1. 元素与集合的关系

$x\in A \Leftrightarrow x\notin C_U A$, $x\in C_U A \Leftrightarrow x\notin A$.

2. 德摩根公式

$C_U(A\bigcap B)=C_U A\bigcup C_U B; C_U(A\bigcup B)=C_U A\bigcap C_U B$.

3. 包含关系

$A\bigcap B=A\Leftrightarrow A\bigcup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow C_U B\subseteq C_U A$

$\Leftrightarrow A\bigcap C_U B=\Phi\Leftrightarrow C_U A\bigcup B=R$

4. 容斥原理

$card(A\bigcup B)=cardA+cardB-card(A\bigcap B)$

$card(A\bigcup B\bigcup C)=cardA+cardB+cardC-card(A\bigcap B)$

$-card(A\bigcap B)-card(B\bigcap C)-card(C\bigcap A)+card(A\bigcap B\bigcap C)$.

5. 集合 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的子集个数共有 2^n 个；真子集有 2^n-1 个；非空子集有 2^n-1 个；非空的真子集有 2^n-2 个.

6. 二次函数的解析式的三种形式

(1)一般式 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$;

(2)顶点式 $f(x)=a(x-h)^2+k(a\neq 0)$;

(3)零点式 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$.

7.解连不等式 $N<f(x)<M$ 常有以下转化形式

$N<f(x)<M \Leftrightarrow [f(x)-M][f(x)-N]<0$

$\Leftrightarrow |f(x)-\frac{M+N}{2}|<\frac{M-N}{2} \Leftrightarrow \frac{f(x)-N}{M-f(x)}>0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)-N}>\frac{1}{M-N}$.

8. 方程 $f(x)=0$ 在 (k_1,k_2) 上有且只有一个实根, 与 $f(k_1)f(k_2)<0$ 不等价, 前者是后者的一个必要而不是充分条件. 特别地, 方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有且只有一个实根在 (k_1,k_2) 内, 等价于 $f(k_1)f(k_2)<0$, 或 $f(k_1)=0$ 且 $k_1<-\frac{b}{2a}<\frac{k_1+k_2}{2}$, 或 $f(k_2)=0$ 且 $\frac{k_1+k_2}{2}<-\frac{b}{2a}<k_2$.

9. 闭区间上的二次函数的最值

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 在闭区间 $[p,q]$ 上的最值只能在 $x=-\frac{b}{2a}$ 处及区间的两端点处取得，具体如下：

(1)当 a>0 时，若 $x=-\frac{b}{2a}\in[p,q]$ ，则 $f(x)_{\min}=f(-\frac{b}{2a}), f(x)_{\max}=_{\max}\{f(p),f(q)\}$;

$x=-\frac{b}{2a}\notin[p,q]$ ， $f(x)_{\max}=_{\max}\{f(p),f(q)\}$ ， $f(x)_{\min}=_{\min}\{f(p),f(q)\}$.

(2) 当 a<0 时 ， 若 $x=-\frac{b}{2a}\in[p,q]$ ， 则 $f(x)_{\min}=\min\{f(p),f(q)\}$.

$x=-\frac{b}{2a}\notin[p,q]$，则 $f(x)_{max}=\max\{f(p),f(q)\}$， $f(x)_{min}=\min\{f(p),f(q)\}$.

10. 一元二次方程的实根分布

依据：若 $f(m)f(n)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间 (m,n) 内至少有一个实根 .

设 $f(x)=x_2+px+q$ ，则

（1）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(m,+\infty)$ 内有根的充要条件为 $f(m)=0$ 或 $\begin{cases}p^2-4q\ge 0\\ -\frac{p}{2}>m\end{cases}$；

（2）方程 $f(x)=0$ 在区间 (m,n) 内有根的充要条件为 $f(m)f(n)<0$ 或 $\begin{cases}f(m)>0\\ f(n)>0\\ p^2-4q\ge 0\\ m<-\frac{p}{2}<n\end{cases}$

或 $\begin{cases}f(m)=0\\ af(n)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(n)=0\\ af(m)>0\end{cases}$；

（3）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(-\infty,n)$ 内有根的充要条件为 $f(m)<0$ 或 $\begin{cases}p^2-4q\ge 0\\ -\frac{p}{2}<m\end{cases}$.

11. 定区间上含参数的二次不等式恒成立的条件依据

(1) 在给定区间 $(-\infty,+\infty)$ 的子区间 L（形如 $[\alpha,\beta]$，$(-\infty,\beta]$，$[\alpha,+\infty)$ 不同）上含参数的二次不等式 $f(x,t)\ge 0$（t 为参数）恒成立的充要条件是 $f(x,t)_{min}\ge 0(x\notin L)$.

(2) 在给定区间 $(-\infty,+\infty)$ 的子区间上含参数的二次不等式 $f(x,t)\ge 0$（t 为参数）恒成立的充要条件是 $f(x,t)_{man}\le 0(x\notin L)$.

(3) $f(x)=ax^4+bx^2+c>0$ 恒成立的充要条件是 $\begin{cases}a\ge 0\\ b\ge 0\\ c>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0\\ b^2-4ac<0\end{cases}$.

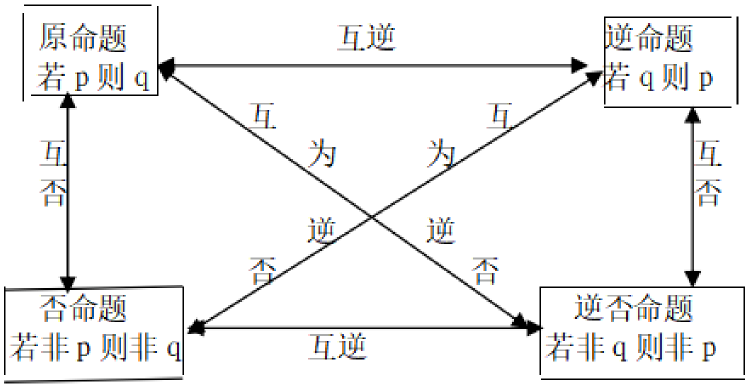
12. 真值表

p	q	非 p	p 或 q	p 且 q
真	真	假	真	真
真	假	假	真	假
假	真	真	真	假
假	假	真	假	假

13. 常见结论的否定形式

原结论	反设词	原结论	反设词
是	不是	至少有一个	一个也没有
都是	不都是	至多有一个	至少有两个
大于	不大于	至少有 n 个	至多有（$n-1$）个
小于	不小于	至多有 n 个	至少有（$n+1$）个
对所有 x，成立	存在某 x，不成立	p 或 q	$\neg p$ 且 $\neg q$
对任何 x，不成立	存在某 x，成立	p 且 q	$\neg p$ 或 $\neg q$

14. 四种命题的相互关系



15.充要条件

（1）充分条件：若 $p \Rightarrow q$，则 p 是 q 充分条件.

（2）必要条件：若 $q \Rightarrow p$，则 p 是 q 必要条件.

（3）充要条件：若 $p \Rightarrow q$，且 $q \Rightarrow p$，则 p 是 q 充要条件.

注：如果甲是乙的充分条件，则乙是甲的必要条件；反之亦然.

16. 函数的单调性

(1) 设 $x_1 \cdot x_2 \in [a,b], x_1 \neq x_2$ 那么

$$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow f(x)\text{在}[a,b]\text{上是增函数；}$$

$$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow f(x)\text{在}[a,b]\text{上是减函数.}$$

(2) 设函数 $y = f(x)$ 在某个区间内可导，如果 $f'(x) > 0$，则 $f(x)$ 为增函数；如果 $f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 为减函数.

17. 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是减函数, 则在公共定义域内, 和函数 $f(x) + g(x)$ 也是减函数；如果函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 在其对应的定义域上都是减函数, 则复合函数 $y = f[g(x)]$ 是增函数.

18．奇偶函数的图象特征

奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称;反过来，如果一个函数的图象关于原点对称，那么这个函数是奇函数；如果一个函数的图象关于 y 轴对称，那么这个函数是偶函数.

19. 若函数 $y = f(x)$ 是偶函数，则 $f(x+a) = f(-x-a)$；若函数 $y = f(x+a)$ 是偶函数，则 $f(x+a) = f(-x+a)$.

20. 对于函数 $y = f(x)$（$x \in R$），$f(x+a) = f(b-x)$ 恒成立, 则函数 $f(x)$ 的对称轴是函数 $x = \dfrac{a+b}{2}$；两个函数 $y = f(x+a)$ 与 $y = f(b-x)$ 的图象关于直线 $x = \dfrac{a+b}{2}$ 对称.

21. 若 $f(x) = -f(-x+a)$，则函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(\dfrac{a}{2}, 0)$ 对称；若 $f(x) = -f(x+a)$, 则函数 $y = f(x)$ 为周期为 $2a$ 的周期函数.

22．多项式函数 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ 的奇偶性

多项式函数 $P(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $P(x)$ 的偶次项(即奇数项)的系数全为零.

多项式函数 $P(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $P(x)$ 的奇次项(即偶数项)的系数全为零.

23. 函数 $y = f(x)$ 的图象的对称性

(1) 函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = a$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+x) = f(a-x)$ $\Leftrightarrow f(2a-x) = f(x)$.

(2)函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+mx)=f(b-mx)$

$\Leftrightarrow f(a+b-mx)=f(mx)$.

24. 两个函数图象的对称性

(1)函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f(-x)$ 的图象关于直线 $x=0$ (即 y 轴)对称.

(2)函数 $y=f(mx-a)$ 与函数 $y=f(b-mx)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2m}$ 对称.

(3)函数 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 y=x 对称.

25. 若将函数 $y=f(x)$ 的图象右移 a、上移 b 个单位，得到函数 $y=f(x-a)+b$ 的图象；若将曲线 $f(x,y)=0$ 的图象右移 a、上移 b 个单位，得到曲线 $f(x-a,y-b)=0$ 的图象.

26. 互为反函数的两个函数的关系

$f(a)=b\Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$.

27. 若函数 $y=f(kx+b)$ 存在反函数，则其反函数为 $y=\dfrac{1}{k}[f^{-1}(x)-b]$，并不是 $y=[f^{-1}(kx+b)$，而函数 $y=[f^{-1}(kx+b)$ 是 $y=\dfrac{1}{k}[f(x)-b]$ 的反函数.

28. 几个常见的函数方程

(1)正比例函数 $f(x)=cx$，$f(x+y)=f(x)+f(y),f(1)=c$.

(2)指数函数 $f(x)=a^x$，$f(x+y)=f(x)f(y),f(1)=a\neq 0$.

(3)对数函数 $f(x)=\log_a x$，$f(xy)=f(x)+f(y),f(a)=1(a>0,a\neq 1)$.

(4)幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$，$f(xy)=f(x)f(y),f'(1)=\alpha$.

(5)余弦函数 $f(x)=\cos x$，正弦函数 $g(x)=\sin x$，$f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$，$f(0)=1,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=1$.

29. 几个函数方程的周期(约定 a>0)

（1）$f(x)=f(x+a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=a；

（2）$f(x)=f(x+a)=0$，

或 $f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$，

或 $f(x+a)=-\dfrac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$，

或 $\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}=f(x+a),(f(x)\in[0,1])$，则 $f(x)$ 的周期 T=2a；

(3) $f(x)=1-\dfrac{1}{f(x+a)}(f(x)\neq 0)$，则 $f(x)$ 的周期 T=3a；

(4) $f(x_1+x_2)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{1-f(x_1)f(x_2)}$ 且 $f(a)=1(f(x_1)\cdot f(x_2)\neq 1,0<|x_1-x_2|<2a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=4a；

(5) $f(x)+f(x+a)+f(x+2a)f(x+3a)+f(x+4a)$

$=f(x)f(x+a)f(x+2a)f(x+3a)f(x+4a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=5a；

(6) $f(x+a)=f(x)-f(x+a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=6a.

30. 分数指数幂

(1) $a^{\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ （$a>0,m,n\in N^*$，且$n>1$）.

(2) $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$ （$a>0,m,n\in N^*$，且$n>1$）.

31．根式的性质

（1）$(\sqrt[n]{a})^n=a$.

（2）当n为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；

当n为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a,a\geq 0\\-a,a<0\end{cases}$.

32．有理指数幂的运算性质

(1) $a^r\cdot a^s=a^{r+s}(a>0,r,s\in Q)$.

(2) $(a^r)^s=a^{rs}(a>0,r,s\in Q)$.

(3) $(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r\in Q)$.

注： 若 a>0，p 是一个无理数，则 a^p 表示一个确定的实数．上述有理指数幂的运算性质，对于无理数指数幂都适用.

33. 指数式与对数式的互化式

$\log_a N=b\Leftrightarrow a^b=N\ (a>0,a\neq 1,N>0)$.

34. 对数的换底公式

$\log_a N=\frac{\log_m N}{\log_m a}$ （$a>0$, 且$a\neq 1$, $m>0$, 且$m\neq 1$, $N>0$).

推论 $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$（$a>0$, 且$a>1$, $m,n>0$, 且$m\neq 1$, $n\neq 1$, $N>0$).

35．对数的四则运算法则

若 a>0，a≠1，M>0，N>0，则

(1) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；

(2) $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

(3) $\log_a M^n=n\log_a M(n\in R)$.

36. 设函数$f(x)=\log_m(ax^2+bx+c)(a\neq 0)$, 记$\Delta=b^2-4ac$. 若$f(x)$的定义域为$R$, 则$a>0$，且$\Delta<0$；若$f(x)$的值域为$R$, 则$a>0$，且$\Delta\geq 0$. 对于$a=0$的情形, 需要单独检验.

37．对数换底不等式及其推广

若$a>0$, $b>0$, $x>0$, $x\neq\frac{1}{a}$, 则函数$y=\log_{ax}(bx)$

(1)当$a>b$时, 在$(0,\frac{1}{a})$和$(\frac{1}{a},+\infty)$上$y=\log_{ax}(bx)$为增函数.

(2)当$a<b$时, 在$(0,\frac{1}{a})$和$(\frac{1}{a},+\infty)$上$y=\log_{ax}(bx)$为减函数.

推论:设$n>m>1$，$p>0$，$a>0$，且$a\neq 1$，则

（1）$\log_{m+p}(n+p)<\log_m n$.

（2）$\log_a m\log_a n<\log_a{}^2\frac{m+n}{2}$.

38. 平均增长率的问题

如果原来产值的基础数为 N，平均增长率为 p，则对于时间 x 的总产值 y，有 $y=N(1+p)^x$.

39. 数列的同项公式与前 n 项的和的关系

$a_n=\begin{cases}s_1, & n=1\\ s_n-s_{n-1}, n\ge 2\end{cases}$（数列$\{a_n\}$的前 n 项的和为$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$）.

40. 等差数列的通项公式

$a_n=a_1+(n-1)d=dn+a_1-d(n\in N^*)$；

其前 n 项和公式为

$s_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

$=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{1}{2}d)n$.

41. 等比数列的通项公式

$a_n=a_1q^{n-1}=\frac{a_1}{q}\cdot q^n(n\in N^*)$；

其前 n 项的和公式为

$s_n=\begin{cases}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, q\ne 1\\ na_1, q=1\end{cases}$

或 $s_n=\begin{cases}\frac{a_1-a_nq}{1-q}, q\ne 1\\ na_1, q=1\end{cases}$.

42. 等比差数列$\{a_n\}: a_{n+1}=qa_n+d, a_1=b(q\ne 0)$的通项公式为

$a_n=\begin{cases}b+(n-1)d, q=1\\ \frac{bq^n+(d-b)q^{n-1}-d}{q-1}, q\ne 1\end{cases}$；

其前 n 项和公式为

$s_n=\begin{cases}nb+n(n-1)d, (q=1)\\ (b-\frac{d}{1-q})\frac{1-q^n}{q-1}+\frac{d}{1-q}n, (q\ne 1)\end{cases}$.

43.分期付款(按揭贷款)

每次还款$x=\frac{ab(1+b)^n}{(1+b)^n-1}$元(贷款$a$元,$n$次还清,每期利率为$b$).

44. 常见三角不等式

（1）若$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，则$\sin x<x<\tan x$.

(2) 若 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $1<\sin x+\cos x\le\sqrt{2}$.

(3) $|\sin x|+|\cos x|\ge 1$.

45. 同角三角函数的基本关系式

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\tan\theta\cdot cot\theta=1$.

46. 正弦、余弦的诱导公式

$$\sin(\frac{n\pi}{2}+\alpha)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\sin\alpha, & \text{(n 为偶数)}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\alpha, & \text{(n 为奇数)}\end{cases}$$

$$\cos(\frac{n\pi}{2}+\alpha)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\cos\alpha, & \text{(n 为偶数)}\\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}\sin\alpha, & \text{(n 为奇数)}\end{cases}$$

47. 和角与差角公式

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$；

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$；

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$.

$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$ (平方正弦公式)；

$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$（辅助角 φ 所在象限由点 (a,b) 的象限决定，$\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$ ）.

48. 二倍角公式

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

49. 三倍角公式

$$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=4\sin\theta\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)\sin(\frac{\pi}{3}+\theta).$$

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=4\cos\theta\cos(\frac{\pi}{3}-\theta)\cos(\frac{\pi}{3}+\theta).$$

$$\tan 3\theta=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}=\tan\theta\tan(\frac{\pi}{3}-\theta)\tan(\frac{\pi}{3}+\theta).$$

50. 三角函数的周期公式

函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$，x∈R 及函数 $y=\cos(\omega x+\varphi)$，x∈R(A，ω，φ 为常数，且 A≠0，ω>0)的周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$；函数 $y=\tan(\omega x+\varphi)$，$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z$ (A，ω，φ 为常数，且 A≠0，ω>0)的周期 $T=\dfrac{\pi}{\omega}$.

51. 正弦定理

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

52. 余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$;

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$;

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

53. 面积定理

（1）$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$（$h_a$、$h_b$、$h_c$分别表示a、b、c边上的高）.

（2）$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$.

(3) $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{(|\overline{OA}|\cdot|\overline{OB}|)^2-(\overline{OA}\cdot\overline{OB})^2}$.

54. 三角形内角和定理

在△ABC中，有 $A+B+C=\pi\Leftrightarrow C=\pi-(A+B)$

$\Leftrightarrow\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\Leftrightarrow 2C=2\pi-2(A+B)$.

55. 简单的三角方程的通解

$\sin x=a\Leftrightarrow x=k\pi+(-1)^k\arcsin a(k\in Z,|a|\le 1)$.

$\cos x=a\Leftrightarrow x=2k\pi\pm\arccos a(k\in Z,|a|\le 1)$.

$\tan x=a\Rightarrow x=k\pi+\arctan a(k\in Z,a\in R)$.

特别地, 有

$\sin\alpha=\sin\beta\Leftrightarrow\alpha=k\pi+(-1)^k\beta(k\in Z)$.

$\cos\alpha=\cos\beta\Leftrightarrow\alpha=2k\pi\pm\beta(k\in Z)$.

$\tan\alpha=\tan\beta\Rightarrow\alpha=k\pi+\beta(k\in Z)$.

56. 最简单的三角不等式及其解集

$\sin x>a(|a|\le 1)\Leftrightarrow x\in(2k\pi+\arcsin a,2k\pi+\pi-\arcsin a),k\in Z$.

$\sin x<a(|a|\le 1)\Leftrightarrow x\in(2k\pi-\pi-\arcsin a,2k\pi+\arcsin a),k\in Z$.

$\cos x>a(|a|\le 1)\Leftrightarrow x\in(2k\pi-\arccos a,2k\pi+\arccos a),k\in Z$.

$\cos x<a(|a|\le 1)\Leftrightarrow x\in(2k\pi+\arccos a,2k\pi+2\pi-\arccos a),k\in Z$.

$\tan x>a(a\in R)\Rightarrow x\in(k\pi+\arctan a,k\pi+\frac{\pi}{2}),k\in Z$.

$\tan x<a(a\in R)\Rightarrow x\in(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\arctan a),k\in Z$.

57. 实数与向量的积的运算律

设λ、μ为实数，那么

(1) 结合律：λ(μ**a**)=(λμ)**a**;

(2)第一分配律：(λ+μ)**a**=λ**a**+μ**a**;

(3)第二分配律：λ(**a**+**b**)=λ**a**+λ**b**.

58. 向量的数量积的运算律：

(1) ***a*·b= b·*a***（交换律）;

(2)（λ***a***)·**b**= λ（***a***·**b**）=λ***a***·**b**= ***a***·（λ**b**）;

(3)（***a***+**b**)·**c**= ***a*** ·**c** +**b**·**c**.

59. 平面向量基本定理

如果$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量，有且

只有一对实数 λ_1、 λ_2，使得 **a**= λ_1**e**$_1$+ λ_2**e**$_2$.

不共线的向量 **e**$_1$、 **e**$_2$ 叫做表示这一平面内所有向量的一组**基底.**

60. 向量平行的坐标表示

设 **a**=(x_1,y_1),**b**=(x_2,y_2)，且 **b**$\neq$**0**，则 **a**||**b**(**b**$\neq$**0**) $\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

53. ***a*** 与 **b** 的数量积(或内积)

a·**b**=|***a***| |**b**|cos θ.

61. **a**·**b** 的几何意义

数量积 **a**·**b** 等于 **a** 的长度|**a**|与 **b** 在 **a** 的方向上的投影|**b**|cos θ 的乘积.

62. 平面向量的坐标运算

(1) 设 **a**=(x_1,y_1),**b**=(x_2,y_2)，则 **a**+**b**=(x_1+x_2,y_1+y_2).

(2) 设 **a**=(x_1,y_1),**b**=(x_2,y_2)，则 **a**-**b**=(x_1-x_2,y_1-y_2).

(3) 设 A(x_1,y_1)，B(x_2,y_2)，则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

(4) 设 **a**=$(x,y),\lambda\in R$，则 λ**a**=$(\lambda x,\lambda y)$.

(5) 设 **a**=(x_1,y_1),**b**=(x_2,y_2)，则 **a**·**b**=$(x_1x_2+y_1y_2)$.

63. 两向量的夹角**公式**

$$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$ （**a**=(x_1,y_1),**b**=(x_2,y_2)）.

64. 平面两点间的距离公式

$$d_{A,B}=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}$$

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$ (A(x_1,y_1)，B(x_2,y_2)).

65. 向量的平行与垂直

设 **a**=(x_1,y_1),**b**=(x_2,y_2)，且 **b**$\neq$**0**，则

A||**b**$\Leftrightarrow$ **b**=λ**a** $\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

a⊥**b**(**a**$\neq$**0**) $\Leftrightarrow$ ***a***·**b**=0$\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

66. 线段的定比分公式

设 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P(x,y)$ 是线段 P_1P_2 的分点，λ 是实数，且 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，则

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\end{cases}\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2}}{1+\lambda}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OP_1}+(1-t)\overrightarrow{OP_2}\quad(t=\frac{1}{1+\lambda}).$$

67. 三角形的重心坐标公式

△ABC 三个顶点的坐标分别为 A(x_1,y_1)、B(x_2,y_2)、C(x_3,y_3)，则△ABC 的重心的坐标是 $G(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3})$.

68. 点的平移公式

$$\begin{cases}x'=x+h\\ y'=y+k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'-h\\ y=y'-k\end{cases}\Leftrightarrow\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PP'}.$$

注:图形 F 上的任意一点 P(x，y)在平移后图形 F' 上的对应点为 $P'(x',y')$，且 $\overrightarrow{PP'}$ 的坐标为 (h,k).

69. “按向量平移”的几个结论

（1）点 $P(x,y)$ 按向量 $\mathbf{a}=(h,k)$ 平移后得到点 $P'(x+h,y+k)$.

(2) 函数 $y=f(x)$ 的图象 C 按向量 $\mathbf{a}=(h,k)$ 平移后得到图象 C'，则 C' 的函数解析式为 $y=f(x-h)+k$.

(3) 图象 C' 按向量 $\mathbf{a}=(h,k)$ 平移后得到图象 C，若 C 的解析式 $y=f(x)$，则 C' 的函数解析式为 $y=f(x+h)-k$.

(4) 曲线 C：$f(x,y)=0$ 按向量 $\mathbf{a}=(h,k)$ 平移后得到图象 C'，则 C' 的方程为 $f(x-h,y-k)=0$.

(5) 向量 $\mathbf{m}=(x,y)$ 按向量 $\mathbf{a}=(h,k)$ 平移后得到的向量仍然为 $\mathbf{m}=(x,y)$.

70. 三角形五“心”向量形式的充要条件

设 O 为 ΔABC 所在平面上一点，角 A,B,C 所对边长分别为 a,b,c，则

（1）O 为 ΔABC 的外心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2$.

（2）O 为 ΔABC 的重心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

（3）O 为 ΔABC 的垂心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$.

（4）O 为 ΔABC 的内心 $\Leftrightarrow a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

（5）O 为 ΔABC 的 $\angle A$ 的旁心 $\Leftrightarrow a\overrightarrow{OA}=b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}$.

71. 常用不等式：

（1）$a,b\in R\Rightarrow a^2+b^2\ge 2ab$（当且仅当 a＝b 时取“=”号）.

（2）$a,b\in R^+\Rightarrow \dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$（当且仅当 a＝b 时取“=”号）.

（3）$a^3+b^3+c^3\ge 3abc(a>0,b>0,c>0)$.

（4）柯西不等式

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2,a,b,c,d\in R.$

（5）$|a|-|b|\le|a+b|\le|a|+|b|$.

72. 极值定理

已知 x,y 都是正数，则有

（1）若积 xy 是定值 p，则当 $x=y$ 时和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{p}$；

（2）若和 $x+y$ 是定值 s，则当 $x=y$ 时积 xy 有最大值 $\dfrac{1}{4}s^2$.

推广 已知 $x,y\in R$，则有 $(x+y)^2=(x-y)^2+2xy$

（1）若积 xy 是定值，则当 $|x-y|$ 最大时，$|x+y|$ 最大；

当 $|x-y|$ 最小时，$|x+y|$ 最小.

（2）若和 $|x+y|$ 是定值，则当 $|x-y|$ 最大时，$|xy|$ 最小；

当 $|x-y|$ 最小时，$|xy|$ 最大.

73. 一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$(或<0) $(a\ne 0,\Delta=b^2-4ac>0)$，如果 a 与 ax^2+bx+c 同号，则其解集在两根之外；如果 a 与 ax^2+bx+c 异号，则其解集在两根之间. 简言之：同号两根之外，异号两根之间.

$x_1<x<x_2\Leftrightarrow(x-x_1)(x-x_2)<0(x_1<x_2)$；

$x<x_1$，或 $x>x_2\Leftrightarrow(x-x_1)(x-x_2)>0(x_1<x_2)$.

74. 含有绝对值的不等式

当 a＞0 时，有

$|x|>a \Leftrightarrow x^2>a^2 \Leftrightarrow x>a$或$x<-a$.

75. 无理不等式

（1）$\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)\ge 0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$.

（2）$\sqrt{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)\ge 0 \\ f(x)>[g(x)]^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)<0 \end{cases}$.

（3）$\sqrt{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<[g(x)]^2 \end{cases}$.

76. 指数不等式与对数不等式

(1)当$a>1$时,

$a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x)$;

$\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$.

(2)当$0<a<1$时,

$a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$;

$\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$

77.斜率公式

$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$（$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$）.

78.直线的五种方程

（1）点斜式 $y-y_1=k(x-x_1)$（直线l过点$P_1(x_1,y_1)$，且斜率为k）.

（2）斜截式 $y=kx+b$ (b 为直线l在 y 轴上的截距).

（3）两点式 $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$（$y_1\ne y_2$）($P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$（$x_1\ne x_2$）).

(4)截距式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$（$a$、$b$分别为直线的横、纵截距，$a$、$b\ne 0$）

（5）一般式 $Ax+By+C=0$ (其中 A、B 不同时为 0).

79.两条直线的平行和垂直

(1)若$l_1:y=k_1x+b_1$，$l_2:y=k_2x+b_2$

①$l_1 \| l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2, b_1\ne b_2$;

②$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1$.

(2)若$l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$,$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$,且 A_1、A_2、B_1、B_2都不为零,

①$l_1 \| l_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\ne\dfrac{C_1}{C_2}$;

②$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$;

80.夹角公式

(1)$\tan\alpha=|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}|$.

($l_1: y=k_1x+b_1$, $l_2: y=k_2x+b_2$, $k_1k_2\neq -1$)

(2)$\tan\alpha=|\dfrac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}|$.

($l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$, $A_1A_2+B_1B_2\neq 0$).

直线$l_1\perp l_2$时，直线 l_1 与 l_2 的夹角是$\dfrac{\pi}{2}$.

81. l_1到l_2的角公式

(1)$\tan\alpha=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$.

($l_1: y=k_1x+b_1$, $l_2: y=k_2x+b_2$, $k_1k_2\neq -1$)

(2)$\tan\alpha=\dfrac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$.

($l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$, $A_1A_2+B_1B_2\neq 0$).

直线$l_1\perp l_2$时，直线 l_1 到 l_2 的角是$\dfrac{\pi}{2}$.

82．四种常用直线系方程

(1)定点直线系方程：经过定点$P_0(x_0,y_0)$的直线系方程为$y-y_0=k(x-x_0)$(除直线$x=x_0$)，其中k是待定的系数；经过定点$P_0(x_0,y_0)$的直线系方程为$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$，其中A,B是待定的系数.

(2)共点直线系方程：经过两直线$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$的交点的直线系方程为$(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$(除$l_2$)，其中λ是待定的系数.

(3)平行直线系方程：直线$y=kx+b$中当斜率k一定而b变动时，表示平行直线系方程．与直线$Ax+By+C=0$平行的直线系方程是$Ax+By+\lambda=0$（$\lambda\neq 0$），λ是参变量.

(4)垂直直线系方程：与直线$Ax+By+C=0$ (A≠0，B≠0)垂直的直线系方程是$Bx-Ay+\lambda=0$，λ是参变量.

83.点到直线的距离

$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$(点$P(x_0,y_0)$,直线$l$： $Ax+By+C=0$).

84. $Ax+By+C>0$或<0所表示的平面区域

设直线$l: Ax+By+C=0$，则$Ax+By+C>0$或<0所表示的平面区域是：

若$B\neq 0$，当B与$Ax+By+C$同号时，表示直线l的上方的区域；当B与$Ax+By+C$异号时，表示直线l的下方的区域.简言之,同号在上,异号在下.

若$B=0$，当A与$Ax+By+C$同号时，表示直线l的右方的区域；当A与$Ax+By+C$异号时，表示直线l的左方的区域. 简言之,同号在右,异号在左.

85. $(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)>0$或$<0$所表示的平面区域

$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)>0$ 或<0 所表示的平面区域是：

$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)>0$ 所表示的平面区域上下两部分；

$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)<0$ 所表示的平面区域上下两部分.

86. 圆的四种方程

（1）圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

（2）圆的一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$（D^2+E^2-4F >0）.

（3）圆的参数方程 $\begin{cases} x=a+r\cos\theta \\ y=b+r\sin\theta \end{cases}$.

（4）圆的直径式方程 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$（圆的直径的端点是 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$）.

87. 圆系方程

(1)过点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 的圆系方程是

$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+\lambda[(x-x_1)(y_1-y_2)-(y-y_1)(x_1-x_2)]=0$

$\Leftrightarrow (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+\lambda(ax+by+c)=0$，其中 $ax+by+c=0$ 是直线 AB 的方程，λ 是待定的系数.

(2)过直线 l : $Ax+By+C=0$ 与圆 C : $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的交点的圆系方程是 $x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda(Ax+By+C)=0$，λ 是待定的系数.

(3) 过圆 $C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 与圆 $C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 的交点的圆系方程是 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$，λ 是待定的系数.

88. 点与圆的位置关系

点 $P(x_0,y_0)$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的位置关系有三种

若 $d=\sqrt{(a-x_0)^2+(b-y_0)^2}$，则

$d>r \Leftrightarrow$ 点 P 在圆外；$d=r \Leftrightarrow$ 点 P 在圆上；$d<r \Leftrightarrow$ 点 P 在圆内.

89. 直线与圆的位置关系

直线 $Ax+By+C=0$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的位置关系有三种:

$d>r \Leftrightarrow$ 相离 $\Leftrightarrow \Delta<0$；

$d=r \Leftrightarrow$ 相切 $\Leftrightarrow \Delta=0$；

$d<r \Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow \Delta>0$.

其中 $d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

90. 两圆位置关系的判定方法

设两圆圆心分别为 O_1，O_2，半径分别为 r_1，r_2，$|O_1O_2|=d$

$d>r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 外离 $\Leftrightarrow 4$条公切线；

$d=r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 外切 $\Leftrightarrow 3$条公切线；

$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow 2$条公切线；

$d=|r_1-r_2| \Leftrightarrow$ 内切 $\Leftrightarrow 1$条公切线；

$0<d<|r_1-r_2| \Leftrightarrow$ 内含 $\Leftrightarrow$ 无公切线.

91. 圆的切线方程

(1)已知圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

①若已知切点(x_0,y_0)在圆上，则切线只有一条，其方程是

$$x_0x+y_0y+\frac{D(x_0+x)}{2}+\frac{E(y_0+y)}{2}+F=0.$$

当(x_0,y_0)圆外时，$x_0x+y_0y+\frac{D(x_0+x)}{2}+\frac{E(y_0+y)}{2}+F=0$表示过两个切点的切点弦方程.

②过圆外一点的切线方程可设为$y-y_0=k(x-x_0)$，再利用相切条件求k，这时必有两条切线，注意不要漏掉平行于y轴的切线.

③斜率为k的切线方程可设为$y=kx+b$，再利用相切条件求b，必有两条切线.

(2)已知圆$x^2+y^2=r^2$.

①过圆上的$P_0(x_0,y_0)$点的切线方程为$x_0x+y_0y=r^2$；

②斜率为k的圆的切线方程为$y=kx\pm r\sqrt{1+k^2}$.

92. 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的参数方程是$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases}$.

93. 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$焦半径公式

$|PF_1|=e(x+\frac{a^2}{c})$，$|PF_2|=e(\frac{a^2}{c}-x)$.

94．椭圆的的内外部

（1）点$P(x_0,y_0)$在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的内部$\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1$.

（2）点$P(x_0,y_0)$在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的外部$\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}>1$.

95. 椭圆的切线方程

(1)椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点$P(x_0,y_0)$处的切线方程是$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

（2）过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$外一点$P(x_0,y_0)$所引两条切线的切点弦方程是$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

（3）椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$与直线$Ax+By+C=0$相切的条件是$A^2a^2+B^2b^2=c^2$.

96. 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦半径公式

$|PF_1|=|e(x+\frac{a^2}{c})|$，$|PF_2|=|e(\frac{a^2}{c}-x)|$.

97. 双曲线的内外部

(1)点$P(x_0,y_0)$在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的内部$\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}>1$.

(2)点$P(x_0,y_0)$在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的外部$\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}<1$

98. 双曲线的方程与渐近线方程的关系

（1）若双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow$渐近线方程：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\Leftrightarrow y=\pm\frac{b}{a}x$.

(2)若渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x\Leftrightarrow\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0\Rightarrow$双曲线可设为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$.

(3)若双曲线与$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$有公共渐近线，可设为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$（$\lambda>0$，焦点在 x 轴上，$\lambda<0$，焦点在 y 轴上）.

99. 双曲线的切线方程

(1)双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上一点$P(x_0,y_0)$处的切线方程是$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

（2）过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$外一点$P(x_0,y_0)$所引两条切线的切点弦方程是$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

（3）双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$与直线$Ax+By+C=0$相切的条件是$A^2a^2-B^2b^2=c^2$.

100. 抛物线$y^2=2px$的焦半径公式

抛物线$y^2=2px(p>0)$焦半径$|CF|=x_0+\frac{p}{2}$.

过焦点弦长$|CD|=x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}=x_1+x_2+p$.

101. 抛物线$y^2=2px$上的动点可设为P$(\frac{y_\circ^{\,2}}{2p},y_\circ)$或$P(2pt^2,2pt)$或 P$(x_\circ,y_\circ)$，其中$y_\circ^2=2px_\circ$.

102. 二次函数$y=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ $(a\neq0)$的图象是抛物线：（1）顶点坐标为$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$；（2）焦点的坐标为$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2+1}{4a})$；（3）准线方程是$y=\frac{4ac-b^2-1}{4a}$.

103. 抛物线的内外部

(1)点$P(x_0,y_0)$在抛物线$y^2=2px(p>0)$的内部$\Leftrightarrow y^2<2px(p>0)$.

点$P(x_0,y_0)$在抛物线$y^2=2px(p>0)$的外部$\Leftrightarrow y^2>2px(p>0)$.

(2)点$P(x_0,y_0)$在抛物线$y^2=-2px(p>0)$的内部$\Leftrightarrow y^2<-2px(p>0)$.

点$P(x_0,y_0)$在抛物线$y^2=-2px(p>0)$的外部$\Leftrightarrow y^2>-2px(p>0)$.

(3)点$P(x_0,y_0)$在抛物线$x^2=2py(p>0)$的内部$\Leftrightarrow x^2<2py(p>0)$.

点$P(x_0,y_0)$在抛物线$x^2=2py(p>0)$的外部$\Leftrightarrow x^2>2py(p>0)$.

(4) 点$P(x_0,y_0)$在抛物线$x^2=2py(p>0)$的内部$\Leftrightarrow x^2<2py(p>0)$.

点$P(x_0,y_0)$在抛物线$x^2=-2py(p>0)$的外部$\Leftrightarrow x^2>-2py(p>0)$.

104. 抛物线的切线方程

(1)抛物线 $y^2=2px$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程是 $y_0y=p(x+x_0)$.

(2)过抛物线 $y^2=2px$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $y_0y=p(x+x_0)$.

(3) 抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 与直线 $Ax+By+C=0$ 相切的条件是 $pB^2=2AC$.

105. 两个常见的曲线系方程

(1)过曲线 $f_1(x,y)=0$, $f_2(x,y)=0$ 的交点的曲线系方程是

$f_1(x,y)+\lambda f_2(x,y)=0$ (λ 为参数).

(2) 共焦点的有心圆锥曲线系方程 $\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}=1$, 其中 $k<\max\{a^2,b^2\}$. 当 $k>\min\{a^2,b^2\}$ 时, 表示椭圆; 当 $\min\{a^2,b^2\}<k<\max\{a^2,b^2\}$ 时, 表示双曲线.

106. 直线与圆锥曲线相交的弦长公式 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 或 $|AB|=\sqrt{(1+k^2)(x_2-x_1)^2}=|x_1-x_2|\sqrt{1+\tan^2\alpha}=|y_1-y_2|\sqrt{1+\cot^2\alpha}$ (弦端点 A $(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, 由方程 $\begin{cases}y=kx+b\\F(x,y)=0\end{cases}$ 消去 y 得到 $ax^2+bx+c=0$, $\Delta>0$, α 为直线 AB 的倾斜角, k 为直线的斜率).

107. 圆锥曲线的两类对称问题

(1) 曲线 $F(x,y)=0$ 关于点 $P(x_0,y_0)$ 成中心对称的曲线是 $F(2x_0-x,2y_0-y)=0$.

(2) 曲线 $F(x,y)=0$ 关于直线 $Ax+By+C=0$ 成轴对称的曲线是

$F(x-\frac{2A(Ax+By+C)}{A^2+B^2},y-\frac{2B(Ax+By+C)}{A^2+B^2})=0$.

108. "四线"一方程

对于一般的二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, 用 x_0x 代 x^2, 用 y_0y 代 y^2, 用 $\frac{x_0y+xy_0}{2}$ 代 xy, 用 $\frac{x_0+x}{2}$ 代 x, 用 $\frac{y_0+y}{2}$ 代 y 即得方程

$Ax_0x+B\cdot\frac{x_0y+xy_0}{2}+Cy_0y+D\cdot\frac{x_0+x}{2}+E\cdot\frac{y_0+y}{2}+F=0$, 曲线的切线, 切点弦, 中点弦, 弦中点方程均是此方程得到.

109. 证明直线与直线的平行的思考途径

(1) 转化为判定共面二直线无交点;

(2) 转化为二直线同与第三条直线平行;

(3) 转化为线面平行;

(4) 转化为线面垂直;

(5) 转化为面面平行.

110. 证明直线与平面的平行的思考途径

(1) 转化为直线与平面无公共点;

(2) 转化为线线平行;

(3) 转化为面面平行.

111. 证明平面与平面平行的思考途径

(1) 转化为判定二平面无公共点;

(2) 转化为线面平行;

(3) 转化为线面垂直.

112. 证明直线与直线的垂直的思考途径

(1) 转化为相交垂直;

(2) 转化为线面垂直;

（3）转化为线与另一线的射影垂直；
（4）转化为线与形成射影的斜线垂直.

113．证明直线与平面垂直的思考途径

（1）转化为该直线与平面内任一直线垂直；
（2）转化为该直线与平面内相交二直线垂直；
（3）转化为该直线与平面的一条垂线平行；
（4）转化为该直线垂直于另一个平行平面；
（5）转化为该直线与两个垂直平面的交线垂直.

114．证明平面与平面的垂直的思考途径

（1）转化为判断二面角是直二面角；
（2）转化为线面垂直.

115. 空间向量的加法与数乘向量运算的运算律

(1) 加法交换律：**a**＋**b**=**b**＋**a**.
(2) 加法结合律：(**a**＋**b**)＋**c**=**a**＋(**b**＋**c**).
(3) 数乘分配律：λ(**a**＋**b**)=λ**a**＋λ**b**.

116. 平面向量加法的平行四边形法则向空间的推广

始点相同且不在同一个平面内的三个向量之和，等于以这三个向量为棱的平行六面体的以公共始点为始点的对角线所表示的向量.

117.共线向量定理

对空间任意两个向量 **a**、**b**(**b**≠**0**)，**a**∥**b**$\Leftrightarrow$存在实数λ使**a**=λ**b**.

P、A、B 三点共线$\Leftrightarrow AP \parallel AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$.

$AB \parallel CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$ 共线且 AB、CD 不共线$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{CD}$ 且 AB、CD 不共线.

118. 共面向量定理

向量 **p** 与两个不共线的向量 **a**、**b** 共面的$\Leftrightarrow$存在实数对 x,y，使 $p=ax+by$.

推论　空间一点 P 位于平面 MAB 内的$\Leftrightarrow$存在有序实数对 x,y，使 $\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$，或对空间任一定点 O，有序实数对 x,y，使 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$.

119. 对空间任一点 O 和不共线的三点 A、B、C，满足 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$（$x+y+z=k$），则当 $k=1$ 时，对于空间任一点 O，总有 P、A、B、C 四点共面；当 $k\neq 1$ 时，若 $O\in$ 平面 ABC，则 P、A、B、C 四点共面；若 $O\notin$ 平面 ABC，则 P、A、B、C 四点不共面.

A、B、C、D 四点共面$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 共面$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD}=(1-x-y)\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$（$O\notin$ 平面 ABC）.

120. 空间向量基本定理

如果三个向量 **a**、**b**、**c** 不共面，那么对空间任一向量 **p**，存在一个唯一的有序实数组 x，y，z，使 **p**=x**a**＋y**b**＋z**c**.

推论　设 O、A、B、C 是不共面的四点，则对空间任一点 P，都存在唯一的三个有序实数 x，y，z，使 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$.

121. 射影公式

已知向量 $\overrightarrow{AB}$=***a*** 和轴 l，**e** 是 l 上与 l 同方向的单位向量. 作 A 点在 l 上的射影 A'，作 B 点在 l 上的射影 B'，则

$A'B'=|\overrightarrow{AB}|\cos\langle \boldsymbol{a},\mathbf{e}\rangle=\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{e}$

122. 向量的直角坐标运算

设 ***a***$=(a_1,a_2,a_3)$，**b**$=(b_1,b_2,b_3)$ 则

(1) ***a***＋**b**$=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$；
(2) ***a***－**b**$=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$；

(3) λ $\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$ （λ ∈R）;

(4) $\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$；

123. 设 A(x_1,y_1,z_1)，B(x_2,y_2,z_2)，则

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

124. 空间的线线平行或垂直

设 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}(\vec{b}\neq 0)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\lambda x_2\\ y_1=\lambda y_2\\ z_1=\lambda z_2\end{cases};$$

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

125. 夹角公式

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$$\cos\langle\boldsymbol{a},\mathbf{b}\rangle=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

推论 $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\le(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$，此即三维柯西不等式.

126. 四面体的对棱所成的角

四面体 $ABCD$ 中，AC 与 BD 所成的角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{|(AB^2+CD^2)-(BC^2+DA^2)|}{2AC\cdot BD}.$$

127. 异面直线所成角

$$\cos\theta=|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle|$$

$$=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

（其中 θ（$0^\circ<\theta\le 90^\circ$）为异面直线 a,b 所成角，$\vec{a},\vec{b}$ 分别表示异面直线 a,b 的方向向量）

128. 直线 AB 与平面所成角

$$\beta=arc\sin\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{m}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{m}|}\ (\overrightarrow{m}\text{ 为平面 }\alpha\text{ 的法向量}).$$

129. 若 ΔABC 所在平面若 β 与过若 AB 的平面 α 成的角 θ，另两边 AC，BC 与平面 α 成的角分别是 θ_1、θ_2，A、B 为 ΔABC 的两个内角，则

$$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2=(\sin^2A+\sin^2B)\sin^2\theta.$$

特别地，当 $\angle ACB=90^\circ$ 时，有

$$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2=\sin^2\theta.$$

130. 若 ΔABC 所在平面若 β 与过若 AB 的平面 α 成的角 θ，另两边 AC，BC 与平面 α 成的角分别是 θ_1、θ_2，A'、B' 为 ΔABO 的两个内角，则

$$\tan^2\theta_1+\tan^2\theta_2=(\sin^2A'+\sin^2B')\tan^2\theta.$$

特别地，当 $\angle AOB=90^\circ$ 时，有

$$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2=\sin^2\theta.$$