2023 北京十五中高二（上）期中

数　学

2023.11

<u>考生注意：</u>本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。全卷满分 150 分，考试时间为 120 分钟。请将答案作答在答题纸上。

第Ⅰ卷 （选择题，共 50 分）

一、选择题(本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分；每小题只有一个选项是正确的；请将答案填涂在答题纸上)

1． 已知直线经过点 $A(0，4)$和点 $B(1，2)$，则直线 AB 的斜率为（　　）

A．-2　　B．3　　C．2　　D．不存在

2． 直线 l 经过点 $P(1，1)$，且与直线 $x-y+2=0$ 平行，则直线 l 的方程为（　　）

A．$x-y-2=0$　　B．$x+y-2=0$　　C．$x-y=0$　　D．$x+y-4=0$

3． 已知圆 C_1：$(x-2)^2+(y-3)^2=4$ 与圆 C_2：$(x+1)^2+(y+1)^2=9$，则圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系为（　　）

A．相交　　B．外切　　C．内切　　D．内含

4． 椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$ 的焦点坐标是（　　）

A．$(0，3)，(0，-3)$　　B．$(4，0)，(-4，0)$

C．$(0，5)，(0，-5)$　　D．$(0，4)，(0，-4)$

5． 若 $\boldsymbol{a}=(1，\lambda，2)$，$\boldsymbol{b}=(2,10,4)$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 90°，则 λ 的值为（　　）

A．5　　B．4　　C．-1　　D．0

6． 焦点在 y 轴上，且长轴长与短轴长之比为 $2:1$，焦距为 $2\sqrt{3}$ 的椭圆方程为（　　）

A．$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$　　B．$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$

C．$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$　　D．$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

7． 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,-1，2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1，2)$，$\boldsymbol{c}=(x,2，2)$，若向量 $\boldsymbol{c}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面，则实数 x 的值为（　　）

A．1　　B．$-\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．-1

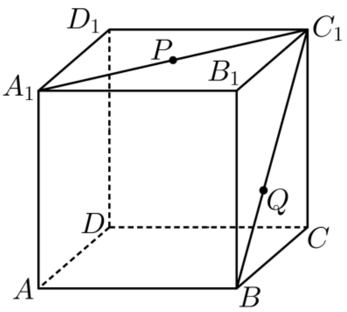
8． 已知圆 M 经过 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，$C(0,4)$ 三点，则圆心 M 到直线 $l:3x-4y-9=0$ 的距离为（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．1　　C．2　　D．3

9． 已知直线 $y=2+k(x-1)$ 与曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 有两个不同公共点，则实数 k 的取值范围是（　　）

A．$(\dfrac{3}{4},1]$　　B．$(0,\dfrac{3}{4})$　　C．$(\dfrac{5}{12},1]$　　D．$(\dfrac{5}{12},\dfrac{3}{4})$

10． 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为线段 A_1C_1 的中点，Q 为线段 BC_1 上的动点，则下列四个命题中正确命题的个数是（　）



①存在点 Q，使得 $PQ//BD$　　②不存在点 Q，使得 $PQ\perp$ 平面 AB_1C_1D

③三棱锥 $Q-APD$ 的体积是定值　④不存在点 Q，使得 PQ 与 AD 所成角为 $60°$

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

第Ⅱ卷　（非选择题，共 100 分）

二、填空题(本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分；请将答案填入答题纸的指定位置)

11． 以(－1，2)为圆心且与 x 轴相切的圆的方程为______________.

12． 直线 $y=x+1$ 与圆 $x^2+y^2+2y-3=0$ 交于 A，B 两点，则 $|AB|=$_________.

13． 若直线 $ax+y=0$ 与直线 $4ax+a^2y+a-2=0$ 平行，则 $a=$_________.

14． 已知点 $A(2，0)$，$B(-2，0)$，点 P 在直线 $x-2y+8=0$ 上，则 $|PA|+|PB|$ 最小值等于__.

15． 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点分别为 F_1，F_2，过椭圆上顶点 A 与左焦点 F_1 的直线与椭圆的另一个交点为 B，若 $\angle AF_2B$ 是直角，则椭圆的离心率是________.

三、解答题(本大题共 5 小题，共 75 分；解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤；请将答案写在答题纸的指定位置上)

16． (本小题 14 分)

已知三角形的顶点为 $A(2,1)$，$B(3,2)$，$C(1,-4)$.

（Ⅰ）求 BC 边上的中线所在直线方程；

（Ⅱ）求 BC 边上的高线所在直线方程.

17． (本小题 14 分)

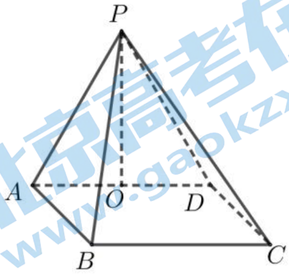
已知直线 l 经过点 $P(1,0)$，圆 $C:x^2+y^2+2x-6y+6=0$.

（Ⅰ）若圆 C 关于直线 l 对称，求直线 l 的方程；

（Ⅱ）若直线 l 平行于直线 $3x+y-1=0$，求直线 l 关于点 $M(3,2)$ 的对称直线 l' 的方程.

8． (本小题 15 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，侧面 PAD 是正三角形，AD 的中点为 O，$PO\perp$ 平面 $ABCD$.



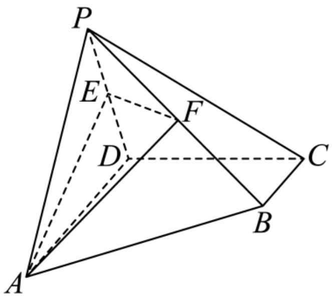
（Ⅰ）证明：$AB\perp$ 平面 PAD；

（Ⅱ）求直线 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值；

（Ⅲ）求点 D 到平面 PBC 的距离.

19． (本小题 16 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$CD\perp$ 平面 PAD，$\triangle PAD$ 为等边三角形，$AD // BC$，$AD=CD=2BC=2$，E、F 分别为棱 PD，PB 的中点，平面 PAD 与平面 PBC 的交线是 l.



（Ⅰ）求证：BC // 直线 l；

（Ⅱ）求平面 AEF 与平面 PAD 所成锐二面角的余弦值；

（Ⅲ）在棱 PC 上是否存在点 G，使得 DG // 平面 AEF？若存在，求 $\dfrac{PG}{PC}$ 的值，若不存在，说明理由.

20． (本小题 16 分)

已知点 $P(1，3)$，圆 $C:x^2+y^2=1$.

（Ⅰ）求圆 C 过点 P 的切线方程；

（Ⅱ）Q 为圆 C 与 x 轴正半轴的交点，过点 P 作直线 l 与圆 C 交于两点 M，N，设 QM，QN 的斜率分别为 k_1，k_2，求证：k_1+k_2 为定值.

参考答案

第 I 卷 （选择题，共 50 分）

一、选择题(本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分；每小题只有一个选项是正确的；请将答案填涂在答题纸上)

1.（ A ）

2.（ C ）

3.（ B ）

4.（ D ）

5.（ C ）

6.（ D ）

7.（ B ）

8.（ D ）

9.（ A ）

10.（ A ）

第 II 卷 （非选择题，共 100 分）

二、填空题(本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分；请将答案填入答题纸的指定位置)

11. $(x+1)^2+(y-2)^2=4$

(或写成 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$)

12. $2\sqrt{2}$

13. -2

14. 8

15. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

三、解答题(本大题共 5 小题，共 75 分；解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤；请将答案写在答题纸的指定位置上)

16. 解：（Ⅰ）BC 的中点坐标为 $(\frac{3+1}{2},\frac{2-4}{2})=(2,-1)$， ……3 分

因为 $A(2,1)$，则边 BC 上的中线所在直线的方程为 $x=2$； ……6 分

（Ⅱ）边 BC 的斜率为 $\frac{2-(-4)}{3-1}=3$， ……8 分

则其上的高的斜率为 $-\frac{1}{3}$， ……10 分

又因为直线过 $A(2,1)$，

则边 BC 上的高所在直线的方程为 $y-1=-\frac{1}{3}(x-2)$，..12 分

即 $x+3y-5=0$ ....14 分

(直线方程也可以写成斜截式：$y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$)

17． 解：（Ⅰ）由 $x^2+y^2+2x-6y+6=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=4$ ....2 分

可得圆心 $C(-1,3)$，半径 $r=2$，

因为圆 C 关于直线 l 对称，所以直线 l 过圆心 $C(-1,3)$，..3 分

又直线 l 过点 $P(1,0)$，所以直线 l 斜率为 $k=\frac{3-0}{-1-1}=-\frac{3}{2}$，......................................5 分

由点斜式方程可得 $y-0=-\frac{3}{2}(x-1)$，即 $3x+2y-3=0$ ....7 分

(直线方程也可以写成斜截式：$y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$)

（Ⅱ）由题意知，直线 l 斜率为 $k=-3$，则由点斜式方程可得 $y-0=-3(x-1)$，

即 $3x+y-3=0$，..9 分

因为直线 l 与直线 l' 关于点 $M(3,2)$ 对称，所以 $k_{l'}=k_l=-3$，..................................10 分

又因为点 $P(1,0)$ 关于点 $M(3,2)$ 对称的点 $P'(5,4)$，直线 l' 过点 P'，..........................12 分

(也可以用直线 l 上其他的点求其对称点)

则由点斜式方程可得 $y-4=-3(x-5)$，即 $3x+y-19=0$ ....14 分

(直线方程也可以写成斜截式：$y=-3x+19$)

18． 解：（Ⅰ）四边形 $ABCD$ 为正方形，则 $AB\perp AD$，..1 分

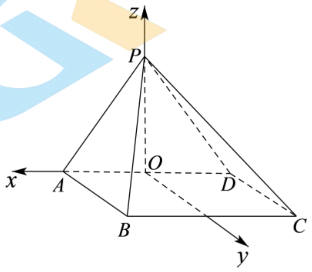
因为 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PO\perp AB$，..2 分

因为 $PO\cap AD=O$，；..3 分

所以 $AB\perp$ 平面 PAD；...4 分

（Ⅱ）如图，以 O 为原点建立如图所示的空间直角坐标系

$O-xyz$，.......................................6 分



则

$O(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(1,2,0)$，$C(-1,2,0)$，$D(-1,0,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，........................7 分

$\therefore \overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{BP}=(-1,-2,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PA}=(1,0,-\sqrt{3})$，

设面 PBC 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=-2x=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BP}=-x-2y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，令 $z=2$，则 $\vec{m}=(0,\sqrt{3},2)$，....................................9 分

设直线 PA 与平面 PBC 所成角为 θ，

$\therefore \left|\cos\langle\overrightarrow{PA},\vec{m}\rangle\right| = \dfrac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{PA}|}{|\vec{m}||\overrightarrow{PA}|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$， ......11 分

$\therefore \sin\theta = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$，因此直线 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. ......12 分

（Ⅲ）由（Ⅱ）知 $\overrightarrow{DC} = (0,2,0)$， ......13 分

设点 D 到平面 PBC 的距离为 d，

所以 $d = \dfrac{|\overrightarrow{DC}\cdot\vec{m}|}{|\vec{m}|} = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}$. ......15 分

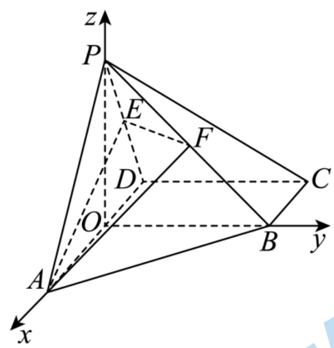
19. 解：（Ⅰ）因为 $AD // BC$， $AD \subset$ 平面 PAD， $BC \not\subset$ 平面 PAD，

所以 $BC //$ 平面 PAD， ......2 分

又因为 $BC \subset$ 平面 PBC，平面 $PBC \cap$ 平面 $PAD =$ 直线 l， ......3 分

所以 $BC // l$ ......4 分

（Ⅱ）取 AD 的中点 O，连接 OP, OB，



由题意可得：$BC // OD$，且 $BC = OD$，

则 $OBCD$ 为平行四边形，可得 $OB // CD$，

且 $CD \perp$ 平面 PAD，则 $OB \perp$ 平面 PAD，

由 $OP \subset$ 平面 PAD，则 $OP \perp OB$，

又因为△PAD 为等边三角形，则 O 为 AB 的中点，可得 $OP \perp AD$，

$OB \cap AD = O$， $OB, AD \subset$ 平面 $ABCD$， 则 $OP \perp$ 平面 $ABCD$， ......6 分

如图，以 O 为坐标原点，OA, OB, OP 分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系， ......7 分

则 $A(1,0,0), B(0,2,0), C(-1,2,0), D(-1,0,0), P\left(0,0,\sqrt{3}\right), E\left(-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), F\left(0,1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

可得 $\overrightarrow{AE} = \left(-\dfrac{3}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{EF} = \left(\dfrac{1}{2},1,0\right)$， ......8 分

设平面 AEF 的法向量 $\vec{n} = (x,y,z)$，则 $\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE} = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EF} = \dfrac{1}{2}x + y = 0 \end{cases}$，

令 $x = 2$，则 $y = -1, z = 2\sqrt{3}$，即 $\vec{n} = \left(2,-1,2\sqrt{3}\right)$， ......10 分

由题意可知：平面 PAD 的法向量 $\vec{m} = (0,1,0)$， ......11 分

可得 $\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle = \dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|} = \dfrac{-1}{\sqrt{17}\times 1} = -\dfrac{\sqrt{17}}{17}$，

所以平面 AEF 与平面 PAD 所成锐二面角的余弦值 $\dfrac{\sqrt{17}}{17}$ ......12 分

（Ⅲ）由（Ⅱ）可得：$\overrightarrow{PC}=\left(-1,2,-\sqrt{3}\right)$，..13 分

设 $\overrightarrow{PG}=\lambda\overrightarrow{PC}$，$G(a,b,c)$，则 $\overrightarrow{PG}=\left(a,b,c-\sqrt{3}\right)$，

可得 $\begin{cases}a=-\lambda\\ b=2\lambda\\ c-\sqrt{3}=-\sqrt{3}\lambda\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-\lambda\\ b=2\lambda\\ c=\sqrt{3}(1-\lambda)\end{cases}$，

即 $G\left(-\lambda,2\lambda,\sqrt{3}(1-\lambda)\right)$，可得 $\overrightarrow{DG}=\left(1-\lambda,2\lambda,\sqrt{3}(1-\lambda)\right)$，..15 分

若 DG // 平面 AEF，则 $\vec{n}\perp\overrightarrow{DG}$，可得 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{DG}=2(1-\lambda)-2\lambda+6(1-\lambda)=0$，解得 $\lambda=\dfrac{4}{5}$，

所以存在点 G，使得 DG // 平面 AEF，此时 $\dfrac{PG}{PC}=\dfrac{4}{5}$..16 分

20． 解：（Ⅰ）圆 $C:x^2+y^2=1$，圆心为 $(0,0)$，半径为 1，

当直线 l 斜率不存在时，直线 l 与圆 C 相切；此时方程为 $x=1$..................................2 分

当直线 l 斜率存在时，设斜率为 k，

则直线 l 方程为 $y-3=k(x-1)$，即 $kx-y-k+3=0$，..3 分

因为直线 l 与圆相切，所以圆心到直线 l 的距离与圆的半径相等，

即 $\dfrac{|-k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，得 $k=\dfrac{4}{3}$，..5 分

此时，切线方程为 $4x-3y+5=0$，..6 分

综上，切线方程为 $x=1$ 或 $4x-3y+5=0$..7 分

（Ⅱ）由题意知，过点 $P(1,3)$ 的直线 l 斜率存在，

故可设方程为 $y-3=k(x-1)$，即 $y=kx+3-k$，

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，且 $x_1<1,x_2<1$，

由题意 QM 的斜率 $k_1=\dfrac{y_1}{x_1-1}$，QN 的斜率 $k_2=\dfrac{y_2}{x_2-1}$，..9 分

则 $k_1+k_2=\dfrac{y_1}{x_1-1}+\dfrac{y_2}{x_2-1}=\dfrac{k(x_1-1)+3}{x_1-1}+\dfrac{k(x_2-1)+3}{x_2-1}=2k+\dfrac{3(x_1+x_2-2)}{(x_1-1)(x_2-1)}$....................11 分

联立 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ y=kx+3-k\end{cases}$，整理得 $\left(1+k^2\right)x^2+2k(3-k)x+k^2-6k+8=0$，..............................13 分

则 $\Delta=4k^2(3-k)^2-4(1+k^2)(k^2-6k+8)=8(3k-4)>0$，即 $k>\dfrac{4}{3}$.

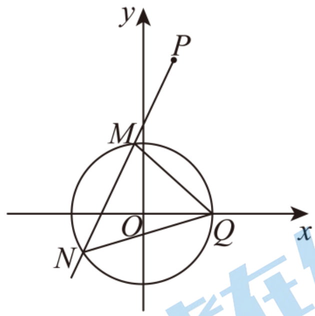
由韦达定理知，$x_1+x_2=\dfrac{2k(k-3)}{1+k^2},x_1x_2=\dfrac{k^2-6k+8}{1+k^2}$，..14 分

则 $x_1+x_2-2=\dfrac{2k(k-3)}{1+k^2}-2=\dfrac{-6k-2}{1+k^2}$，

$(x_1-1)(x_2-1)=x_1x_2-(x_1+x_2)+1=\dfrac{k^2-6k+8}{1+k^2}-\dfrac{2k(k-3)}{1+k^2}+\dfrac{1+k^2}{1+k^2}=\dfrac{9}{1+k^2}$，

故 $k_1+k_2=2k+\dfrac{3\dfrac{-6k-2}{1+k^2}}{\dfrac{9}{1+k^2}}=2k+\dfrac{-6k-2}{3}=-\dfrac{2}{3}$，

故 k_1+k_2 为定值 $-\dfrac{2}{3}$． ……………………………………………………………………………………16 分



北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！