广东省2024届高三“百日冲刺”联合学业质量监测

数学试卷

考生注意：

1. 满分150分，考试时间120分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
3. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $A=\{x|-1<x<1\}$，$B=\{x|x^2+x-6<0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-2,-1,0,1\}$　　B. $\{0\}$

C. $\{x|-3<x<2\}$　　D. $\{x|-1<x<1\}$

2. 已知复数 $z=\frac{1-i}{1+i}+2i^4$，则在复平面内 z 对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知随机变量 X 的分布列如下：

X	1	2
P	a	b

则 $E(X)=\frac{4}{3}$ 是 $D(X)=\frac{2}{9}$ 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 设点 P 在曲线 $y=e^x$ 上，点 Q 在直线 $y=\frac{1}{e}x$ 上，则 $|PQ|$ 的最小值为

A. $\frac{1}{\sqrt{e^2+1}}$　　B. $\frac{2}{\sqrt{e^2+1}}$　　C. $\frac{e}{\sqrt{e^2+1}}$　　D. $\frac{3}{\sqrt{e^2+1}}$

5. 已知点 P,Q 分别在平面 $ABCD$ 的两侧，四棱锥 $P-ABCD$ 与四棱锥 $Q-ABCD$ 的所有侧棱长均为2，则下列结论正确的是

A. 四边形 $ABCD$ 可能是 $AB=AC=2$ 的菱形

B. 四边形 $ABCD$ 一定是正方形

C. 四边形 $ABCD$ 不可能是直角梯形

D. 平面 APQ 不一定与平面 $ABCD$ 垂直

6. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，P 为椭圆 C 上一点，且 $|PF_1|=4|PF_2|$，则椭圆 C 的离心率的取值范围是

A. $[\frac{1}{5},\frac{2}{5})$ B. $[\frac{2}{5},\frac{3}{5})$

C. $[\frac{2}{5},1)$ D. $[\frac{3}{5},1)$

7. 已知 $\cos^2\alpha-\cos^2\beta=-\frac{1}{12}$，$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{4}$，则 $\cos(2\alpha+2\beta)=$

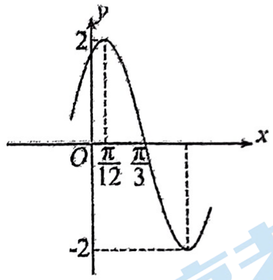
A. $-\frac{7}{9}$ B. $\frac{7}{9}$ C. $-\frac{2}{9}$ D. $\frac{2}{9}$

8. 已知函数 $h(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且满足 $h(x+1)+h(x-1)=2$，$h(2-x)$ 是偶函数，$h(2)=0$，若 $n\in\mathbf{Z}$，则 $\sum\limits_{n=-103}^{103}h(n)=$

A. 202 B. 204 C. 206 D. 208

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，下列说法正确的是



A. 函数 $y=f(x)$ 的周期为 π

B. 函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{4\pi}{3},0)$ 对称

C. 函数 $y=f(x)$ 在 $[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}]$ 单调递减

D. 将该图象先向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，再把图象上所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍(纵坐标不变)，可得 $y=2\sin x$ 的图象

10. 已知 O 为坐标原点，F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，点 $P(4,4)$，直线 $l:x=my+1$ 交抛物线 C 于 A,B 两点(不与点 P 重合)，则以下说法正确的是

A. $|FA|\geqslant 1$ B. 存在实数 m，使得 $\angle AOB<\frac{\pi}{2}$

C. 若 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，则 $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. 若直线 PA 与 PB 的倾斜角互补，则 $m=-2$

11. 将圆柱 O_1O_2 的下底面圆 O_1 置于球 O 的一个水平截面内，恰好使得 O_1 与水平截面圆的圆心重合，圆柱 O_1O_2 的上底面圆 O_2 的圆周始终与球 O 的内壁相接(球心 O 在圆柱 O_1O_2 内部)．已知球 O 的半径为 3，$OO_1=\frac{3}{2}$．若 R 为上底面圆 O_2 的圆周上任意一点，设 RO 与圆柱 O_1O_2 的下底面所成的角为 α，圆柱 O_1O_2 的体积为 V，则

A. α 可以取到 $(0,\frac{\pi}{2})$ 中的任意一个值 B. $V=\frac{27\pi}{2}\cos^2\alpha(1+2\sin\alpha)$

C. V 的值可以是任意小的正数 D. $V_{\max}=\frac{81\pi}{4}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. $(a+x)(1-x)^{2\,024}$ 展开式中 $x^{2\,024}$ 的系数为 $-2\,023$，则 a 的值为________.

13. 等差数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=1-2n$，其前n项和为S_n，则数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$的前 100 项的和为________.

14. 已知平面向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{e}$，满足$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{e}|=1$，若$\boldsymbol{a}^2-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}+8=0$，则$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{e}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{c}^2$的最大值是________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤。

15.（本小题满分 13 分）

设锐角三角形ABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$b-c\cos A=2a\cos B\cos C$.

(1)求$\cos B$；

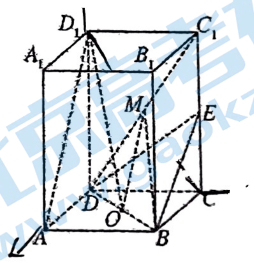
(2)若点D在AC上（与A,C不重合），且$C=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle ADB=2\angle CBD$，求$\dfrac{CD}{AD}$的值.

16.（本小题满分 15 分）

如图，在正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=2$，$AA_1=2\sqrt{2}$，O、M、E分别为BD、C_1D、CC_1的中点.

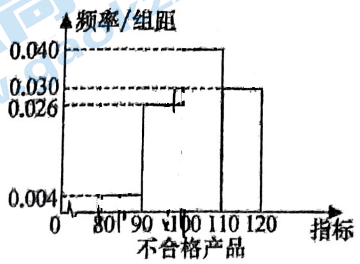
(1)证明：$OM\parallel AD_1$；

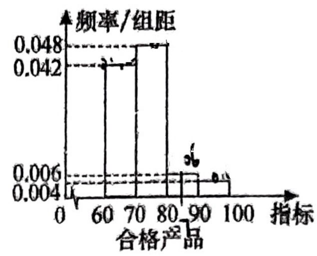
(2)求平面MBD与平面EBD夹角的余弦值.



17.（本小题满分 15 分）

某工厂生产某种电子产品配件，关键环节是需要焊接“接线盒”，焊接是否成功直接导致产品“合格”与“不合格”，公司检验组经过大量后期出厂检测发现“不合格”产品和“合格”产品的性能指标有明显差异，得到如下的“不合格”产品和“合格”产品该指标的频率分布直方图：





利用该指标制定一个检测标准，需要确定临界值 k，将该指标大于 k 的产品判定为“不合格”，小于或等于 k 的产品判定为“合格”. 此检测标准的漏检率是将“不合格”产品判定为“合格”产品的概率，记为 $f(k)$；错检率是将“合格”产品判定为“不合格”产品的概率，记为 $g(k)$. 假设数据在组内均匀分布，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率.

(1)当漏检率 $f(k)=2.8\%$时，求临界值 k 和错检率 $g(k)$；

(2)设函数 $h(k)=f(k)+g(k)$，当 $k\in[80,100]$时，求 $h(k)$的解析式，并求 $h(k)$在区间$[80,100]$的最小值.

18.(本小题满分 17 分)

已知双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2，直线 $l:y=kx(-b<k<b)$与双曲线 Γ 交于 A、B 两点，M 是双曲线 Γ 上一点(M 与 A、B 不重合)，直线 AM、BM 的斜率分别为 k_{AM},k_{BM}，且$||MF_1|-|MF_2||=2,k_{AM}\cdot k_{BM}=2$.

(1)求双曲线 Γ 的标准方程；

(2)已知直线 $l':y=tx+m(t>0)$，且与双曲线 Γ 交于 C,D 两点，N 为 CD 的中点，O 为坐标原点，且$|ON|=2\sqrt{5}$，若直线 l'与圆 $x^2+y^2=b^2$相切，求直线 l'的方程.

19.(本小题满分 17 分)

已知函数 $f(x)=-\cos x,g(x)=\frac{x^2}{2}-1,x\in[0,+\infty)$.

(1)判断 $g(x)\geqslant f(x)$是否成立，并给出理由；

(2)①证明：当 $0<m<n<\frac{\pi}{2}$时，$\frac{\sin m-\sin n}{m-n}>\cos n$；

②证明：当 $a_i=\frac{1}{2^i}(i\in\mathbf{N}^*)$，$k_i=\frac{f'(a_{i+1})-f'(a_i)}{a_{i+1}-a_i}(i=1,2,\cdots,n-1)$时，$\sum_{i=1}^{n-1}k_i>\frac{6n-7}{6}$.