

2023 届新高三开学联考 数学试题

本试卷共 4 页, 22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前, 先将自己的姓名、考号等填写在试题卷和答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答: 用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后, 请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、单选题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $z(1+i)=2$, 则 \bar{z} 的虚部为
 A. 1 B. -1 C. i D. -i
2. 集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 < 0\}$, $B = \{y | y = x^2, x \in A\}$, 则 $A \cap B =$
 A. (1, 4) B. [1, 4) C. (0, 2) D. [0, 2)
3. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别满足 $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FD}$, 若 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{EF} =$
 A. $\frac{5}{12}\mathbf{a} - \frac{3}{4}\mathbf{b}$ B. $\frac{11}{12}\mathbf{a} - \frac{5}{4}\mathbf{b}$
 C. $\frac{13}{12}\mathbf{a} - \frac{3}{4}\mathbf{b}$ D. $\frac{19}{12}\mathbf{a} - \frac{5}{4}\mathbf{b}$
4. 如图所示的三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 面 $ABC, AB \perp BC, PA = AB = BC = 3$, 则该三棱锥的外接球的表面积为



- A. $\frac{27\pi}{2}$ B. 27π C. 54π D. 108π
5. 把函数 $y = \sin 2x (x \in \mathbf{R})$ 的图象上所有的点向左平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 得到的图象所表示的函数是
 A. $y = \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right), x \in \mathbf{R}$
 B. $y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right), x \in \mathbf{R}$
 C. $y = \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right), x \in \mathbf{R}$
 D. $y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right), x \in \mathbf{R}$

考号 _____ 订 _____ 要 _____ 不 _____ 装 _____ 内 _____ 线 _____ 封 _____ 封 _____ 姓名 _____

6. 在 0 至 5 这 6 个数字中任选 3 个不同的数, 组成一个三位数. 若从这些三位数中任取一个, 则该数为三位偶数的概率是
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{13}{25}$ C. $\frac{14}{25}$ D. $\frac{3}{5}$
7. 已知 $f(x) = 2x^2$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, 且对一切 $n \in \mathbb{N}^*$, 有 $a_{n+1} = f(a_n)$, 则
- A. $\{a_n\}$ 是等差数列 B. $\{a_n\}$ 是等比数列
C. $\{\log_2 a_n\}$ 是等比数列 D. $\{\log_2 a_n + 1\}$ 是等比数列
8. 设 $a = \frac{1}{2\sqrt{e}}$, $b = \ln \sqrt{2}$, $c = \frac{4 - \ln 4}{e}$, 则
- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $a < c < b$ D. $b < c < a$

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知 $f(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$, 则
- A. $f'(x) = (x-1)e^x$ B. 曲线 $f(x)$ 在 $(0, 0)$ 处的切线斜率为 1
C. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 D. $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{e}$
10. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, F_1, F_2 是椭圆 C 的两个焦点, M, N 是椭圆 C 上两点, 且 M, N 分别在 x 轴两侧, 则
- A. 若直线 MN 经过原点, 则四边形 MF_1NF_2 为矩形
B. 四边形 MF_1NF_2 的周长为 20
C. $\triangle MF_1F_2$ 的面积的最大值为 12
D. 若直线 MN 经过 F_2 , 则 F_1 到直线 MN 的最大距离为 8
11. 直六棱柱 $ABCDEF - A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 中, 底面是边长为 2 的正六边形, 侧棱 $AA_1 = 2$, 点 O 是底面 $ABCDEF$ 的中心, 则
- A. $OF_1 \parallel$ 平面 A_1CD_1
B. OF_1 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$
C. $BO \perp$ 平面 AA_1D_1D
D. B_1F 与平面 CC_1F_1F 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$
12. 已知直线 $l: y = ax - 1$, 曲线 $C_1: f(x) = e^{x+1} + 1$, 曲线 C_1 关于直线 $y = x + 1$ 对称的曲线 C_2 所对应的函数为 $y = g(x)$, 则以下说法正确的是
- A. 不论 a 为何值, 直线 l 恒过定点 $(0, -1)$
B. $g(x) = \ln x - 1$
C. 若直线 l 与曲线 C_2 相切, 则 $a = 1$
D. 若直线 l 上有两个关于直线 $y = x + 1$ 对称的点在曲线 C_1 上, 则 $0 < a < 1$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $(x - \frac{2}{x})^8$ 的展开式中的常数项为 _____.
14. 过点 $P(2, 2)$ 作圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的两条切线, 切点分别为 A, B , 则直线 AB 的方程为 _____.
15. “中国剩余定理”又称“孙子定理”, 最早可见于中国南北朝时期的数学著作《孙子算经》卷下第二十六题, 叫做“物不知数”, 原文如下: 今有物不知其数, 三三数之剩二, 五五数之剩三, 七七数之剩二, 问物几何. 现有这样一个相关的问题: 被 3 除余 2 且被 5 除余 3 的正整数按照从小到大的顺序排成一列, 构成数列 $\{a_n\}$, 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $\frac{S_n + 120}{n}$ 的最小值为 _____.
16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$, F_1, F_2 是双曲线 C 的左、右焦点, M 是双曲线 C 右支上一点, l 是 $\angle F_1MF_2$ 的平分线, 过 F_2 作 l 的垂线, 垂足为 P , 则点 P 的轨迹方程为 _____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出必要的文字说明,证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, 且 $S_{n+1} = 4a_n + 1$, $b_n = \frac{a_n}{2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

- (1) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;
- (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

18. (本小题满分 12 分)

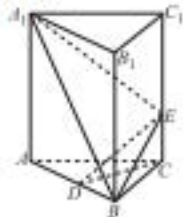
已知锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对边为 a, b, c , 且 $\frac{\tan B + \tan C + \sqrt{3}}{\tan B \tan C} = \sqrt{3}$.

- (1) 求角 A ;
- (2) 若 $a = 4$, 求 $b + c$ 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

如图所示, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, $AA_1 = 4$, D 是 AB 的中点, E 是 CC_1 上一点.

- (1) 求证: 平面 $CDE \perp$ 平面 AA_1B_1B ;
- (2) 若 $CD \parallel$ 平面 A_1BE , 求平面 A_1BE 与平面 ABC 所成的锐二面角的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

甲、乙两人进行下象棋比赛(没有平局),采用“五局三胜”制.已知在每局比赛中,甲获胜的概率为 $p, 0 < p < 1$.

(1) 设甲以 3:1 获胜的概率为 $f(p)$, 求 $f(p)$ 的最大值;

(2) 记(1)中, $f(p)$ 取得最大值时 p 的值为 p_0 , 以 p_0 作为 p 的值, 用 X 表示甲、乙两人比赛的局数, 求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$.

21. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C: x^2 = 2px (p > 0)$ 的准线上一点 $E(-1, t)$, 直线 l 过抛物线 C 的焦点 F , 且与抛物线 C 交于不同的两点 A, B .

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 设直线 EA, EF, EB 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 求证: $k_1 + k_3 = 2k_2$.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{k}{x+1}, x > 0$.

(1) 当 $k=4$ 时, 比较 $f(x)$ 与 2 的大小;

(2) 求证: $\frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \dots + \frac{2}{2n+1} < \ln(n+1), n \in \mathbb{N}^*$.

2023 届新高三开学联考

数学参考答案及评分细则

一、单选题

1. A 【解析】由 $z(1+i)=2$, 得 $z=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{1^2-i^2}=1-i$, 从而 $\bar{z}=1+i$, 所以 \bar{z} 的虚部为 1. 故选 A.

2. D 【解析】因为 $A=\{x|-1<x<2\}$, $B=\{y|0\leq y<4\}$, 所以 $A\cap B=\{x|0\leq x<2\}$. 故选 D.

3. A 【解析】 $\vec{EF}=\vec{AF}-\vec{AE}=(\vec{AB}+\vec{BF})-(\vec{AD}+\vec{DE})=\left[a+\frac{1}{4}(b-a)\right]-\left(b+\frac{1}{3}a\right)=\frac{5}{12}a-\frac{3}{4}b$. 故选 A.

4. B 【解析】将三棱锥补成正方体, 易知该三棱锥的外接球即为正方体的外接球, 所以外接球的半径 R 满足 $(2R)^2=PA^2+AB^2+BC^2=27$, 即 $R^2=\frac{27}{4}$, 所以外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=27\pi$. 故选 B.

5. C 【解析】把函数 $y=\sin 2x(x\in\mathbf{R})$ 的图象上所有的点向左平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 所得图象所表示的函数是 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)(x\in\mathbf{R})$, 再把 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)(x\in\mathbf{R})$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍(纵坐标不变), 得到的图象所表示的函数是 $y=\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)(x\in\mathbf{R})$. 故选 C.

6. B 【解析】在 0 至 5 这 6 个数字中任选 3 个不同的数, 共可组成 $n=A_6^3+A_6^2\times 2=100$ 个三位数, 其中共有 $m=A_5^2+(A_5^2+A_5^1)\times 2=52$ 个偶数, 由古典概型概率计算公式有 $p=\frac{m}{n}=\frac{52}{100}=\frac{13}{25}$. 故选 B.

7. D 【解析】方法 1: 由题意知 $a_{n+1}=2a_n^2$, 所以

$\log_2 a_{n+1}=1+2\log_2 a_n$, 所以 $\log_2 a_{n+1}+1=2(\log_2 a_n+1)$, $n\in\mathbf{N}^*$, 所以 $\{\log_2 a_n+1\}$ 是等比数列, 故选 D; 方法 2: 因为 $a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n^2$, 所以 $a_2=2^3$, $a_3=2^7$, $a_4=2^{15}$, $a_5=2^{31}$, 猜想 $a_n=2^{2^n-1}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 所以 $\log_2 a_n+1=2^n$, 所以 $\{\log_2 a_n+1\}$ 是等比数列. 故选 D.

8. A 【解析】设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x\in(0,+\infty)$, 因为 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, 令 $f'(x)>0$, 得 $0<x<e$; 令 $f'(x)<0$, 得 $x>e$. 所以 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 而 $a=\frac{1}{2\sqrt{e}}=f(\sqrt{e})$, $b=\ln 2^{\frac{1}{2}}=\frac{\ln 2}{2}=f(2)$, $c=\frac{\ln 4}{4}=f(4)$, $c=\frac{4-\ln 4}{e^2}=\frac{2-\ln 2}{\frac{e^2}{2}}=\frac{\ln \frac{e^2}{2}}{\frac{e^2}{2}}=f\left(\frac{e^2}{2}\right)$, 因为 $0<\sqrt{e}<2<e<\frac{e^2}{2}<4$, 所以 $a<b<c$. 故选 A.

二、多选题

9. BCD 【解析】选项 A: 因为 $f(x)=xe^x$, 所以 $f'(x)=(x+1)e^x$, 故不正确; 选项 B: 曲线 $f(x)$ 在 $(0, 0)$ 处的切线斜率为 $f'(0)=1\times e^0=1$, 故正确; 选项 C: 令 $f'(x)=(x+1)e^x>0$, 解得 $x>-1$, 所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-1, +\infty)$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故正确; 选项 D: 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 有最小值 $f(-1)=-\frac{1}{e}$, 故正确. 故选 BCD.

10. BC 【解析】选项 A: 若直线 MN 经过原点, 易知四边形 MF_1NF_2 为平行四边形, 因为 $|MN|$ 不一定与

$|F_1F_2|$ 相等, 所以 MF_1NF_2 不一定是矩形, 故不正确; 选项 B: 四边形 MF_1NF_2 的周长为 $4a=20$, 故正确; 选项 C: $\triangle MF_1F_2$ 的面积的最大值为 $\frac{1}{2} \times 2c \times b = 3 \times 4 = 12$, 故正确; 选项 D: 若直线 MN 经过 F_2 , 则 F_1 到直线 MN 的最大距离为 $|F_1F_2| = 2c = 6$, 故不正确. 故选 BC.

11. ABD 【解析】选项 A: 记 $A_1D_1 \cap C_1F_1 = O_1$, 连结 CO_1 , 易得 $OF_1 \parallel CO_1$, 从而 $OF_1 \parallel$ 平面 A_1CD , 故正确; 选项 B: 因为 $OF_1 \parallel CO_1$, 所以 OF_1 与 BC 所成角即为 $\angle BCO_1$ (或其补角), 易得 $CO_1 = 2\sqrt{2}$, $BO_1 = 2\sqrt{2}$, $BC = 2$, 由余弦定理, 得 $\cos \angle BCO_1 = \frac{BC^2 + CO_1^2 - BO_1^2}{2 \times BC \times CO_1} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 故正确; 选项 C: 因为 $\angle BOA = 60^\circ$, 所以 BO 不与 AO 垂直, 所以 BO 不与平面 AA_1D_1D 垂直, 故不正确; 选项 D: 取 C_1O_1 中点 H , 连结 B_1H, FH , 易证 $B_1H \perp$ 面 CC_1F_1F , 所以 $\angle B_1FH$ 是 B_1F 与平面 CC_1F_1F 所成的角, 在 $Rt\triangle B_1HF$ 中, $B_1H = \sqrt{3}$, $FH = \sqrt{13}$, $B_1F = 4$, 所以 $\sin \angle B_1FH = \frac{B_1H}{B_1F} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 故正确. 故选 ABD.

12. ACD 【解析】选项 A: 直线 $l: y = ax - 1$ 中, 令 $x = 0$, 得 $y = -1$, 与 a 无关, 故正确; 选项 B: 设 $M(x, y)$ 是曲线 C_1 上任意一点, M 关于直线 $y = x + 1$ 的对称点为 $M'(x', y')$, 则 $\begin{cases} x = y' - 1 \\ y = x' + 1 \end{cases}$, 所以 $x' + 1 = e^{y'-1+1} + 1$, 即 $x' = e^{y'}$, 所以 $y' = \ln x'$, 从而 $g(x) = \ln x$, 故不正确; 选项 C: 由 $g(x) = \ln x$, 得 $g'(x) = \frac{1}{x}$, 设切点为 (x_0, y_0) , 则切线斜率 $a = \frac{1}{x_0} = \frac{\ln x_0 + 1}{x_0}$, 所以 $x_0 = 1$, 从而 $a = 1$, 故正确; 选项 D: 直线 l 上有两个关于直线 $y = x + 1$ 对称的点在曲线

C_1 上, 等价于直线 l 与曲线 C_2 有两个不同的交点, 方程 $ax - 1 = \ln x$, 即 $a = \frac{\ln x + 1}{x}$ 有两个解, 设函数 $h(x) = \frac{\ln x + 1}{x}, x > 0, h'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$, 令 $h'(x) = 0$, 解得 $x = 1$, 所以函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 单调递减, 所以 $h(x)_{\max} = h(1) = 1$, 又当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow 0$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $h(x) \rightarrow -\infty$, 所以 $a \in (0, 1)$, 故正确. 故选 ACD.

三、填空题

13. 1 120 【解析】因为 $(x - \frac{2}{x})^8$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_8^k \cdot x^{8-k} \cdot (-\frac{2}{x})^k = C_8^k \cdot (-2)^k \cdot x^{8-2k}$, 令 $8 - 2k = 0$, 得 $k = 4$, 所以 $(x - \frac{2}{x})^8$ 的展开式的常数项为 $T_5 = C_8^4 \cdot (-2)^4 = 1 120$.

14. $x + y - 2 = 0$ 【解析】方法 1: 画图易得直线 AB 的方程为 $x + y - 2 = 0$; 方法 2: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则由 $\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 4 \\ \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_1 - 2}{x_1 - 2} = -1 \end{cases}$, 可得 $x_1 + y_1 = 2$, 同理可得 $x_2 + y_2 = 2$, 所以直线 AB 的方程为 $x + y - 2 = 0$.

15. $\frac{121}{2}$ 【解析】被 3 除余 2 且被 5 除余 3 的正整数按照从小到大的顺序排成一列, 构成首项为 8, 公差为 $3 \times 5 = 15$ 的等差数列, 所以 $a_n = 8 + 15 \times (n - 1) = 15n - 7$, $S_n = 8n + \frac{n(n-1)}{2} \times 15 = \frac{15}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$, 从而 $\frac{S_n + 120}{n} = \frac{15n}{2} + \frac{120}{n} + \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{15n}{2} \times \frac{120}{n}} + \frac{1}{2} = \frac{121}{2}$, 当且仅当 $\frac{15n}{2} = \frac{120}{n}$ 即 $n = 4$ 时, 等号成立, 所以 $\frac{S_n + 120}{n}$ 的最小值为 $\frac{121}{2}$.

16. $x^2 + y^2 = 4 (x > 0)$ 【解析】延长 F_2P , 交 F_1M 于 Q , 因为 $\angle PMF_2 = \angle PMQ$, $\angle MPF_2 = \angle MPQ$, $|MP| = |MP|$, 所以 $\triangle MPF_2 \cong \triangle MPQ$, 所以 $|MF_2| = |MQ|$, 所以 $|QF_1| = |MF_1| - |MQ| = |MF_1| - |MF_2|$, 因为 M 是双曲线 C 右支上一点, 所以 $|QF_1| = 2a = 4$, 又因为 P 是 QF_2 的中点, O 是 F_1F_2 的中点, 所以 $|PO| = \frac{1}{2}|QF_1| = 2$, 所以 P 的轨迹是以 O 为圆心, 半径为 2 的圆的一部分, 所以点 P 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 = 4 (x > 0)$.

四、解答题

17. 解: (1) 因为 $S_{n+1} = 4a_n + 1, n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $S_n = 4a_{n-1} + 1, n \geq 2$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$, 两式相减, 得 $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}$, (2分)

所以 $a_{n+1} + 4a_{n-1} = 4a_n$, 所以 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} = 2 \times \frac{a_n}{2^n}$, 即

$b_{n+1} + b_{n-1} = 2b_n (n \geq 2$ 且 $n \in \mathbf{N}^*)$, 所以数列 $\{b_n\}$ 是等差数列. (5分)

(2) 因为 $a_1 = 1, a_1 + a_2 = S_2 = 4a_1 + 1 = 5$, 所以 $a_2 = 4$, 由(1)知数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 公差为 $d = \frac{a_2}{2^2} - \frac{a_1}{2^1}$

$= \frac{1}{2}$, 所以 $b_n = \frac{1}{2} + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$, (8分)

所以 $a_n = \frac{n}{2} \times 2^n = n \times 2^{n-1}, n \in \mathbf{N}^*$, (9分)

所以当 $n \geq 2$ 时, $S_n = 4a_{n-1} + 1 = 4 \times (n-1) \times 2^{n-2} + 1 = (n-1) \times 2^n + 1$, 当 $n = 1$ 时, 等式也成立, 所以 $S_n = (n-1) \times 2^n + 1, n \in \mathbf{N}^*$. (10分)

18. 解: (1) 因为 $\frac{\tan B + \tan C + \sqrt{3}}{\tan B \tan C} = \sqrt{3}$, 所以 $\tan B +$

$\tan C + \sqrt{3} = \sqrt{3} \tan B \tan C$,

所以 $\tan B + \tan C = \sqrt{3} (\tan B \tan C - 1)$, 从而

$\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} = -\sqrt{3}$,

即 $\tan(B+C) = -\sqrt{3}$, (3分)

所以 $\tan A = \sqrt{3}$, 因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

(4分)

(2) 因为 $a = 4, A = \frac{\pi}{3}$, 由正弦定理, 有 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$= \frac{a}{\sin A} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, (5分)

所以 $b = \frac{8\sqrt{3}}{3} \sin B, c = \frac{8\sqrt{3}}{3} \sin C = \frac{8\sqrt{3}}{3} \sin(\frac{2\pi}{3} - B)$

$= \frac{8\sqrt{3}}{3} (\frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B) = 4 \cos B + \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin B$,

(7分)

所以 $b+c = 4\sqrt{3} \sin B + 4 \cos B = 8 \sin(B + \frac{\pi}{6})$,

(9分)

又因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,

所以 $\begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 即 $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{\pi}{3} < B + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$, (10分)

$\frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}$, (10分)

所以 $\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin(B + \frac{\pi}{6}) \leq 1$, 从而 $b+c$ 的取值范围为

$(4\sqrt{3}, 8]$. (12分)

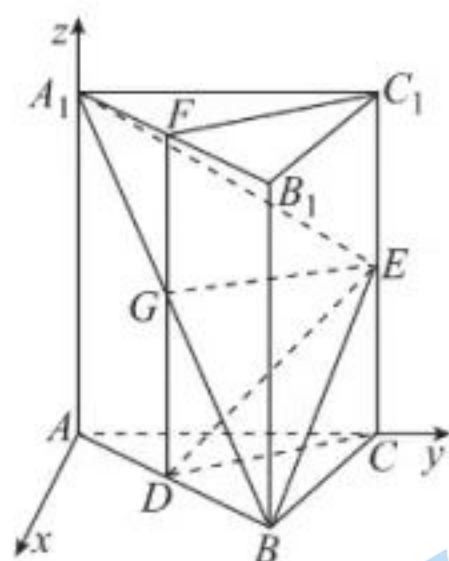
19. 解: (1) 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 因为 $CD \subset$ 平面 ABC , 所以 $AA_1 \perp CD$, 因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形, D 是 AB 的中点, 所以 $AB \perp CD$,

因为 $AA_1 \cap AB = A$, 所以 $CD \perp$ 平面 AA_1B_1B , 又因为 $CD \subset$ 平面 CDE , 所以平面 $CDE \perp$ 平面 AA_1B_1B . (4分)

(2) 取 A_1B_1 中点 F , 连接 C_1F, DF , 记 $DF \cap A_1B = G$, 则 G 是 DF 中点, 连接 GE , 则平面 $CDFC_1 \cap$ 平面 $A_1BE = GE$, 因为 $CD \parallel$ 平面 $A_1BE, CD \subset$ 平面 $CDFC_1$, 所以 $CD \parallel GE$, 因为 G 是 DF 中点, 所以

E 是 CC_1 中点. (5分)

以 A 为原点建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(0,0,0), B(\sqrt{3},1,0), E(0,2,2), A_1(0,0,4)$, 所以 $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,4), \overrightarrow{A_1B}=(\sqrt{3},1,-4), \overrightarrow{A_1E}=(0,2,-2)$, (7分)

设平面 A_1BE 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(x,y,z)$, 则 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1B}=0, \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1E}=0$, 所以 $\begin{cases} \sqrt{3}x+y-4z=0 \\ 2y-2z=0 \end{cases}$, 即

$$\begin{cases} x=\sqrt{3}z \\ y=z \end{cases}, \text{ 令 } z=1, \text{ 得 } \mathbf{n}=(\sqrt{3},1,1), \quad (9分)$$

因为 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 所以平面 ABC 的一个法向量为 $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,4)$, (10分)

所以平面 A_1BE 与平面 ABC 所成的锐二面角 θ 的

余弦值为 $\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{AA_1} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AA_1}|}{|\mathbf{n}| \cdot |\overrightarrow{AA_1}|}$

$$= \frac{|\sqrt{3} \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 4|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2 + 1^2} \times \sqrt{0^2 + 0^2 + 4^2}} = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

(12分)

20. 解: (1) 甲以 3:1 获胜, 则前三局中甲胜两局败一局, 第四局甲必须获胜, (1分)

所以 $f(p) = C_3^2 \cdot p^3 \cdot (1-p) = 3p^3 - 3p^4, 0 < p < 1, f'(p) = 9p^2 - 12p^3 = 3p^2(3-4p)$, (3分)

令 $f'(p) = 0$, 得 $p = \frac{3}{4}$; 令 $f'(p) > 0$, 得 $0 < p < \frac{3}{4}$;

令 $f'(p) < 0$, 得 $\frac{3}{4} < p < 1$.

所以 $f(p)$ 在 $(0, \frac{3}{4})$ 上单调递增, 在 $(\frac{3}{4}, 1)$ 上单调递减, 所以当 $p = \frac{3}{4}$ 时, $f(p)$ 取得最大值为 $\frac{81}{256}$.

(6分)

(2) 由(1)知 $p = p_0 = \frac{3}{4}$, 由题意, 知 X 的所有可能取值为 3, 4, 5, 相应的概率为

$$P(X=3) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} + \frac{1}{64} = \frac{7}{16},$$

$$P(X=4) = C_3^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \frac{1}{4} + C_3^1 \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{81}{256} + \frac{9}{256} = \frac{45}{128},$$

$$P(X=5) = C_4^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + C_4^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{81}{512} + \frac{27}{512} = \frac{27}{128}, \quad (9分)$$

所以 X 的分布列为

X	3	4	5
P	$\frac{7}{16}$	$\frac{45}{128}$	$\frac{27}{128}$

(10分)

X 的数学期望 $E(X) = 3 \times \frac{7}{16} + 4 \times \frac{45}{128} + 5 \times \frac{27}{128} = \frac{483}{128}$. (12分)

21. 解: (1) 由题意, 知 $\frac{p}{2} = 1$, 所以 $p = 2$, 所以抛物线 C

的方程为 $y^2 = 4x$. (4分)

(2) 因为直线 l 过抛物线 C 的焦点 $F(1,0)$, 由题意知, 直线 l 斜率不为 0, 所以设 l 的方程为 $x = my + 1$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 联立 $\begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$, 消去 x 得 $y^2 = 4my + 4$,

即 $y^2 - 4my - 4 = 0$, 所以 $\Delta = 16m^2 + 16 > 0$, $y_1 + y_2 = 4m$, $y_1 y_2 = -4$, (7分)

$$\begin{aligned} \text{所以 } k_1 + k_3 &= \frac{y_1 - t}{x_1 + 1} + \frac{y_2 - t}{x_2 + 1} \\ &= \frac{(x_2 + 1)(y_1 - t) + (x_1 + 1)(y_2 - t)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \\ &= \frac{x_2 y_1 + x_1 y_2 - t(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - 2t}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \\ &= \frac{2m y_1 y_2 + (2 - tm)(y_1 + y_2) - 4t}{m^2 y_1 y_2 + 2m(y_1 + y_2) + 4} \\ &= \frac{-8m + (2 - tm) \times 4m - 4t}{-4m^2 + 8m^2 + 4} \\ &= \frac{-4tm^2 - 4t}{4m^2 + 4} = -t \times \frac{4m^2 + 4}{4m^2 + 4} = -t, \end{aligned} \quad (10 \text{分})$$

因为 $E(-1, t)$, $F(1, 0)$, 所以 $k_2 = \frac{0 - t}{1 - (-1)} = -\frac{t}{2}$, (11分)

所以 $k_1 + k_3 = 2k_2$. (12分)

22. 解: (1) 当 $k = 4$ 时, $f(x) = \ln x + \frac{4}{x+1}$, $x \in (0, +\infty)$,

所以 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4x}{x(x+1)^2} =$

$\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又

因为 $f(1) = \ln 1 + \frac{4}{1+1} = 2$, 所以当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < 2$, 当 $x = 1$ 时, $f(x) = 2$, 当 $x > 1$ 时, $f(x) > 2$. (5分)

(2) 由(1)知, 当 $x > 1$ 时, $\ln x + \frac{4}{x+1} > 2$, 即 $\ln x >$

$\frac{2(x-1)}{x+1}$, 令 $x = 1 + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$,

则有 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{2}{2n+1}$, 即 $\frac{2}{2n+1} < \ln \frac{n+1}{n}$, (8分)

所以 $\frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \dots + \frac{2}{2n+1} < \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} +$

$\ln \frac{4}{3} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln\left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1)$,

即 $\frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \dots + \frac{2}{2n+1} < \ln(n+1)$, $n \in \mathbf{N}^*$. (12分)

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯