

2023 北京北师大二附中高一（上）期中

数 学

一、单选题（共 10 小题，每题 4 分，共 40 分）

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 2, 3\}$, $B = \{x \mid x = 2k - 1, k \in \mathbf{N}\}$, 那么 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-1, 0\}$ B. $\{-1, 2\}$ C. $\{0, 3\}$ D. $\{-1, 3\}$

2. 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 3 > 0$ ”的否定为 ()

- A. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 3 < 0$ B. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 3 \leq 0$
C. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 3 < 0$ D. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 3 \leq 0$

3. 已知 $a < b < 0$, 则下列不等式中成立的是 ()

- A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $|a| < |b|$ C. $ab < 0$ D. $ab > b^2$

4. 函数 $y = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$ 的奇偶性是 ()

- A. 奇函数 B. 偶函数
C. 非奇非偶函数 D. 既是奇函数, 又是偶函数

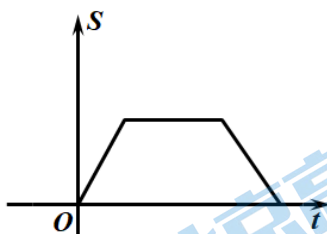
5. 函数 $f(x) = x^3 - x - 5$ 的零点所在的区间是 ()

- A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$
C. $(2, 3)$ D. $(3, 4)$

6. “ $m < \frac{1}{4}$ ”是“一元二次方程 $x^2 + x + m = 0$ ”有实数解的

- A. 充分非必要条件 B. 充分必要条件
C. 必要非充分条件 D. 非充分非必要条件

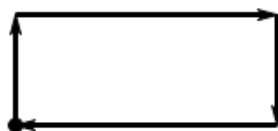
7. 下图是王老师锻炼时所走的离家距离 (S) 与行走时间 (t) 之间的函数关系图, 若用黑点表示王老师家的位置, 则王老师行走的路线可能是 ()

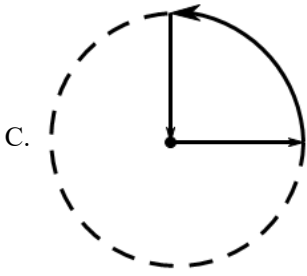


A.



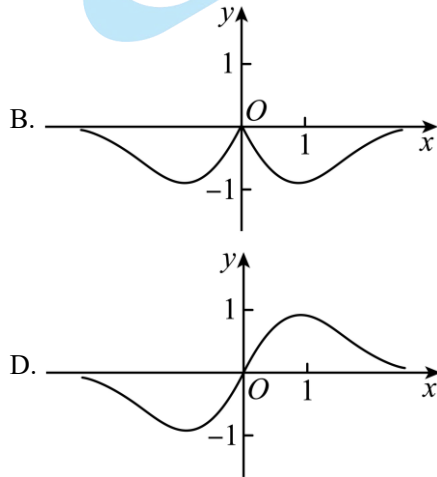
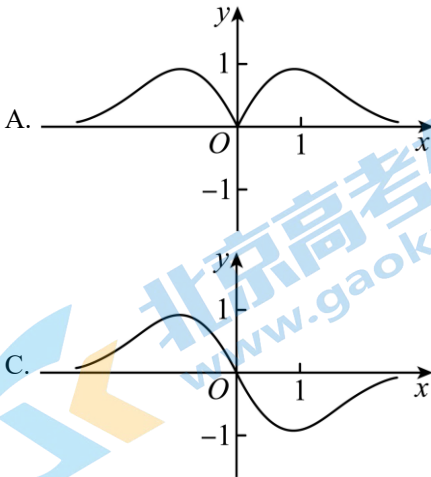
B.





D.

8. 函数 $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ 的图象大致为 ()



9. 设 $f(x)$ 是 R 上的偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 若 $x_1 < 0$ 且 $x_1 + x_2 > 0$, 则 ()

- A. $f(-x_1) > f(-x_2)$ B. $f(-x_1) = f(-x_2)$
 C. $f(-x_1) < f(-x_2)$ D. $f(-x_1)$ 与 $f(-x_2)$ 大小不确定

10. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x+2} - m|x|$ 有三个零点, 则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $m > 1$ B. $0 < m < 1$
 C. $1 < m < 2$ D. $m < -1$

二、填空题 (共 5 小题, 每题 5 分, 共 25 分)

11. 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 的定义域是_____.

12. 函数 $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$ 的值域是_____.

13. 若正实数 x, y 满足: $x + 3y = 1$, 则 xy 的最大值为_____.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x} - 1, & x > 1 \end{cases}$, 则 $f(f(-1)) =$ _____; 若关于 x 的方程 $|f(x)| = k$ 恰有两个不同的解, 则实数 k 的取值范围是_____.

15. 若使集合 $A(k) = \{x | (kx - k^2 - 6)(x - 4) \geq 0, x \in \mathbb{Z}\}$ 中元素个数最少, 则实数 k 的取值范围是_____.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

16. 已知全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ， $B = \{x | 0 < x < 4\}$ 。

(1) 求 $(\complement_U A) \cap B$ ；

(2) 设非空集合 $D = \{x | a < x < 2a + 3, a \in \mathbf{R}\}$ ，若 $D \subseteq \complement_U A$ ，求实数 a 的取值范围。

17. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ ， $x \in [2, 5]$ 。

(1) 判断函数 $f(x)$ 的单调性，并用定义证明你的结论；

(2) 求不等式 $f(m+1) < f(2m-1)$ 的解集。

18. 已知 $y = x^2 - x$ ，且 $x \in (-1, 1)$ 。

(1) 求实数 y 的取值集合 M ；

(2) 设不等式 $(x-a)(x+a-2) < 0$ 的解集为 N ，若 $x \in \mathbf{N}$ 是 $x \in M$ 的必要条件，求 a 的取值范围。

19. 近年来，中美贸易摩擦不断.特别是美国对我国华为的限制.尽管美国对华为极力封锁，百般刁难，并不断加大对各国的施压，拉拢他们抵制华为 5G，然而这并没有让华为却步.华为在 2018 年不仅净利润创下记录，海外增长同样强劲.今年，我国华为某一企业为了进一步增加市场竞争力，计划在 2020 年利用新技术生产某款新手机.通过市场分析，生产此款手机全年需投入固定成本 250 万，每生产 x （千部）手机，需另

投入成本 $R(x)$ 万元，且 $R(x) = \begin{cases} 10x^2 + 100x, & 0 < x < 40 \\ 701x + \frac{10000}{x} - 9450, & x \geq 40 \end{cases}$ ，由市场调研知，每部手机售价 0.7 万元，

且全年生产的手机当年能全部销售完。

(1) 求出 2020 年的利润 $W(x)$ （万元）关于年产量 x （千部）的函数关系式，（利润=销售额—成本）；

(2) 2020 年产量为多少（千部）时，企业所获利润最大？最大利润是多少？

20. 已知函数 $f(x)$ 为二次函数， $f(x)$ 的图象过点 $(0, 2)$ ，对称轴为 $x = -\frac{1}{2}$ ，函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上最小值为

$\frac{7}{4}$ 。

(1) 求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 当 $x \in [m-2, m]$ ， $m \in \mathbf{R}$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值（用 m 表示）；

(3) 若函数 $F(x) = f(x) - ax - 1$ 在 $(0, 3)$ 上只有一个零点，求 a 的取值范围。

21. 设整数集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{100}\}$ ，其中 $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{100} \leq 205$ ，且对于任意

$i, j (1 \leq i \leq j \leq 100)$ ，若 $i + j \in A$ ，则 $a_i + a_j \in A$ 。

(1) 请写出一个满足条件的集合 A ；

- (2) 证明:任意 $x \in \{101, 102, \dots, 200\}, x \notin A$;
- (3) 若 $a_{100} = 205$, 求满足条件的集合 A 的个数.



参考答案

一、单选题（共 10 小题，每题 4 分，共 40 分）

1. 【答案】D

【分析】

根据交集的定义可求 $A \cap B$.

【详解】因为 $B = \{x \mid x = 2k - 1, k \in \mathbf{N}\}$, 故 B 中的元素为大于或等于 -1 的奇数,
故 $A \cap B = \{-1, 3\}$,

故选: D.

2. 【答案】D

【分析】根据题意, 由全称命题的否定是特称命题, 即可得到结果.

【详解】因为命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 3 > 0$ ”, 则其否定为“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 3 \leq 0$ ”

故选: D

3. 【答案】D

【分析】根据不等式的基本性质, 逐一分析四个不等式关系是否恒成立, 可得答案.

【详解】解: $\because a < b < 0, \therefore ab > 0$, 故 C 错误;

两边同除 ab 得: $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 故 A 错误;

$\therefore |a| > |b|$, 故 B 错误;

两边同乘 b 得: $ab > b^2$, 故 D 正确;

故选 D .

【点睛】本题以命题的真假判断与应用为载体, 考查了不等式恒成立, 不等式的基本性质等知识点, 难度中档.

4. 【答案】A

【分析】利用函数的奇偶性定义判定即可.

【详解】由函数解析式可知 $\{x \mid x \neq \pm 1, x \in \mathbf{R}\}$, 即定义域关于原点对称,

又 $f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = -f(x)$,

所以函数 $y = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$ 是奇函数.

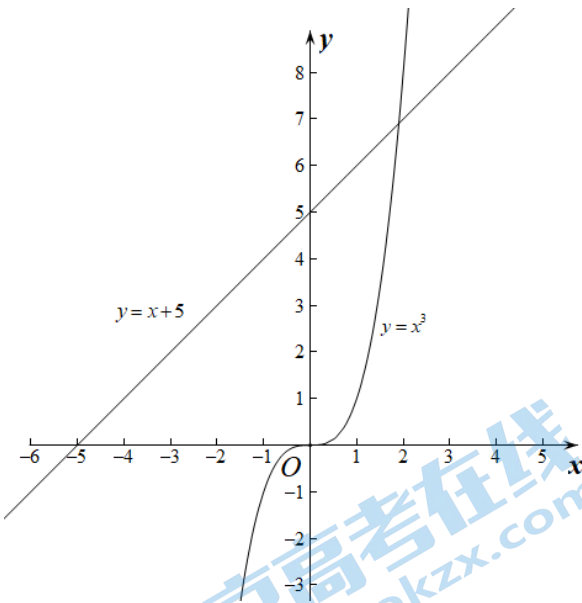
故选: A

5. 【答案】B

【分析】利用转化法, 结合数形结合思想进行判断即可.

【详解】 $f(x) = x^3 - x - 5 = 0 \Rightarrow x^3 = x + 5$

函数 $y = x^3$ 和函数 $y = x + 5$ 在同一直角坐标系内图象如下图所示：



一方面 $f(0) = -5, f(1) = -5, f(2) = 1, f(3) = 19, f(4) = 55,$

$$f(1)f(2) < 0$$

另一方面根据数形结合思想可以判断两个函数图象的交点只有一个，

故选：B

6. 【答案】A

【详解】试题分析：方程 $x^2 + x + m = 0$ 有解，则 $\Delta = 1 - 4m \geq 0 \Rightarrow m \leq \frac{1}{4}$. $m < \frac{1}{4}$ 是 $m \leq \frac{1}{4}$ 的充分不必

要条件. 故 A 正确.

考点：充分必要条件

7. 【答案】C

【分析】根据图象中有一段为水平线段（表示离家的距离一直不变），逐项判断此时对应选项是否满足.

【详解】图象显示有一段时间吴老师离家距离是个定值，故他所走的路程是一段以家为圆心的圆弧，所以 A、B、D 三个选项均不符合，只有选项 C 符合题意.

故选：C.

8. 【答案】D

【分析】先求出函数的定义域和奇偶性排除选项 A 和 B，再利用特殊值即可排除选项 C，进而求解.

【详解】由题意可知：函数 $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ 的定义域为 \mathbf{R} ，

$$\text{又因为 } f(-x) = \frac{-2x}{x^2 + 1} = -\frac{2x}{x^2 + 1} = -f(x),$$

所以函数 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数，故排除选项 A 和 B；

又因为当 $x > 0$ 时，函数 $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} > 0$ ，故排除选项 C，

故选：D.

9. 【答案】A

【分析】

由条件可得 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数，根据条件可得 $0 > x_1 > -x_2$ ，所以 $f(x_1) > f(-x_2)$ ，从而得出答案.

【详解】 $f(x)$ 是 R 上的偶函数，且在 $(0, +\infty)$ 上是减函数

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数

因为 $x_1 < 0$ 且 $x_1 + x_2 > 0$ ，故 $0 > x_1 > -x_2$ ；

所以有 $f(x_1) > f(-x_2)$ ，又因为 $f(-x_1) > f(x_1)$

所以有 $f(-x_1) > f(-x_2)$

故选：A.

10. 【答案】A

【分析】利用常变量分离法，结合数形给思想进行判断即可.

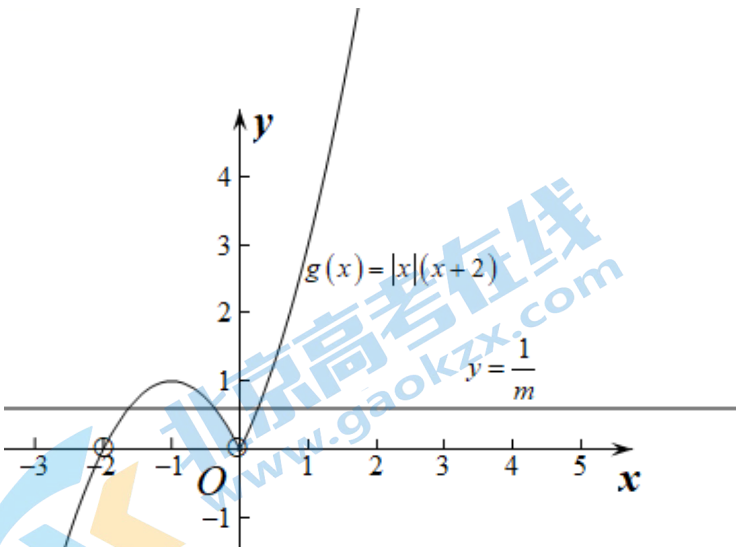
【详解】令 $f(x) = \frac{1}{x+2} - m|x| = 0 \Rightarrow \frac{1}{x+2} = m|x|$ ，显然有 $x \neq 0$ 且 $x \neq -2$ 且 $m \neq 0$ ，

于是有 $\frac{1}{m} = |x|(x+2) = \begin{cases} x(x+2), & x > 0 \\ -x(x+2), & x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \end{cases}$ ，

设 $g(x) = |x|(x+2) = \begin{cases} x(x+2), & x > 0 \\ -x(x+2), & x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \end{cases}$ ，它的图象如下图所示：

因此要想函数 $f(x) = \frac{1}{x+2} - m|x|$ 有三个零点，只需 $0 < \frac{1}{m} < 1 \Rightarrow m > 1$ ，

故选：A



【点睛】方法点睛：解决函数零点个数问题一般的方法就是让函数值为零，然后进行常变量分离，利用数

形结合思想进行求解.

二、填空题（共 5 小题，每题 5 分，共 25 分）

11. 【答案】 $(-\infty, 1)$

【分析】利用二次根式的意义计算即可.

【详解】由题意可知 $1-x > 0 \Rightarrow x < 1$,

即函数的定义域为 $(-\infty, 1)$.

故答案为: $(-\infty, 1)$

12. 【答案】 $(0, 1]$

【分析】根据二次函数的性质求解 $f(x) = x^2 + 2x + 2$ 的范围可得函数 $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$ 的值域

【详解】解: 由 $f(x) = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$, 可得 $f(x)$ 的最小值为 1,

$\therefore y = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$ 的值域为 $(0, 1]$.

故答案为: $(0, 1]$.

【点睛】本题考查了函数值域的求法. 高中函数值域求法有: 1、观察法, 2、配方法, 3、反函数法, 4、判别式法; 5、换元法, 6、数形结合法, 7、不等式法, 8、分离常数法, 9、单调性法, 10、利用导数求函数的值域, 11、最值法, 12、构造法, 13、比例法. 要根据题意选择.

13. 【答案】 $\frac{1}{12}$

【分析】运用基本不等式得出 $x + 3y = 1 \geq 2\sqrt{3xy}$, 化简求得 $xy \leq \frac{1}{12}$ 即可.

【详解】 \because 正实数 x, y 满足: $x + 3y = 1$,

$\therefore x + 3y = 1 \geq 2\sqrt{3xy}$, 化简得出 $xy \leq \frac{1}{12}$,

当且仅当 $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{6}$ 时等号成立.

故答案为 $\frac{1}{12}$

【点睛】本题考查了运用基本不等式求解二元式子的最值问题, 关键是判断、变形得出不等式的条件, 属于容易题.

14. 【答案】 ①. $-\frac{3}{4}$ ②. $(0, 1)$

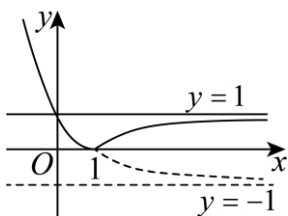
【分析】利用分段函数代入解析式求函数值即可得第一空, 利用函数的单调性结合图象得第二空.

【详解】易知 $f(-1) = 4 \Rightarrow f(f(-1)) = f(4) = -\frac{3}{4}$,

又 $x \leq 1$ 时, $y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ 单调递减, 且 $y_{\min} = 0$,

$x > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$ 时, $y = \frac{1}{x} - 1$ 单调递减, 且 $-1 < y < 0$,

作出函数 $y = |f(x)|$ 的图象如下:



所以方程 $|f(x)| = k$ 有两个不同解即函数 $y = |f(x)|$ 与 $y = k$ 有两个不同交点,

显然 $k \in (0, 1)$.

故答案为: $-\frac{3}{4}; (0, 1)$

15. 【答案】 $(-3, -2)$

【分析】首先讨论 k 的取值, 解不等式; 再由集合 A 的元素个数最少, 推出只有 $k < 0$ 满足, 若集合 A 的

元素个数最少, 由 $k < 0$, 集合 $A = \left\{ x \in \mathbf{Z} \mid k + \frac{6}{k} \leq x \leq 4 \right\}$, 只需求 $k + \frac{6}{k}$ 的最大值即可, 再由集合 A 中

$x \in \mathbf{Z}$, 只需 $-5 < k + \frac{6}{k} < -4$ 即可求解.

【详解】由题知集合 A 内的不等式为 $(kx - k^2 - 6)(x - 4) \geq 0, x \in \mathbf{Z}$, 故

当 $k = 0$ 时, 可得 $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x < 4\}$;

当 $k > 0$ 时, $(kx - k^2 - 6)(x - 4) \geq 0$ 可转化为

$$\begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ kx - k^2 - 6 \geq 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x - 4 \leq 0 \\ kx - k^2 - 6 \leq 0 \end{cases}, \text{ 因为 } 4 < k + \frac{6}{k},$$

所以不等式的解集为 $\{x \mid x \leq 4 \text{ 或 } x \geq k + \frac{6}{k}\}$, 所以 $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \leq 4 \text{ 或 } x \geq k + \frac{6}{k}\}$

当 $k < 0$ 时, 由 $k + \frac{6}{k} < 4$, 所以不等式的解集为 $\left\{ x \mid k + \frac{6}{k} \leq x \leq 4 \right\}$,

所以 $A = \left\{ x \in \mathbf{Z} \mid k + \frac{6}{k} \leq x \leq 4 \right\}$, 此时集合 A 的元素个数为有限个.

综上所述, 当 $k \geq 0$ 时, 集合 A 的元素个数为无限个,

当 $k < 0$ 时, 集合 A 的元素个数为有限个, 故当 $k < 0$ 时, 集合 A 的元素个数最少, 且当 $k + \frac{6}{k}$

的值越大，集合 A 的元素个数越少，

令 $f(k) = k + \frac{6}{k}$ ($k < 0$)，则 $f'(k) = 1 - \frac{6}{k^2}$ ，令 $f'(k) = 0$ 解得 $k = -\sqrt{6}$ ，所以 $f(k)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{6})$ 内

单调递增，在 $(-\sqrt{6}, 0)$ 内单调递减，所以 $f(k)_{\max} = f(-\sqrt{6}) = -2\sqrt{6}$ ，又因为 $x \in \mathbf{Z}$ ，

$-5 < -2\sqrt{6} < -4$ ，所以当 $-5 < k + \frac{6}{k} < -4$ ，即 $-3 < k < -2$ 时，

集合 $A = \left\{ x \in \mathbf{Z} \mid k + \frac{6}{k} \leq x \leq 4 \right\}$ 中元素的个数最少，故 $-3 < k < -2$

故答案为： $(-3, -2)$

【点睛】本题主要考查集合的运算和解不等式，综合性比较强.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

16. 【答案】(1) $\{x \mid 3 \leq x < 4\}$

(2) $(-3, -2] \cup [3, +\infty)$

【分析】(1) 利用一元二次不等式解法化简集合 A，然后利用补集和交集运算求解即可；

(2) 根据集合关系列不等式组求解即可.

【小问 1 详解】

因为 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ，所以 $A = \{x \mid -1 < x < 3\}$ ，

所以 $\complement_U A = \{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 3\}$ ，

因为 $B = \{x \mid 0 < x < 4\}$ ，所以 $(\complement_U A) \cap B = \{x \mid 3 \leq x < 4\}$.

【小问 2 详解】

因为 $\complement_U A = \{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 3\}$ ，

由题意得 $\begin{cases} a < 2a+3 \\ 2a+3 \leq -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 2a+3 \\ a \geq 3 \end{cases}$ ，解得 $-3 < a \leq -2$ 或 $a \geq 3$.

所以实数 a 的取值范围是 $(-3, -2] \cup [3, +\infty)$.

17. 【答案】(1) $f(x)$ 在 $x \in [2, 5]$ 单调递减，证明见解析

(2) $\left\{ m \mid \frac{3}{2} \leq m < 2 \right\}$

【分析】(1) 根据函数单调性的定义即可作差求解，

(2) 由函数的单调性即可求解.

【小问 1 详解】

$f(x)$ 在 $x \in [2, 5]$ 单调递减，证明如下：

$$\text{设 } 2 \leq x_1 < x_2 \leq 5, \text{ 则 } f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1^2 + 1} - \frac{1}{x_2^2 + 1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)},$$

由于 $2 \leq x_1 < x_2 \leq 5$, 所以 $x_2 - x_1 > 0, x_2 + x_1 > 0, (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1) > 0$,

因此 $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 故 $f(x_1) > f(x_2)$, 所以 $f(x)$ 在 $x \in [2, 5]$ 单调递减,

【小问 2 详解】

由 (1) 知 $f(x)$ 在 $x \in [2, 5]$ 单调递减,

所以由 $f(m+1) < f(2m-1)$ 得 $5 \geq m+1 > 2m-1 \geq 2$, 解得 $\frac{3}{2} \leq m < 2$,

故不等式的解集为 $\left\{ m \mid \frac{3}{2} \leq m < 2 \right\}$,

18. **【答案】** (1) $M = \left\{ y \mid -\frac{1}{4} \leq y < 2 \right\}$

(2) $a < -\frac{1}{4}$ 或 $a > \frac{9}{4}$

【分析】 (1) 根据二次函数的性质即可求解集合 M .

(2) $x \in \mathbf{N}$ 是 $x \in M$ 的必要条件, 即 $M \subseteq N$, 对 a 分类讨论, 解出不等式 $(x-a)(x+a-2) < 0$ 的解集, 可得 a 的取值范围.

【小问 1 详解】

$$y = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

故函数在 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ 单调递减, 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$,

故当 $x = \frac{1}{2}$ 时取最小值 $y_{\min} = -\frac{1}{4}$, 当 $x = -1$ 时, $y = 2$, 当 $x = 1$ 时, $y = 0$,

故 $-\frac{1}{4} \leq y < 2$, 所以 $M = \left\{ y \mid -\frac{1}{4} \leq y < 2 \right\}$,

【小问 2 详解】

$x \in \mathbf{N}$ 是 $x \in M$ 的必要条件, 即 $M \subseteq N$.

当 $a > 1$ 时, $a > 2 - a$, 此时 $N = (2 - a, a)$,

所以 $\begin{cases} 2 - a < -\frac{1}{4}, \\ a \geq 2 \end{cases}$ 解得 $a > \frac{9}{4}$;

当 $a = 1$ 时, N 为空集, 不适合题意, 所以 $a = 1$ 舍去;

当 $a < 1$ 时, $a < 2 - a$, 此时 $N = (a, 2 - a)$,

$$\text{所以} \begin{cases} a < -\frac{1}{4} \\ 2-a \geq 2 \end{cases}, \text{解得 } a < -\frac{1}{4}$$

综上可得 a 的取值范围是 $a < -\frac{1}{4}$ 或 $a > \frac{9}{4}$

$$19. \text{【答案】(1) } W(x) = \begin{cases} -10x^2 + 600x - 250, 0 < x < 40 \\ -(x + \frac{10000}{x}) + 9200, x \geq 40 \end{cases};$$

(2) 2020 年产量为 100 千部时，企业所获利润最大，最大利润是 9000 万元。

【分析】(1) 根据给定的函数模型，直接计算作答。

(2) 利用 (1) 中函数，借助二次函数最值及均值不等式求出最大值，再比较大小作答。

【小问 1 详解】

依题意，销售收入 $700x$ 万元，固定成本 250 万元，另投入成本 $R(x) = \begin{cases} 10x^2 + 100x, 0 < x < 40 \\ 701x + \frac{10000}{x} - 9450, x \geq 40 \end{cases}$ 万元，

$$\text{因此 } W(x) = 700x - R(x) - 250 = \begin{cases} -10x^2 + 600x - 250, 0 < x < 40 \\ -(x + \frac{10000}{x}) + 9200, x \geq 40 \end{cases},$$

所以 2020 年的利润 $W(x)$ (万元) 关于年产量 x (千部) 的函数关系式是

$$W(x) = \begin{cases} -10x^2 + 600x - 250, 0 < x < 40 \\ -(x + \frac{10000}{x}) + 9200, x \geq 40 \end{cases}.$$

【小问 2 详解】

由 (1) 知，当 $0 < x < 40$ 时， $W(x) = -10(x-30)^2 + 8750 \leq 8750$ ，当且仅当 $x=30$ 时取等号，

当 $x \geq 40$ 时， $W(x) = -(x + \frac{10000}{x}) + 9200 \leq -2\sqrt{x \cdot \frac{10000}{x}} + 9200 = 9000$ ，当且仅当 $x = \frac{10000}{x}$ ，即

$x=100$ 时取等号，

而 $8750 < 9000$ ，因此当 $x=100$ 时， $W(x)_{\max} = 9000$ ，

所以 2020 年产量为 100 千部时，企业所获利润最大，最大利润是 9000 万元。

$$20. \text{【答案】(1) } f(x) = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$$

$$(2) f(x)_{\min} = \begin{cases} (m + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}, & m < -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{4}, & -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2} \\ (m - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4}, & m > \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$(3) [\frac{13}{3}, +\infty) \cup \{3\}.$$

【分析】(1) 设出函数的解析式，结合函数的对称轴以及函数最值，求出函数的解析式即可；

(2) 通过讨论 m 的范围，求出函数的单调区间，求出函数的最小值即可；

(3) 根据一元二次方程根的分布，结合零点存在性定理得到关于 a 的不等式，解出即可。

【小问 1 详解】

设函数 $f(x) = a(x-h)^2 + k$,

由对称轴为 $x = -\frac{1}{2}$ ，函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上最小值为 $\frac{7}{4}$ 可得

得 $f(x) = a(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$ ，将 $(0, 2)$ 代入 $f(x)$ 得： $a = 1$ ，

故 $f(x) = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$ ；

【小问 2 详解】

$f(x)$ 的对称轴为 $x = -\frac{1}{2}$ ，

$m \leq -\frac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 在 $[m-2, m]$ 递减，

$f(x)_{\min} = f(m) = (m + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$ ，

$-\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}$ 时， $f(x)$ 在 $[m-2, -\frac{1}{2}]$ 递减，在 $(-\frac{1}{2}, m]$ 递增，

故 $f(x)_{\min} = f(-\frac{1}{2}) = \frac{7}{4}$ ，

$m \geq \frac{3}{2}$ 时， $f(x)$ 在 $[m-2, m]$ 递增，

故 $f(x)_{\min} = f(m-2) = (m - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4}$ ；

$$\text{综上, } f(x)_{\min} = \begin{cases} (m + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}, & m < -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{4}, & -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2} \\ (m - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4}, & m > \frac{3}{2} \end{cases};$$

【小问3详解】

$$F(x) = f(x) - ax - 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} - ax - 1 = x^2 + (1-a)x + 1 \text{ 在 } (0, 3) \text{ 上只有一个零点,}$$

当 $\Delta = 0$ 时, 即 $\Delta = (1-a)^2 - 4 = 0$, 解得 $a = 3$ 或 $a = -1$

当 $a = -1$ 时, $x^2 + 2x + 1 = 0$, $x = -1$ 不满足题意, 舍去,

当 $a = 3$ 时, $x^2 - 2x + 1 = 0$, $x = 1$ 满足题意,

当 $\Delta > 0$ 时, 当 $F(0) \cdot F(3) < 0$, 解得 $a > \frac{13}{3}$, 此时 $F(x)$ 在 $(0, 3)$ 上只有一个零点,

由于 $F(0) = 1$, 当 $F(3) = 13 - 3a = 0$ 时, 此时 $a = \frac{13}{3}$, 此时 $F(x) = x^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0$,

解得 $x = \frac{1}{3}$ 或 $x = 3$ (舍去), 满足条件,

综上可得 $a \geq \frac{13}{3}$,

综上: a 的取值范围是 $[\frac{13}{3}, +\infty) \cup \{3\}$.

21. 【答案】(1) $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ (2) 证明见解析 (3) 16 个

【分析】

(1) 根据题目条件, 令 $a_n = n$, 即可写出一个集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$;

(2) 由反证法即可证明;

(3) 因为任意的 $x \in \{101, 102, \dots, 200\}$, $x \notin A$, 所以集合 $A \cap \{201, 202, \dots, 205\}$ 中至多 5 个元素. 设 $a_{100-m} = b \leq 100$, 先通过判断集合 A 中前 $100 - m$ 个元素的最大值可以推出 $a_i = i (1 \leq i \leq 100 - m)$, 故集合 A 的个数与集合 $\{201, 202, 203, 204\}$ 的子集个数相同, 即可求出.

【详解】(1) 答案不唯一. 如 $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$;

(2) 假设存在一个 $x_0 \in \{101, 102, \dots, 200\}$ 使得 $x_0 \in A$,

令 $x_0 = 100 + s$, 其中 $s \in \mathbb{N}$ 且 $1 \leq s \leq 100$,

由题意, 得 $a_{100} + a_s \in A$,

由 a_s 为正整数, 得 $a_{100} + a_s > a_{100}$, 这与 a_{100} 为集合 A 中的最大元素矛盾,

所以任意 $x \in \{101, 102, \dots, 200\}$, $x \notin A$.

(3) 设集合 $A \cap \{201, 202, \dots, 205\}$ 中有 m ($1 \leq m \leq 5$) 个元素, $a_{100-m} = b$,

由题意, 得 $a_1 < a_2 < \dots < a_{100-m} \leq 200$, $200 < a_{100-m+1} < a_{100-m+2} < \dots < a_{100}$,

由(2)知, $a_{100-m} = b \leq 100$.

假设 $b > 100 - m$, 则 $b - 100 + m > 0$.

因为 $b - 100 + m \leq 100 - 100 + 5 = 5 < 100 - m$,

由题设条件, 得 $a_{100-m} + a_{b-100+m} \in A$,

因为 $a_{100-m} + a_{b-100+m} \leq 100 + 100 = 200$,

所以由(2)可得 $a_{100-m} + a_{b-100+m} \leq 100$,

这与 a_{100-m} 为 A 中不超过 100 的最大元素矛盾,

所以 $a_{100-m} \leq 100 - m$,

又因为 $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{100-m}$, $a_i \in \mathbf{N}$,

所以 $a_i = i$ ($1 \leq i \leq 100 - m$).

任给集合 $\{201, 202, 203, 204\}$ 的 $m-1$ 元子集 B , 令 $A_0 = \{1, 2, \dots, 100 - m\} \cup B \cup \{205\}$,

以下证明集合 A_0 符合题意:

对于任意 i, j ($1 \leq i \leq j \leq 100$), 则 $i + j \leq 200$.

若 $i + j \in A_0$, 则有 $i + j \leq 100 - m$,

所以 $a_i = i$, $a_j = j$, 从而 $a_i + a_j = i + j \in A_0$.

故集合 A_0 符合题意,

所以满足条件的集合 A 的个数与集合 $\{201, 202, 203, 204\}$ 的子集个数相同,

故满足条件的集合 A 有 $2^4 = 16$ 个.

【点睛】 本题主要考查数列中的推理, 以及反证法的应用, 解题关键是利用题目中的递进关系, 找到破解方法, 意在考查学生的逻辑推理能力和分析转化能力, 属于难题.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023年10-11月北京各区各年级期中试题 & 答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

