在最小值, a 的取值范围 $\left(0, \frac{1}{4}\right]$.

20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的下顶点 A 和右顶点 B 都在直线 $l_1: y = \frac{1}{2}(x-2)$ 上.

(1) 求椭圆方程及其离心率;

(2) 不经过点 B 的直线 $l_2: y = kx + m$ 交椭圆 C 于两点 P, Q , 过点 P 作 x 轴的垂线交 l_1 于点 D , 点 P 关于点 D 的对称点为 E . 若 E, B, Q 三点共线, 求证: 直线 l_2 经过定点.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) 证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 求出顶点坐标后可求椭圆方程和离心率;

(2) 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 则可用此两点坐标表示 E , 根据三点共线可得

$x_1 y_2 + x_2 y_1 = 2(y_1 + y_2) + x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4$, 利用点在直线可得

$(2k-1)x_1 x_2 + (m-2k+2)(x_1 + x_2) - 4m - 4 = 0$, 再联立直线方程和椭圆方程, 消元后利用韦达定理可得定点.

【小问 1 详解】

因为下顶点 A 和右顶点 B 都在直线 $l_1: y = \frac{1}{2}(x-2)$ 上,

故 $A(0, -1), B(2, 0)$, 故椭圆方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

其离心率为 $e = \frac{\sqrt{4-1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

小问 2 详解】

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 则 $x_1 \neq 2, x_2 \neq 2$.

则 $D\left(x_1, \frac{1}{2}(x_1-2)\right)$, 故 $E(x_1, x_1 - y_1 - 2)$,

因为 E, B, Q 三点共线, 故 $\frac{y_2}{x_2-2} = \frac{x_1 - y_1 - 2}{x_1 - 2}$, 整理得到:

$$x_1 y_2 + x_2 y_1 = 2(y_1 + y_2) + x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4,$$

$$\text{即 } (2k-1)x_1 x_2 + (m-2k+2)(x_1 + x_2) - 4m - 4 = 0.$$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = kx + m \end{cases} \text{ 可得 } (1+4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0,$$

$$\text{故 } \Delta = 16(4k^2 + 1 - m^2) > 0 \text{ 且 } x_1 + x_2 = -\frac{8km}{1+4k^2}, x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 4}{1+4k^2},$$

$$\text{故 } (2k-1)\frac{4m^2 - 4}{1+4k^2} - (m-2k+2)\frac{8km}{1+4k^2} - 4m - 4 = 0,$$

$$\text{整理得到: } (m+2k)(m+2k+1) = 0,$$

若 $m = -2k$, 则 $l_2: y = kx - 2k$, 故 l_2 过 B , 与题设矛盾;

若 $m = -2k - 1$, 则 $l_2: y = kx - 2k - 1$, 故 l_2 过定点 $(2, -1)$.

21. 设 m 为正整数, 若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_{ik+i}| = |a_{ik} + i| (i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots)$, 则称 $\{a_n\}$ 为 P_m 数列.

(1) 数列 $\{n\}$ 是否为 P_1 数列? 说明理由;

(2) 已知 $a_n = \begin{cases} s, n \text{ 为奇数,} \\ t, n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 其中 s, t 为常数. 若数列 $\{a_n\}$ 为 P_2 数列, 求 s, t ;

(3) 已知 P_3 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 < 0$, $a_8 = 2$, $a_{6k} < a_{6k+6} (k=1, 2, \dots)$, 求 a_n .

【答案】(1) 是 P_1 数列, 理由见解析;

(2) $t = -1, s = 0$;

(3) $a_n = n - 6$.

【解析】

【分析】(1) 根据 P_1 数列的性质判断即可;

(2) 根据 P_2 数列的性质, 求出 a_1, a_2, a_3 即可;

(3) 根据 P_3 数列的性质, 利用所给的条件, 合理演绎即可.

【小问 1 详解】

$$\because a_n = a_{1 \times (n-1) + 1} = (n-1) + 1 = a_{1 \times (n-1)} + 1 (n \geq 2), \therefore |a_{1 \times (n-1) + 1}| = |a_{1 \times (n-1)} + 1|,$$

符合 P_1 的定义, 故数列 $a_n = n$ 是 P_1 数列;

【小问 2 详解】

依题意, $a_2 = t$, $a_1 = a_3 = s$,

因为 a_n 是 P_2 数列, $|a_2| = |a_{1 \times 1 + 1}| = |a_1 + 1| = |t + 1| = |t|$, $\therefore t = -1$,

$|a_3| = |a_{1 \times 2 + 1}| = |a_2 + 1| = |t + 1| = |s|$, $\therefore s = 0$;

【小问 3 详解】

$\because a_n$ 是 P_3 数列, $\therefore |a_8| = |a_{1 \times 7 + 1}| = |a_7 + 1|$, $|a_8| = |a_{2 \times 3 + 2}| = |a_6 + 2|$,

$\therefore |a_7 + 1| = |a_6 + 2| = 2 \dots \textcircled{1}$,

$|a_9| = |a_{1 \times 8 + 1}| = |a_8 + 1| = 3$, $|a_9| = |a_{3 \times 2 + 3}| = |a_6 + 3| = 3 \dots \textcircled{2}$

由 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 得 $a_6 = 0, a_7 = 1$,

$\therefore$ 猜想 a_n 是首项为-5, 公差为 1 的等差数列, 即 $a_n = n - 6$,

检验: $|a_{1 \times k + 1}| = |a_{k+1}| = |k - 6 + 1| = |a_k + 1|$, $\therefore$ 是 P_1 数列;

$|a_{2 \times k + 2}| = |a_{2k+2}| = |2k + 2 - 6| = |2k - 6 + 2| = |a_{2k} + 2|$, $\therefore$ 是 P_2 数列;

$|a_{3 \times k + 3}| = |3k + 3 - 6| = |3k - 6 + 3| = |a_{3k} + 3|$, $\therefore$ 是 P_3 数列,

并且 $a_{6k} = 6k - 6, a_{6k+6} = 6k + 6 - 6 = 6k$, ($k = 1, 2, 3, \dots$),

$\therefore a_{6k} < a_{6k+6}$, $a_1 = -5 < 0$ 符合题意,

故 $a_n = n - 6$,

综上, $a_n = n$ 是 P_1 数列, $t = -1$, $s = 0$, $a_n = n - 6$.

2022 北京高三各区一模试题下载

北京高考资讯公众号搜集整理了【**2022 北京各区高三一模试题&答案**】，想要获取试题资料，关注公众号，点击菜单栏【**高三一模**】—【**一模试题**】，即可**免费获取**全部一模试题及答案，欢迎大家下载练习！

还有更多**一模排名**等信息，考后持续更新！



微信搜一搜

北京高考资讯

