

2023 届高三 4 月大联考

数学试题

注意事项:

1. 本卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 z_1, z_2 在复平面内对应的点关于 y 轴对称,且 $z_1 = 1 + i$, 则复数 $\frac{z_2}{z_1} =$
A. 1 B. -1 C. i D. -i
2. 设集合 $A = \{x | x < a^2\}, B = \{x | x > a\}$, 若 $A \cap \complement_{\mathbb{R}} B = A$, 则实数 a 的取值范围为
A. $[0, 1]$ B. $[0, 1)$
C. $(0, 1)$ D. $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$
3. 某地以“绿水青山就是金山银山”理念为引导,推进绿色发展,现要订购一批苗木,苗木长度与售价如下表:

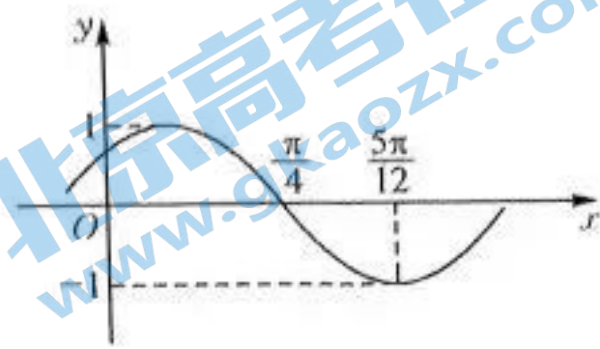
苗木长度 $x(\text{cm})$	38	48	58	68	78	88
售价 $y(\text{元})$	16.8	18.8	20.8	22.8	24	25.8

若苗木长度 $x(\text{cm})$ 与售价 $y(\text{元})$ 之间存在线性相关关系,其回归方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + 8.9$, 则当售价大约为 38.9 元时,苗木长度大约为

- A. 148 cm B. 150 cm
C. 152 cm D. 154 cm
4. $(x - \frac{1}{x})(a + y)^6$ 的展开式中,含 $x^{-1}y^4$ 项的系数为 -15, 则 $a =$
A. 1 B. -1
C. ± 1 D. ± 2

5. 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 为了得到 $f(x)$ 的图象, 只需将 $g(x) = \cos 3x$ 的图象

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度
- B. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度
- C. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度
- D. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度



6. 已知函数 $f(x) = \lg(|x| - 1) + 2^x + 2^{-x}$, 则不等式 $f(x+1) < f(2x)$ 的解集为

- A. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- B. $(-2, -1)$
- C. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$
- D. $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$

7. 表面积为 15π 的球内有一内接四面体 $PABC$, 其中平面 $ABC \perp$ 平面 PAB , $\triangle ABC$ 是边长为 3 的正三角形, 则四面体 $PABC$ 体积的最大值为

- A. $\frac{27}{8}$
- B. $\frac{32}{15}$
- C. $\frac{9}{4}$
- D. $\frac{27}{8}$

8. 在平面直角坐标系中, 直线 $y = kx + m$ ($k \neq 0$) 与 x 轴和 y 轴分别交于 A, B 两点, $|AB| = 2\sqrt{2}$. 若 $CA \perp CB$, 则当 k, m 变化时, 点 C 到点 $(1, 1)$ 的距离的最大值为

- A. $4\sqrt{2}$
- B. $3\sqrt{2}$
- C. $2\sqrt{2}$
- D. $\sqrt{2}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, 点 M 在 C 上且 $|MF| = 5$, 则直线 MF 的方程可能为

- A. $3x + 4y - 3 = 0$
- B. $4x + 3y - 4 = 0$
- C. $3x - 4y - 3 = 0$
- D. $4x - 3y - 4 = 0$

10. 已知 $\tan(\alpha + \beta) = \tan \alpha + \tan \beta$, 其中 $\alpha \neq \frac{n\pi}{2}$ ($n \in \mathbf{Z}$) 且 $\beta \neq \frac{m\pi}{2}$ ($m \in \mathbf{Z}$), 则下列结论一定正确的是

- A. $\sin(\alpha + \beta) = 0$
- B. $\cos(\alpha + \beta) = 1$
- C. $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} = 1$
- D. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$

11. 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 3, BC = 2, BB_1 = 1$, 则

- A. A 到平面 A_1BD 的距离为 $\frac{6}{7}$
- B. A 到平面 A_1BD 的距离为 $\frac{4}{7}$
- C. 沿长方体的表面从 A 到 C_1 的最短距离为 $3\sqrt{2}$
- D. 沿长方体的表面从 A 到 C_1 的最短距离为 $2\sqrt{5}$

12. 下列不等式成立的是

- A. $2^{\sin 1} < \log_2(\sin 1)$
- B. $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{1}{2.7}$

- C. $\frac{2 \cdot 022^4 + 1}{2 \cdot 022^3 + 1} < \frac{2 \cdot 022^5 + 1}{2 \cdot 022^4 + 1}$
- D. $\log_4 3 < \log_6 5$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若向量 $a = (\frac{3}{2}, 1)$, $b = (3, k)$, 且 a, b 共线, 则 $(a-b) \cdot (2a+b) =$ _____.
14. 若直线 $y = ax - 1$ 是函数 $f(x) = x + \ln x$ 的图象在某点处的切线, 则实数 $a =$ _____.
15. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 若在 C 上存在点 P (不是顶点), 使得 $\angle PF_2F_1 = 3\angle PF_1F_2$, 则 C 的离心率的取值范围为 _____.
16. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正整数的数列, 且 $a_1 = 3, a_7 = 8$, 对任意 $k \in \mathbb{N}^*$, $a_{k+1} = a_k + 1$ 与 $a_{k+1} = \frac{1}{2}a_{k+2}$ 有且仅有一个成立, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_7$ 的最小值为 _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 设 $b \cos C + c \sin B = 0$.

(1) 求 C ; 来源：高三答案公众号

(2) 若 $c = 4, \sqrt{2}a = (\sqrt{3} + 1)b$, 求 a .

18. (本小题满分 12 分)

记 S_n 为公比不为 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1 = -8a_2 + 8a_3, S_6 = 21$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

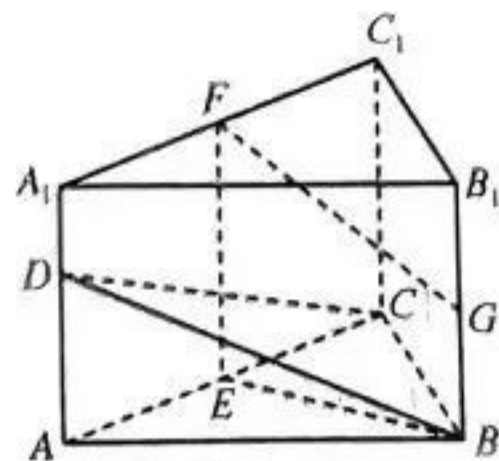
(2) 设 $b_n = \log_2 a_n^2$, 若由 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的公共项从小到大组成数列 $\{c_n\}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, D 为棱 AA_1 上的点, E, F, G 分别为 AC, A_1C_1, BB_1 的中点, $AC = AA_1 = 2$.

(1) 求证: $FG \perp AC$;

(2) 若直线 FG 与平面 BCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 求 AD 的长.



20. (本小题满分 12 分)

袋子中有 8 张水果卡片, 其中 4 张苹果卡片, 4 张梨子卡片. 消费者从该袋子中不放回地随机抽取 4 张卡片, 若抽到的 4 张卡片都是同一种水果, 则获得一张 10 元代金券; 若抽到的 4 张卡片中恰有 3 张卡片是同一种水果, 则获得一张 5 元代金券; 若抽到的 4 张卡片是其他情况, 则不获得任何奖励.

(1) 求某位消费者在一次抽奖活动中抽到的 4 张卡片都是苹果卡片的概率;

(2) 记随机变量 X 为某位消费者在一次抽奖活动中获得代金券的金额数, 求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$;

(3) 该商家规定, 每位消费者若想再次参加该项抽奖活动, 则需支付 2 元. 若你是消费者, 是否愿意再次参加该项抽奖活动? 请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点与短轴两端点的连线及短轴构成等边三角形,

且椭圆经过点 $M(1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 不经过点 M 的直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + m (m \neq 0)$ 与椭圆 E 相交于 A, B 两点, A 关于原点的对称点为 R , 直线 MR, MB 与 y 轴分别交于 P, Q 两点, 求证: $|MP| = |MQ|$.

22. (本小题满分 12 分)

已知 $f(x) = e^x$.

(1) 求证: 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 1 + x + \frac{x^2}{2}$;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 2x \ln x + mx + 1$ 恒成立时, 实数 m 的取值范围是 $(-\infty, t]$,

求证: $t > \frac{23}{20}$.

1. C 由题意知, $z_2 = -1+i$, 则 $\frac{z_2}{z_1} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{2} = i$. 故选 C.

2. A 由 $A \cap \mathbb{R}B = A$, 得 $A \subseteq \mathbb{R}B$, 所以 $a^2 \leq a$, 解得 $0 \leq a \leq 1$. 故选 A.

3. B 因为 $\bar{x} = \frac{38+48+58+68+78+88}{6} = 63$, $\bar{y} = \frac{16.8+18.8+20.8+22.8+24+25.8}{6} = 21.5$, 所以代入 $\hat{y} = \hat{b}x + 8.9$ 中, 得 $21.5 = \hat{b} \times 63 + 8.9$, 解得 $\hat{b} = 0.2$, 当 $y = 38.9$ 时, $38.9 = 0.2x + 8.9$, 解得 $x = 150$. 故选 B.

4. C $(x - \frac{1}{x})(a+y)^6 = x(a+y)^6 - \frac{1}{x}(a+y)^6$, 显然 $x^{-1}y^4$ 只能来源于 $-\frac{1}{x}(a+y)^6$, 故只需求 $(a+y)^6$ 展开式中 y^4 的系数, 由二项展开式可得, 含有 y^4 的项为 $C_6^4 a^2 y^4 = 15a^2 y^4$, 于是 $-15a^2 = -15$, 解得 $a = \pm 1$. 故选 C.

5. D 由函数的图象可知, 函数的图象过 $(\frac{\pi}{4}, 0)$, $(\frac{5\pi}{12}, -1)$ 这两点, 设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 所以

$\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} \rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\omega = 3$, 所以 $f(x) = \sin(3x + \varphi)$, 因为函数图象过点 $(\frac{5\pi}{12}, -1)$, 所以 $3 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 得 $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$. 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $k = 0$, 即 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 因此 $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{4})$, $g(x) = \cos 3x = \sin(3x + \frac{\pi}{2})$, 为了得到 $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \sin[3(x + \frac{\pi}{12})]$ 的图象, 只需将 $g(x) = \cos 3x = \sin(3x + \frac{\pi}{2}) = \sin[3(x + \frac{\pi}{6})]$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度即可. 故选 D.

6. C 由 $|x| - 1 > 0$, 得 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $f(-x) = \lg(|-x| - 1) = \lg(|x| - 1) = f(x)$, 故 $f(x)$ 为偶函数, 而 $y = \lg(|x| - 1)$, $y = 2^x + 2^{-x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则

$$f(x+1) < f(2x) \text{ 可化为 } \begin{cases} |x+1| < |2x|, \\ |x+1| > 1, \\ |2x| > 1, \end{cases} \text{ 解得 } x > 1 \text{ 或 } x < -2. \text{ 故选 C.}$$

7. D 如图, 设球 O 的半径为 R . 因为球的表面积为 15π , 所以球 O 的半径为 $R = \frac{\sqrt{15}}{2}$. 因为

$\triangle ABC$ 是边长为 3 的正三角形, 所以由正弦定理知 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径 $O_1C = r = \frac{1}{2}$

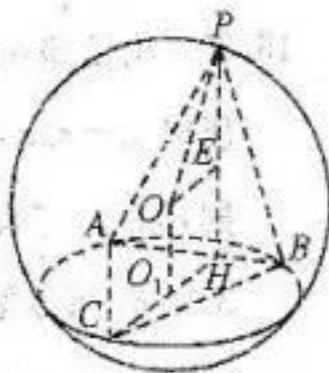
$\times \frac{3}{\sin 60^\circ} = \sqrt{3}$. 球心 O 到 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心 O_1 的距离 $O_1O = \sqrt{R^2 - (\sqrt{3})^2} =$

$\sqrt{(\frac{\sqrt{15}}{2})^2 - 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 连接 CO_1 , 并延长交 AB 于 H , 连接 PH . 因为平面 $PAB \perp$ 平面 ABC , 当点 P 使得

$PH \perp$ 平面 ABC , 四面体 $PABC$ 的体积最大, 作 $OE \perp PH$, 则 $OE = O_1H = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $PH = EH + PE = O_1O +$

PE . 在 $Rt\triangle OEP$ 中, 由勾股定理, 得 $PE = \sqrt{OP^2 - OE^2} = \sqrt{OP^2 - O_1H^2} = \sqrt{R^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{3}$, 则 $PH = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$+ \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 所以四面体 $PABC$ 体积的最大值为 $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot PH = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{27}{8}$. 故选 D.



8. B 由 $y=kx+m(k \neq 0)$, 得 $A(-\frac{m}{k}, 0), B(0, m)$, 故由 $|AB|=2\sqrt{2}$, 得 $(-\frac{m}{k})^2 + m^2 = 8$, 由 $CA \perp CB$, 得

$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0, \text{ 设 } C(x, y), \text{ 则 } (x + \frac{m}{k}, y) \cdot (x, y - m) = 0, \text{ 即 } (x + \frac{m}{2k})^2 + (y - \frac{m}{2})^2 = 2, \text{ 即点 } C \text{ 轨迹为半径}$$

为 $\sqrt{2}$ 的动圆. 设该动圆圆心为 (x', y') , 则 $x' = -\frac{m}{2k}, y' = \frac{m}{2}$, 整理得 $k = -\frac{y'}{x'}, m = 2y'$, 代入 $(-\frac{m}{k})^2 + m^2 = 8$

中, 得 $x'^2 + y'^2 = 2$, 即 C 轨迹的圆心在圆 $x'^2 + y'^2 = 2$ 上, 故点 $(1, 1)$ 与该圆上的点 $(-1, -1)$ 的连线的

距离加上圆 C 的半径即为点 C 到点 $(1, 1)$ 的距离的最大值, 最大值为 $\sqrt{[1 - (-1)]^2 + [1 - (-1)]^2} + \sqrt{2} =$

$3\sqrt{2}$. 故选 B.

9. BD 设点 $M(x_0, y_0)$, 因为 $|MF|=5$, 所以 $x_0 - (-1) = 5$, 解得 $x_0 = 4$, 则点 $M(4, \pm 4)$. 又焦点 F 为 $(1, 0)$, 则直线 MF 的方程为 $4x \pm 3y - 4 = 0$. 故选 BD.

10. AD 由已知得, $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \tan \alpha + \tan \beta$, 又 $\alpha \neq \frac{n\pi}{2}, \beta \neq \frac{m\pi}{2} (m, n \in \mathbb{Z})$, 从而得到 $\tan \alpha + \tan \beta = 0$, 所以

$\alpha = k\pi - \beta, k \in \mathbb{Z}$, 即 $\alpha + \beta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 所以 $\sin(\alpha + \beta) = 0$, 故 A 正确; 对于 B 选项, $\cos(\alpha + \beta) = \cos k\pi = \pm 1$, 故

B 错误; 对于 C 选项, $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} = \sin^2 (\frac{k\pi}{2} - \frac{\beta}{2}) + \sin^2 \frac{\beta}{2}$, 当 k 为偶数时, $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} =$

$\sin^2 (\frac{k\pi}{2} - \frac{\beta}{2}) + \sin^2 \frac{\beta}{2} = \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} = 2\sin^2 \frac{\beta}{2}$, 故 C 错误; 对于 D 选项, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta = \sin^2 (k\pi - \beta)$

$+ \cos^2 \beta = \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$, 所以 D 正确. 故选 AD.

11. AC $BD = \sqrt{13}, A_1D = \sqrt{13}, A_1B = \sqrt{13}$, 所以 $\cos \angle BA_1D = \frac{5+10-13}{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$, 所以 $\sin \angle BA_1D = \frac{7\sqrt{2}}{10}$,

$S_{\triangle A_1BD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{10} \times \frac{7\sqrt{2}}{10} = \frac{7}{2}$. 设 A 到平面 A_1BD 的距离为 h , 则由 $V_{A-A_1BD} = V_{A_1-ABD}$ 得 $\frac{1}{3} \times \frac{7}{2} \times h =$

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times 1$, 所以 $h = \frac{6}{7}$, 故 A 正确, B 错误. 如图 1 所示, 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 3, AD = 2,$

$BC = 2, BB_1 = 1$, 将侧面 ABB_1A_1 和侧面 BCC_1B_1 展开, 如图 2 所示.

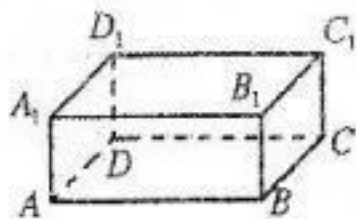


图1



图2

连接 AC_1 , 则有 $AC_1 = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$, 即经过侧面 ABB_1A_1 和侧面 BCC_1B_1 时, A 到 C_1 的最短距离是

$\sqrt{26}$; 将侧面 ABB_1A_1 和底面 $A_1B_1C_1D_1$ 展开, 如图 3 所示, 连接 AC_1 , 则有 $AC_1 = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$, 即经过

侧面 ABB_1A_1 和底面 $A_1B_1C_1D_1$ 时, A 到 C_1 的最短距离是 $3\sqrt{2}$; 将侧面 ADD_1A_1 和底面 $A_1B_1C_1D_1$ 展开,

如图 4 所示.

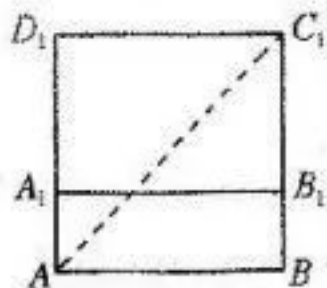


图3

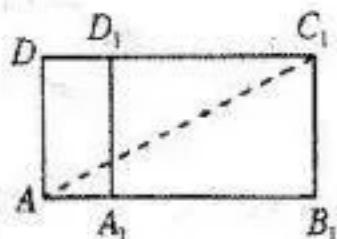


图4

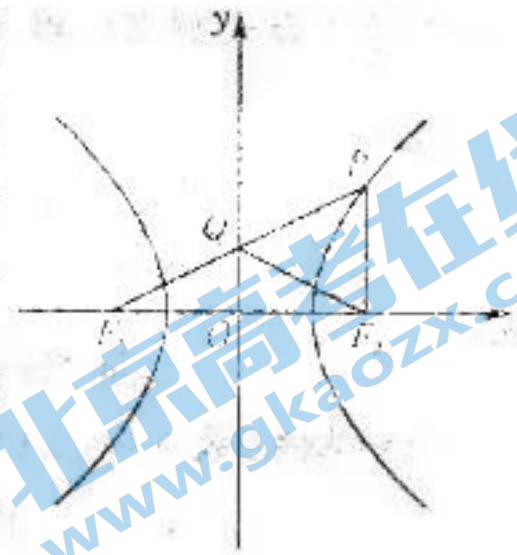
$2\sqrt{5}$. 因为 $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5} < \sqrt{26}$, 所以沿长方体表面由 A 到 C_1 的最短距离是 $3\sqrt{2}$, 故 C 正确, D 错误. 故选 AC.

12. BCD 对于 A: $\because 0 < \sin 1 < 1, \therefore \log_2(\sin 1) < 0$, 而 $2^{\sin 1} > 0, \therefore \log_2(\sin 1) < 2^{\sin 1}$, 故 A 错误; 对于 B, 构造函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 显然当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 所以 $f(\pi) < f(e)$, 即 $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{1}{e}$, 而 $\frac{1}{e} < \frac{1}{2.7}$, 故 B 正确; 对于 C, $\frac{2 \cdot 022^4 + 1}{2 \cdot 022^3 + 1} - 1 = \frac{2 \cdot 022^3 \times 2 \cdot 021}{2 \cdot 022^3 + 1}, \frac{2 \cdot 022^5 + 1}{2 \cdot 022^4 + 1} - 1 = \frac{2 \cdot 022^4 \times 2 \cdot 021}{2 \cdot 022^4 + 1}$, 而 $\frac{2 \cdot 022^4 \times 2 \cdot 021}{2 \cdot 022^4 + 1} > \frac{2 \cdot 022^4 \times 2 \cdot 021}{2 \cdot 022^4 + 2 \cdot 022} = \frac{2 \cdot 022^3 \times 2 \cdot 021}{2 \cdot 022^3 + 1}$, 所以 $\frac{2 \cdot 022^4 + 1}{2 \cdot 022^3 + 1} < \frac{2 \cdot 022^5 + 1}{2 \cdot 022^4 + 1}$, 故 C 正确; 对于 D, $\because \log_3 4 = 1 + \log_3 \frac{4}{3}, \log_5 6 = 1 + \log_5 \frac{6}{5}, \log_3 \frac{4}{3} > \log_3 \frac{6}{5} > \log_5 \frac{6}{5} > 0, \therefore \log_3 4 > \log_5 6 > 1, \therefore \log_4 3 < \log_6 5$, 故 D 正确. 故选 BCD.

13. -13 由 a 与 b 共线得, $\frac{3}{2}k - 1 \times 3 = 0$, 解得 $k = 2$, 所以 $b = (3, 2)$, 所以 $a - b = (-\frac{3}{2}, -1), 2a + b = (6, 4)$, 所以 $(a - b) \cdot (2a + b) = -\frac{3}{2} \times 6 + (-1) \times 4 = -13$.

14. 2 设切点为 $P(m, n)$. 由题意可得 $\begin{cases} n = am - 1, \\ n = m + \ln m, \\ f'(m) = 1 + \frac{1}{m} = a. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m = n = 1, \\ a = 2. \end{cases}$

15. $(\sqrt{2}, 2)$ 双曲线 C 上存在不是顶点的点 P, 使得 $\angle PF_2F_1 = 3\angle PF_1F_2$, 则点 P 在右支上, 设 PF_1 与 y 轴交于点 Q, 由对称性 $|QF_1| = |QF_2|$, 所以 $\angle QF_1F_2 = \angle QF_2F_1$, 所以 $\angle PF_2Q = \angle PF_2F_1 - \angle QF_2F_1 = 2\angle PF_1F_2 = \angle PQF_2$, 又 $|PQ| = |PF_2|$, 所以 $|PF_1| - |PF_2| = |PF_1| - |PQ| = |QF_1| = 2a$, 由 $|QF_1| > |OF_1|$, 得 $2a > c$, 所以 $e = \frac{c}{a} < 2$. 又在 $\triangle PF_1F_2$ 中, $\angle PF_1F_2 + \angle PF_2F_1 = 4\angle PF_1F_2 < 180^\circ, \angle PF_1F_2 < 45^\circ$, 所以 $\frac{c}{2a} = \cos \angle PF_1F_2 > \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $e = \frac{c}{a} > \sqrt{2}$. 综上, $\sqrt{2} < e < 2$.



16. 20 由已知 $a_i \in \mathbb{N}^* (i=2, 3, 4, 5, 6)$, 所以 $a_i \geq 1 (i=2, 3, 4, 5, 6)$, 若 $a_i = 1 (i=2, 3, 4, 5, 6)$. 因为 $a_{i-1} \neq 0$, 所以 $a_i - a_{i-1} \neq 1$, 故 $a_{i+1} = 2a_i = 2$, 所以 $a_i + a_{i+1} \geq 3$. (1) 若 $a_2 = 1$, 则 $a_3 = 2$, 当 $a_4 = 1$ 时, $a_5 = 2$, 若 $a_6 = 1$, 则 $a_7 = 2$, 与条件相矛盾; 当 $a_4 = 1$ 时, $a_5 = 2$, 若 $a_6 = 2$, 则 $a_7 = 4$, 与条件相矛盾; 当 $a_4 = 1$ 时, $a_5 = 2$, 若 $a_6 = 3$, 则 a_7 可以取 8, 此时 $a_1 + a_2 + \dots + a_7 = 20$; 当 $a_4 = 2$ 时, $a_5 = 4$, 又 $a_6 \geq 1$, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_7 \geq 21$; 当 $a_4 \geq 3$ 时, $a_5 + a_6 \geq 3$, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_7 \geq 20$. (2) 若 $a_2 = 2$, 则 $a_3 = 4$, 则 $a_4 + a_5 + a_6 \geq 4$, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_7 \geq 21$. (3) 若 $a_2 = 3$, 则 $a_3 = 6$, 则 $a_4 + a_5 + a_6 \geq 4$, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_7 \geq 24$. (4) 若 $a_2 \geq 4$, 则 $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \geq 6$, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_7 \geq 21$, 所以 $a_1 + a_2 + \dots + a_7$ 的最小值为 20.

17. 解: (1) 因为 $b \cos C + c \sin B = 0$,

由正弦定理, $\sin B \cos C + \sin C \sin B = 0, \dots \dots \dots 2$ 分

所以 $\cos C + \sin C = 0, \dots \dots \dots 3$ 分

则 $\sin \theta = |\cos \langle \vec{FG}, \vec{m} \rangle| = \frac{|\vec{FG} \cdot \vec{m}|}{|\vec{FG}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}t}{\sqrt{4t^2 + 12} \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 11分

解得 $t = \frac{1}{4}$, 即 $AD = \frac{1}{4}$ 12分

20. 解: (1) 记“某位消费者在一次抽奖活动中抽到的4张卡片都是苹果卡片为事件A, 则 $P(A) = \frac{1}{C_4^7} = \frac{1}{70}$.”

所以某位消费者在一次抽奖活动中抽到的4张卡片都是苹果卡片的概率为 $\frac{1}{70}$ 3分

(2) 依题意随机变量X的所有可能取值为0, 5, 10, 4分

则 $P(X=0) = \frac{C_4^2 \cdot C_2^3}{C_4^7} = \frac{18}{35}$, $P(X=5) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^1 + C_4^1 \cdot C_2^1}{C_4^7} = \frac{16}{35}$, $P(X=10) = \frac{C_4^0 \cdot C_3^0 + C_4^0 \cdot C_2^0}{C_4^7} = \frac{1}{35}$.

所以X的分布列为

X	0	5	10
P	$\frac{18}{35}$	$\frac{16}{35}$	$\frac{1}{35}$

..... 7分

所以 $E(X) = 0 \times \frac{18}{35} + 5 \times \frac{16}{35} + 10 \times \frac{1}{35} = \frac{18}{7}$ 8分

(2) 记随机变量Y为消费者在一次抽奖活动中的收益, 则 $Y = X - 2$, 9分

所以 $E(Y) = E(X - 2) = E(X) - 2 = \frac{18}{7} - 2 = \frac{4}{7} > 0$.

所以我愿意再次参加该项抽奖活动. 10分

21. (1) 解: 设椭圆的上、下顶点分别为 $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$, 左右焦点为 $F_1(-c, 0)$.

则 $\triangle B_1 B_2 F_1$ 是等边三角形, 所以 $2b = \sqrt{c^2 + b^2} = a$.

则椭圆方程为 $\frac{x^2}{4b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

将 $M(1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 代入椭圆方程, 可得 $\frac{1}{4b^2} + \frac{3}{4b^2} = 1$, 解得 $b=1$.

所以椭圆E的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 证明: 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $R(-x_1, -y_1)$.

将直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + m (m \neq 0)$ 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 得 $x^2 + \sqrt{3}mx + m^2 - 1 = 0$.

其判别式 $\Delta = 3m^2 - 4(m^2 - 1) = -m^2 + 4 > 0$, 即 $-2 < m < 2$.

$x_1 + x_2 = -\sqrt{3}m$, $x_1 x_2 = m^2 - 1$.

要证 $|MP| = |MQ|$, 即证直线MR与直线MB的斜率互为相反数, 即证 $k_{MR} + k_{MB} = 0$.

$$\text{因为 } k_{MR} + k_{MB} = \frac{-y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-x_1 - 1} + \frac{y_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{x_2 - 1} = \frac{(y_1 - \frac{\sqrt{3}}{2})(x_2 - 1) + (y_2 + \frac{\sqrt{3}}{2})(x_1 + 1)}{(x_1 + 1)(x_2 - 1)}$$

$$= \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + m - \frac{\sqrt{3}}{2})(x_2 - 1) + (\frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + m + \frac{\sqrt{3}}{2})(x_1 + 1)}{(x_1 + 1)(x_2 - 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}x_1x_2 + m(x_1 + x_2) + \sqrt{3}}{(x_1 + 1)(x_2 - 1)} = \frac{\sqrt{3}(m^2 - 1) - \sqrt{3}m^2 + \sqrt{3}}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = 0, \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

所以 $|MP| = |MQ|$. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

22. (1) 证明: 令 $H(x) = f(x) - 1 - x - \frac{x^2}{2} = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$,

所以 $H'(x) = e^x - 1 - x, H''(x) = e^x - 1$, $\dots\dots\dots 1 \text{分}$

因为 $x > 0$, 所以 $e^x > 1$,

所以 $H''(x) > 0, H'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\dots\dots\dots 2 \text{分}$

所以 $H'(x) > H'(0) = 0$, 故 $H(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\dots\dots\dots 3 \text{分}$

所以 $H(x) > H(0) = 0$, 即 $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$. $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

(2) 证明: 据题意, “对于任意的 $x > 0$, 不等式 $f(x) \geq 2x \ln x + mx + 1$ 恒成立” 时, 等价于 “对于 $\forall x > 0$, $\frac{e^x - 1}{x} - 2 \ln x \geq m$ ”. $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

令 $g(x) = \frac{e^x - 1}{x} - 2 \ln x$, 又实数 m 的取值范围为 $(-\infty, t]$, 故 t 是实数 m 的最大值.

要证 $t > \frac{23}{40}$, 即证 $g(x) > \frac{23}{40}$.

$g'(x) = \frac{x \cdot e^x - e^x + 1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{x \cdot e^x - e^x - 2x + 1}{x^2}$, $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

令 $h(x) = x \cdot e^x - e^x - 2x + 1$, 则 $h'(x) = x \cdot e^x - 2, h''(x) = (x + 1) \cdot e^x > 0$,

所以 $h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $h'(0) = -2 < 0, h'(1) = e - 2 > 0$,

故 $\exists x_0 \in (0, 1)$, 使得 $h'(x_0) = 0$, 即 $e^{x_0} = \frac{2}{x_0}$. $\dots\dots\dots 7 \text{分}$

所以 $\forall x \in (0, x_0)$, 有 $h'(x) < 0, h(x)$ 单调递减; $\forall x \in (x_0, +\infty)$, $h'(x) > 0, h(x)$ 单调递增.

所以 $h(x) \geq h(x_0), h(0) = 0, h(x_0) = x_0 \cdot e^{x_0} - e^{x_0} - 2x_0 + 1 = 2 - \frac{2}{x_0} - 2x_0 + 1 < 0$, $\dots\dots\dots 8 \text{分}$

$h(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} - 2 > 0$, 所以存在 $x_1 \in (x_0, \frac{3}{2})$, 使得 $h(x_1) = 0$,

即 $e^{x_1} = \frac{2x_1 - 1}{x_1 - 1}$, 且满足 $\forall x \in (0, x_1), g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减; $\forall x \in (x_1, +\infty), g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增;

所以 $g(x) \geq g(x_1) = \frac{e^{x_1} - 1}{x_1} - 2 \ln x_1 = \frac{1}{x_1 - 1} - 2 \ln x_1$. $\dots\dots\dots 10 \text{分}$

令 $F(x) = \frac{1}{x - 1} - 2 \ln x$, 则 $F'(x) = \frac{-1}{(x - 1)^2} - \frac{2}{x} < 0$, 故 $F(x)$ 单调递减,

又 $x_1 < \frac{3}{2}$, 所以 $F(x) > F(\frac{3}{2}) = 2(1 - \ln \frac{3}{2})$,

则只需证明 $2(1 - \ln \frac{3}{2}) > \frac{23}{20} \Leftrightarrow \ln \frac{3}{2} < \frac{17}{40} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < e^{\frac{17}{40}}$, $\dots\dots\dots 11 \text{分}$

由(1)知: 当 $x > 0$ 时, $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$,

所以 $e^{\frac{17}{40}} > 1 + \frac{17}{40} + \frac{(\frac{17}{40})^2}{2} = \frac{57}{40} + \frac{289}{3200} = \frac{1849}{3200} \approx 1.515 > 1.5 = \frac{3}{2}$, 故 $t > \frac{23}{20}$. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯