2023 北京大兴一中高三 10 月月考

数　学

一、选择题（每题 4 分，共 40 分）

1.已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|\ x+1<0\},B=\{x|\ x-3<0\}$，那么集合 $(\complement_U A)\cap B=$（　）

A. $\{x|-1\le x<3\}$　　B. $\{x|-1<x<3\}$

C. $\{x|\ x<-1\}$　　D. $\{x|\ x>3\}$

2. 某中学的学生积极参加体育锻炼，其中有 96%的学生喜欢足球或游泳，60%的学生喜欢足球，82%的学生喜欢游泳，则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是（　）

A. 62%　　B. 56%

C. 46%　　D. 42%

3. 不等式 $x-\dfrac{1}{x}>0$ 成立的充分不必要条件是（　）

A. $x>1$　　B. $x>-1$　　C. $x<-1$ 或 $0<x<1$　　D. $-1<x<0$ 或 $x>1$

4. 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3,x\le 0\\ -2+\ln x,x>0\end{cases}$ 的零点个数为（　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. 下列函数中，同时满足①对于定义域内的任意 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，②存在区间 D，$f(x)$ 在区间 D 上单调递减的函数是（　）

A. $y=\sin x$　　B. $y=x^3$　　C. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$　　D. $y=\ln x$

6. 将函数 $y=\cos\left(x-\dfrac{5\pi}{6}\right)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再将所得图象向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位，则所得函数图象的解析式是（　）

A. $y=\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$　　B. $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

C. $y=-\sin 2x$　　D. $y=\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{2\pi}{3}\right)$

7. “$a<2$ 且 $b<2$”是“$a+b<4$”的（　）条件

A. 充要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分不必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 若满足条件 $C=60^\circ, AB=\sqrt{3}, BC=a$ 的△ABC 有两个，那么 a 的取值范围是（　）

A. $(1,\sqrt{2})$　　B. $(\sqrt{2},\sqrt{3})$　　C. $(\sqrt{3},2)$　　D. $(1,2)$

9. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上周期为 2 的奇函数，当 $x\in(0,1)$ 时， $f(x)=\lg\dfrac{1}{1-x}$，则 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上是（　）.

A. 增函数且 $f(x)<0$

B. 增函数且 $f(x)>0$

C. 减函数且 $f(x)<0$

D. 减函数且 $f(x)>0$

10. 已知函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$，且 $a\le b\le c$，下面四个判断，正确的个数为（　）个.

① $f'(b)\le 0$；

②若 $b=\dfrac{a+c}{2}$，则 $f(x)$ 关于 $(b,0)$ 点对称；

③若 $b=\dfrac{a+c}{2}$，则对于 $\forall x\in \mathbf{R}$， $f'(x)\ge f'(b)$；

④若 $b\le\dfrac{a+c}{2}$，则 $f'(c)\ge f'(a)$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二、填空题（每题 5 分，共 25 分）

11. 已知命题 p：$\exists x\in$R，$x^2+2ax+a\le 0$，则 $\neg p$ 为________________.

12. 已知角 α 的终边经过点 $-1,2$ ，则 $\sin\alpha=$__________， $\cos2\alpha=$__________.

13. 设 $2^a=5^b=m$，且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=2$，则 $m=$________.

14. 函数 $y=\sqrt{1-\tan x}$ 的定义域是________________.

15. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若对于任意 $x_1\in D$，存在 $x_2\in D$，使得 $f(x_1)f(x_2)=1$，则称函数 $f(x)$ 具有性质 M，给出下列四个结论：

①函数 $y=x^3-x$ 不具有性质 M；

②函数 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 具有性质 M；

③若函数 $y=\log_8(x+2)$， $x\in[0,t]$ 具有性质 M，则 $t=510$；

④若函数 $y=\dfrac{3\sin x+a}{4}$ 具有性质 M，则 $a=5$.

则正确的序号为__________.

三、解答题（共 85 分）

16. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi), A>0, \omega>0, |\varphi|<\pi$，若该函数的一个最高点的坐标为 $\left(\dfrac{\pi}{6},3\right)$，与其

相邻的对称中心坐标为$\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$.

（1）求函数$f\left(x\right)$解析式；

（2）求函数$f\left(x\right)$的单调增区间.

17. 在①$ac=\sqrt{3}$，②$c\sin A=3$，③$c=\sqrt{3}b$这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求c的值；若问题中的三角形不存在，说明理由.

问题：是否存在$\triangle ABC$，它的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$\sin A=\sqrt{3}\sin B$，$C=\frac{\pi}{6}$，________?

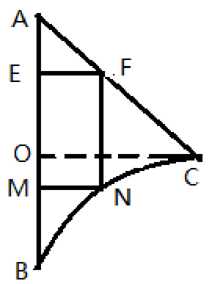
注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18. 已知$f\left(x\right)=\ln x$，

（1）求$\frac{f\left(x\right)}{x}$的极值；

（2）若函数$y=f\left(x\right)-ax$存在两个零点，求a的取值范围.

19. 某地政府为科技兴市，欲将如图所示的一块不规则的非农业用地规划建成一个矩形的高科技工业园区以及相应配套设施，已知AOC为等腰直角三角形，且$OA=OB=OC=1\text{km}$，曲线BC是以点C为顶点且开口向下的抛物线的一段.如果要使矩形$EFMN$的顶点F、N分别在线段AC及曲线BC上，设矩形一边长$EF=x\text{km}$；



（1）求出矩形面积S与x的解析式；

（2）因规划要求，令$EF=t\text{km}(0<t<1)$问应如何规划才能使矩形工业园区的用地面积最大？并求出相应的用地面积.

20.已知函数$f(x)=1+a\sqrt{x}-\sqrt{1+ax}(a\neq 0)$.

（1）若$f(x)$的图象在$x=1$处的切线l的斜率为$\frac{a}{4}$，求直线l的方程；

（2）若对于任意的$x\in[0,2]$，$f(x)\leq 0$恒成立，求实数a的取值范围.

21. 已知由实数组成的数组$(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$满足下面两个条件：

①$\sum_{i=1}^{n}x_i=0$；②$\sum_{i=1}^{n}|x_i|=1$.

（1）当 $n=2$ 时，求 x_1， x_2 的值；

（2）当 $n=3$ 时，求证 $\left|3x_1+2x_2+x_3\right|\le 1$；

（3）设 $a_1\ge a_2\ge a_3\ge\cdots\ge a_n$，且 $a_1>a_n\left(n\ge 2\right)$，求证：$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right|\le\frac{1}{2}\left(a_1-a_n\right)$.

参考答案

一、选择题（每题 4 分，共 40 分）

1.【答案】A

【分析】分别求得 $A=\{x|\ x<-1\},B=\{x|\ x<3\}$，结合集合的补集与并集的运算，即可求解.

【详解】由集合 $A=\{x\,|\,x+1<0\}=\{x\,|\,x<-1\},B=\left\{x\,|\,x-3<0\right\}=\{x\,|\,x<3\}$，

可得 $\complement_U A=\{x\,|\,x\geq -1\}$，所以 $\left(\complement_U A\right)\cap B=\{x\,|\,-1\leq x<3\}$.

故选：A.

2.【答案】C

【分析】由容斥原理即可得解..

【详解】由题意，该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例为

$0.6+0.82-0.96=0.46$

所以该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例为 46%.

故选：C.

3.【答案】A

【分析】易知不等式 $x-\dfrac{1}{x}>0$ 的解集为 $(-1,0)\cup(1,+\infty)$,据此确定其成立的一个充分不必要条件即可.

【详解】不等式 $x-\dfrac{1}{x}>0$ 即 $\dfrac{x^2-1}{x}>0$，等价于 $x(x+1)(x-1)>0$，

由穿根法可得不等式的解集为 $(-1,0)\cup(1,+\infty)$，

结合选项可知其成立的一个充分不必要条件是 $x>1$.

本题选择 *A* 选项.

【点睛】本题主要考查分式不等式的解法，充分必要条件的判定方法等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

4.【答案】C

【分析】结合分段函数，在各自的范围判断零点个数即可.

【详解】当 $x\leq 0$ 时，令 $x^2+2x-3=0$，解得：$x=-3$；

当 $x>0$ 时，$f(x)=\ln x-2$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $f(1)=-2<0, f\left(\mathrm{e}^3\right)=1>0$，所以 $f(1)\cdot f\left(\mathrm{e}^3\right)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且只有 1 个零点；

综上，$f(x)$ 在 R 上有 2 个零点.

故选：C

5.【答案】A

【分析】

分别判断每个函数的奇偶性和单调性即可.

【详解】对于 A，$\because f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)$，且存在区间$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，$y=\sin x$单调递减，

故 A 正确；

对于 B，$\because y=x^3$是增函数，不存在减区间，故 B 错误；

对于 C，$\because f(-x)=\frac{1}{x^2+1}=f(x)$，故 C 错误；

对于 D，$\because y=\ln x$在定义域$(0,+\infty)$是增函数，不存在减区间，故 D 错误.

故选：A.

6.【答案】D

【分析】根据图象平移过程写出解析式即可.

【详解】将原函数所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），则$y=\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{5\pi}{6}\right)$，

再将所得图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位，则$y=\cos[\frac{1}{2}(x+\frac{\pi}{3})-\frac{5\pi}{6}]=\cos(\frac{1}{2}x-\frac{2\pi}{3})$.

故选：D

7.【答案】C

【分析】根据题意，分别验证充分性以及必要性，即可得到结果.

【详解】若$a<2$且$b<2$，则$a+b<4$，故充分性满足；

但是由$a+b<4$推不出$a<2$且$b<2$，例如$a=0,b=3$，故必要性不满足；

所以“$a<2$且$b<2$”是“$a+b<4$”的充分不必要条件.

故选：C

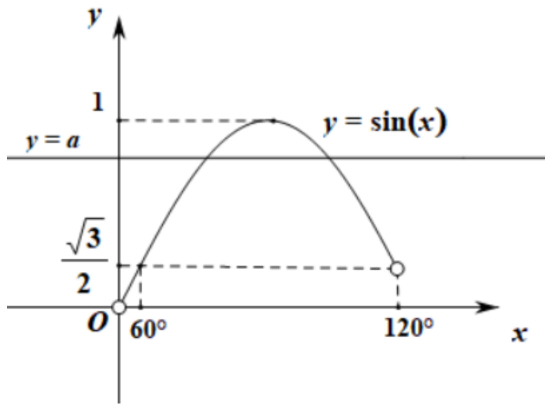
8.【答案】C

【分析】根据正弦定理得出$\sin A=\frac{a}{2}$，由于满足条件的$\triangle ABC$有两个，则函数$y=\sin x,x\in(0°,120°)$与函数$y=\frac{a}{2},a>0$的图象有两个交点，画出图象，即可得出a的取值范围.

【详解】根据正弦定理可知$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$，代入可求得$\sin A=\frac{a}{2}$

因为满足条件的$\triangle ABC$有两个，所以 A 有两个角

即函数$y=\sin x,x\in(0°,120°)$与函数$y=\frac{a}{2},a>0$的图象有两个交点，如下图所示



由图可知，$\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{a}{2}<1$，所以 $a\in\left(\sqrt{3},2\right)$

故选：C

【点睛】本题主要考查了根据三角形解的个数求参数的范围，属于中档题.

9.【答案】A

【分析】根据题意，由函数的奇偶性可得 $x\in\left(-1,0\right)$ 的解析式，再由其周期即可得到 $x\in\left(1,2\right)$ 的图像，即可判断.

【详解】因为 $f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的奇函数，所以 $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，

当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$f\left(x\right)=\lg\frac{1}{1-x}$，设 $-x\in\left(0,1\right)$，则 $x\in\left(-1,0\right)$，

所以 $f\left(-x\right)=\lg\frac{1}{1+x}=-f\left(x\right)$，则 $f\left(x\right)=-\lg\frac{1}{1+x}=\lg\left(1+x\right)$，

且 $0<1+x<1$，所以 $f\left(x\right)=\lg\left(1+x\right)<0$，

又 $f\left(x\right)$ 是周期为 2 的函数，

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(1,2\right)$ 的图像与 $\left(-1,0\right)$ 的图像相同，且为增函数，且 $f\left(x\right)<0$.

故选：A

10.【答案】D

【分析】对于①，求函数 $f'\left(x\right)$，代入 x = b 验证符号得出结果；对于②，根据对称性结论验证 $f\left(2b-x\right)=-f\left(x\right)$ 是否成立；对于③展开 $f'\left(x\right)$，根据二次函数最值进行计算得出结果；对于④利用作差比较法得出结果.

【详解】由已知 $f'\left(x\right)=\left(x-a\right)\left(x-b\right)+\left(x-b\right)\left(x-c\right)+\left(x-c\right)\left(x-a\right)$，

对于①，$f'\left(b\right)=\left(b-a\right)\left(b-b\right)+\left(b-b\right)\left(b-c\right)+\left(b-c\right)\left(b-a\right)=\left(b-c\right)\left(b-a\right)$，

因为 $a\le b\le c$，所以 $b-c\le 0,b-a\ge 0$，$f'\left(b\right)\le 0$，故①正确；

对于②，若 $b=\dfrac{a+c}{2}$，则 $f(x)=(x-a)\left(x-\dfrac{a+c}{2}\right)(x-c)$，因为

$$f(2b-x)=(2b-x-a)\left(2b-x-\frac{a+c}{2}\right)(2b-x-c)$$

$$=(a+c-x-a)\left(a+c-x-\frac{a+c}{2}\right)(a+c-x-c)$$

$$=(c-x)\left(\frac{a+c}{2}-x\right)(a-x)=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 关于 $(b,0)$ 点对称，故②正确；

对于③，将 $f'(x)$ 展开可得 $f'(x)=3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ac$，

又抛物线开口向上，故 $f'(x)_{\min}=f'\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)$，当 $b=\dfrac{a+c}{2}$ 时，$\dfrac{a+b+c}{3}=b$，

所以 $f'(x)_{\min}=f'(b)$，则对于 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f'(x)\geq f'(b)$，故③正确；

对于④，$f'(a)-f'(c)=(a-b)(a-c)-(c-a)(c-b)=(a-c)(a+c-2b)$，

因为由 $b\leq\dfrac{a+c}{2}$ 得 $2b\leq a+c$，即 $a-c-2b\geq0$，由 $a\leq c$ 得 $a-c\leq0$，

所以 $f'(a)-f'(c)\leq0$，即 $f'(c)\geq f'(a)$，故④正确.

故选：D.

二、填空题（每题 5 分，共 25 分）

11.【答案】$\forall x\in R$，$x^2+2ax+a>0$.

【分析】把存在量词改为全称量词，然后再对后面的命题进行否定.

【详解】由题意得 $\neg p$ 为“$\forall x\in R$，$x^2+2ax+a>0$”.

【点睛】本题考查含有量词的命题的否定，解题时注意否定的方法，即改变量词并同时对命题进行否定.

12.【答案】 ①. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ②. $-\dfrac{3}{5}$##-0.6

【分析】根据题意，由三角函数的定义可得 $\sin\alpha$，再由二倍角公式即可得到 $\cos2\alpha$.

【详解】因为角 α 的终边经过点 $(-1,2)$，则 $\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

$$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=1-\frac{8}{5}=-\frac{3}{5}$$

故答案为：$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$；$-\dfrac{3}{5}$

13.【答案】$\sqrt{10}$

【分析】首先指数式化为对数式，再根据对数运算公式计算.

【详解】因为 $2^a=5^b=m>0$，所以 $a=\log_2 m$，$b=\log_5 m$，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_m 2+\log_m 5=\log_m 10=2$.所以 $m^2=10$，所以 $m=\sqrt{10}$.

故答案为：$\sqrt{10}$

【点睛】本题考查指对数运算，重点考查计算能力，属于基础题型.

14.【答案】$(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi]\left(k\in Z\right)$

【详解】试题分析：由 $1-\tan x\geq 0$ 得：$-\frac{\pi}{2}+k\pi<x\leq\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in Z$，所以函数的定义域为 $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi]\quad k\in Z$.

考点：函数定义域的求法.

点评：求函数定义域的最后结果一定要写成集合或区间的形式．比如此题，要是写成 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<x\leq\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in Z$ 不得分.

15.【答案】①③

【分析】对每个选项中的具体函数，先求定义域和值域，再结合题中函数性质 M 的定义进行判断或特殊值验证进行说明，即可判断得到答案.

【详解】解：由题意，函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若对任意 $x_1\in D$，存在 $x_2\in D$，使得 $f(x_1)\cdot f(x_2)=1$，则称函数 $y=f(x)$ 具有性质 M.

对于①，函数 $y=x^3-x$，定义域为 R，当 $x_1=0\in R$ 时，显然不存在 $x_2\in R$，使得 $f(x_1)\cdot f(x_2)=1$，故不具备性质 M，故选项①正确；

对于②，函数 $y=f\left(x\right)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，定义域为 R，关于原点对称，且满足 $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，故函数为偶函数，$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\geq\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=1$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，即值域为 $[1,\ +\infty)$，

对任意的 $x_1>0$，$f(x_1)>1$，要使得 $f(x_1)\cdot f(x_2)=1$，则需 $f(x_2)<1$，

而不存在 $x_2\in R$，使得 $f(x_2)<1$，故不具备性质 M，故选项②错误；

对于③，函数 $y=\log_8(x+2)$ 在 $[0,\ t]$ 上是单调递增函数，定义域为 $[0,\ t]$，其值域为 $[\log_8 2,\ \log_8(t+2)]$，

要使得其具有 M 性质，则对任意的 $x_1\in[0,\ t]$，$f(x_1)\in[\log_8 2,\ \log_8(t+2)]$，总存在 $x_2\in[0,\ t]$，

$f(x_2)=\frac{1}{f(x_1)}\in[\frac{1}{\log_8(t+2)},\frac{1}{\log_8 2}]\subseteq[\log_8 2,\ \log_8(t+2)]$，

即$\begin{cases}\dfrac{1}{\log_8(t+2)}\geqslant\log_8 2\\ \dfrac{1}{\log_8 2}\leqslant\log_8(t+2)\end{cases}$，即$\begin{cases}\log_8 2\cdot\log_8(t+2)\leqslant 1\\ \log_8 2\cdot\log_8(t+2)\geqslant 1\end{cases}$，所以$\log_8 2\cdot\log_8(t+2)=1$，

故$\log_8(t+2)=\dfrac{1}{\log_8 2}=\log_2 8=3$，所以$t+2=8^3$，故$t=510$，故选项③正确；

对于④，函数$y=\dfrac{3\sin x+a}{4}$具有性质M，定义域为R，使得$\sin x\in[-1,\ 1]$，

一方面函数值不可能为零，即$3\sin x+a\neq 0$对任意的x恒成立，而$3\sin x\in[-3,\ 3]$，故$a>3$或$a<-3$，

另一方面，$y=\dfrac{4}{3\sin x+a}$的值域是$y=\dfrac{3\sin x+a}{4}$值域的子集，$y=\dfrac{3\sin x+a}{4}$的值域为$[\dfrac{a-3}{4},\dfrac{a+3}{4}]$，

$y=\dfrac{4}{3\sin x+a}$的值域为$[\dfrac{4}{a+3},\dfrac{4}{a-3}]$，

要满足题意，只需$\begin{cases}\dfrac{4}{a+3}\geq\dfrac{a-3}{4}\\ \dfrac{4}{a-3}\leq\dfrac{a+3}{4}\end{cases}$，

当$a<-3$时，$\dfrac{4}{a+3}\cdot\dfrac{4}{a-3}\leq 1$，$\dfrac{4}{a+3}\cdot\dfrac{4}{a-3}\geq 1$，即$\dfrac{4}{a+3}\cdot\dfrac{4}{a-3}=1$；

当$a>3$时，$\dfrac{4}{a+3}\cdot\dfrac{4}{a-3}\geq 1$，$\dfrac{4}{a+3}\cdot\dfrac{4}{a-3}\leq 1$，即$\dfrac{4}{a+3}\cdot\dfrac{4}{a-3}=1$；

故$\dfrac{4}{a+3}\cdot\dfrac{4}{a-3}=1$，即$(a-3)(a+3)=16$，即$a^2-9=16$，解得$a=\pm 5$，故选项④错误．

故正确结论的序号是①③．

故答案为：①③．

三、解答题（共 85 分）

16.【答案】（1）$f\left(x\right)=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

（2）$\left[k\pi-\dfrac{\pi}{3},k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right],k\in\mathbf{Z}$

【分析】（1）根据题意，由条件可得 A 以及周期T，从而得到ω，再代入点的坐标即可得到φ；

（2）根据题意，由正弦型函数的单调区间代入计算，即可得到结果．

【小问 1 详解】

由题意可得，$A=3$，且$\dfrac{T}{4}=\dfrac{\pi}{6}-\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\pi}{4}$，则$T=\pi=\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\dfrac{2\pi}{\omega}$，所以$\omega=2$，

所以$f\left(x\right)=3\sin\left(2x+\varphi\right)$，将点$\left(\dfrac{\pi}{6},3\right)$代入，可得$3\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{6}+\varphi\right)=3$，

即 $\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，且 $|\varphi|<\pi$，则 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，

所以 $f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

【小问 2 详解】

由（1）可得 $f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{3}, k\pi+\frac{\pi}{6}\right], k\in\mathbf{Z}$.

17.【答案】详见解析

【分析】方法一：由题意结合所给的条件，利用正弦定理角化边，得到 a,b 的比例关系，根据比例关系，设出长度长度，由余弦定理得到 c 的长度，根据选择的条件进行分析判断和求解.

【详解】[方法一]【最优解】：余弦定理

由 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$ 可得：$\frac{a}{b}=\sqrt{3}$，不妨设 $a=\sqrt{3}m, b=m(m>0)$，

则：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=3m^2+m^2-2\times\sqrt{3}m\times m\times\frac{\sqrt{3}}{2}=m^2$，即 $c=m$

若选择条件①：

据此可得：$ac=\sqrt{3}m\times m=\sqrt{3}m^2=\sqrt{3}$，$\therefore m=1$，此时 $c=m=1$.

若选择条件②：

据此可得：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{m^2+m^2-3m^2}{2m^2}=-\frac{1}{2}$，

则：$\sin A=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，此时：$c\sin A=m\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$，则：$c=m=2\sqrt{3}$.

若选择条件③：

可得 $\frac{c}{b}=\frac{m}{m}=1$，$c=b$，与条件 $c=\sqrt{3}b$ 矛盾，则问题中的三角形不存在.

[方法二]：正弦定理

由 $C=\frac{\pi}{6}, A+B+C=\pi$，得 $A=\frac{5\pi}{6}-B$.

由 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$，得 $\sin\left(\frac{5\pi}{6}-B\right)=\sqrt{3}\sin B$，即 $\frac{1}{2}\cos B+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B=\sqrt{3}\sin B$，

得 $\tan B=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 由于 $0<B<\pi$，得 $B=\frac{\pi}{6}$. 所以 $b=c, A=\frac{2\pi}{3}$.

若选择条件①：

由$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，得$\dfrac{a}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}=\dfrac{c}{\sin\dfrac{\pi}{6}}$，得$a=\sqrt{3}c$．

解得$c=b=1,a=\sqrt{3}$．所以，选条件①时问题中的三角形存在，此时$c=1$．

若选择条件②：

由$c\sin A=3$，得$c\sin\dfrac{2\pi}{3}=3$，解得$c=2\sqrt{3}$，则$b=c=2\sqrt{3}$．

由$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，得$\dfrac{a}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}=\dfrac{c}{\sin\dfrac{\pi}{6}}$，得$a=\sqrt{3}c=6$．

所以，选条件②时问题中的三角形存在，此时$c=2\sqrt{3}$．

若选择条件③：

由于$c=\sqrt{3}b$与$b=c$矛盾，所以，问题中的三角形不存在．

【整体点评】方法一：根据正弦定理以及余弦定理可得a,b,c的关系，再根据选择的条件即可解出，是本题的通性通法, 也是最优解；

方法二：利用内角和定理以及两角差的正弦公式，消去角A，可求出角B，从而可得$b=c,A=\dfrac{2\pi}{3},B=C=\dfrac{\pi}{6}$，再根据选择条件即可解出.

18.【答案】(1）极大值为$g(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，无极小值；

（2）$(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}})$.

【分析】(1）利用导数研究$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$的单调性，即可求极值；

（2）问题化为$y=a$与$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$有两个交点，结合（1）结论及$g(x)$性质确定参数范围.

【小问1详解】

令$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\ln x}{x}$且$x\in(0,+\infty)$，则$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

当$0<x<\mathrm{e}$时$g'(x)>0$，当$x>\mathrm{e}$时$g'(x)<0$，

所以$g(x)$在$(0,\mathrm{e})$上递增，$(\mathrm{e},+\infty)$上递减，

故$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$的极大值为$g(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，无极小值.

【小问2详解】

由题设，$a=\dfrac{\ln x}{x}$有两个根，即$y=a$与$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$有两个交点，

由（1）知：$g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上递增，$(\mathrm{e},+\infty)$ 上递减，

在 $(0,1)$ 上 $g(x)<0$，在 $(1,+\infty)$ 上 $g(x)>0$，且当 x 趋向正无穷时 $g(x)$ 趋向于 0，

综上，只需 $0<a<g(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，即 $a\in(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}})$.

19.【答案】（1）$S(x)==x^3-3x^2+2x(0<x<1)$

（2）当 $t=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(\mathrm{km})$ 时，矩形工业园区的用地面积最大，面积的最大值为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\mathrm{km}^2$.

【分析】（1）先利用待定系数法求出抛物线 BC 段方程，再表示边 EF,EM 长，得出矩形面积；

（2）利用导数求函数的最值得出结果.

【小问 1 详解】

以 O 为坐标原点，为 OC 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，

因为 BC 段曲线方程为抛物线，$C(1,0)$，所以设曲线方程为 $y=a(x-1)^2$，

因为 $OB=1\mathrm{km}$，所以，$B(0,-1)$，

将点的坐标代入得，解得 $a=-1$，

所以 $y=-(x-1)^2$，$x\in[0,1]$.

由题意：$|OA|=|OC|=1\mathrm{km}$，$|AE|=|EF|=x\mathrm{km}$，$|EO|=1-x$；

$|OM|=\left|-(x-1)^2\right|=(x-1)^2$，$|EM|=|EO|+|OM|=1-x+(x-1)^2$，

$S(x)=|EF|\cdot|EM|=x\left[1-x+(x-1)^2\right]=x^3-3x^2+2x\ (0<x<1)$，

所以 $S(x)=x^3-3x^2+2x(0<x<1)$.

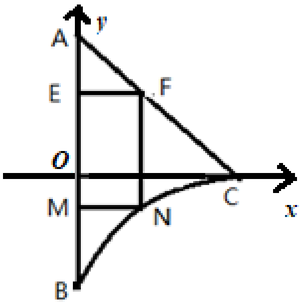
【小问 2 详解】

已知 $EF=t\mathrm{km}(0<t<1)$，$S(t)=t^3-3t^2+2t(0<t<1)$.

$S'(t)=3t^2-6t+2$，令 $S'(t)=0$，解得 $0<t_1=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<1, t_2=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}>1$，

t	$\left(0,1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)$
$S'(t)$	+	0	−
$S(t)$	增	极大值	减

所以当 $t=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(\mathrm{km})$ 时，矩形工业园区的用地面积最大，面积的最大值为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\mathrm{km}^2$.



20.【答案】(1) $l: y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$；(2) $1-\sqrt{2}\le a<0$.

【分析】(1) 求导，由 $f'(1)=\frac{a}{4}$ 可得 $a=3$，可求得 $f(1)=2$，即得解；

(2) 先由 $f(1)\le 0$ 且 $f(2)\le 0$，求得 $1-\sqrt{2}\le a<0$，求导分析单调性可得 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{1-a}\right]$ 上单调递减，在 $\left[\frac{1}{1-a},2\right]$ 上单调递增，$f(x)_{\max}=\max\{f(0),f(2)\}$，要使 $f(x)\le 0$ 恒成立，只需 $f(x)_{\max}\le 0$，

即 $\begin{cases} f(0)\le 0 \\ f(2)\le 0 \end{cases}$，解不等式即可

【详解】(1) $f'(x)=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{1+ax}}\right)$，

$\therefore f'(1)=\frac{a}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+a}}\right)=\frac{a}{4}$，

$\because a\ne 0$，$\therefore 1-\frac{1}{\sqrt{1+a}}=\frac{1}{2}$，

解得 $a=3$；

$\therefore f(1)=2$，切点为 $(1,2)$，斜率为 $\frac{3}{4}$，

所以切线 $l: y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$.

(2) 因为 $x\in[0,2]$，$f(x)\le 0$ 恒成立

所以 $f(1)\le 0$ 且 $f(2)\le 0$，解得 $1-\sqrt{2}\le a<0$，

$f'(x)=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{1+ax}}\right)$

令 $f'(x)=0\therefore x=\frac{1}{1-a}$，因为 $1-\sqrt{2}\le a<0$，所以 $\frac{1}{1-a}\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，

令 $f'(x)>0\Rightarrow\frac{a}{2\sqrt{x}}>\frac{a}{2\sqrt{1+ax}}\Rightarrow\sqrt{1+ax}<\sqrt{x}\Rightarrow(1-a)x>1\Rightarrow x>\frac{1}{1-a}$，

令 $f'(x)<0\Rightarrow x<\dfrac{1}{1-a}$

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{1-a}\right]$ 上单调递减，在 $\left[\dfrac{1}{1-a},2\right]$ 上单调递增，

$\therefore f(x)_{\max}=\max\{f(0),f(2)\}$，

要使 $f(x)\le 0$ 恒成立，只需 $f(x)_{\max}\le 0$，

即 $\begin{cases}f(0)\le 0\\ f(2)\le 0\end{cases}$，所以 $1-\sqrt{2}\le a<0$.

21.【答案】（1）$\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}\\ x_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}\\ x_2=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

（2）证明见解析　（3）证明见解析

【分析】（1）解方程组，求出答案；

（2）方法一：变形得到 $|3x_1+2x_2+x_3|=|x_1-x_3|\le|x_1|+|x_3|=1-|x_2|\le 1$；

方法二：变形得到 $|3x_1+2x_2+x_3|=|x_1-x_3|\le|x_1|+|x_3|\le|x_1|+|x_2|+|x_3|=1$；

（3）方法一：先利用绝对值三角不等式得到 $|a_1+a_n-2a_i|\le|a_1-a_n|$，再结合 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$，$\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=1$ 证明出不等式；

方法二：令 $S_i=\sum\limits_{k=1}^{i}x_k\left(i=1,2,\cdots,n\right)$，则 $-\dfrac{1}{2}\le S_i\le\dfrac{1}{2}$，$S_n=0$，由阿贝尔恒等式进行证明.

【小问 1 详解】

根据题意，得 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\ |x_1|+|x_2|=1\end{cases}$，故 $x_2=-x_1$，$|x_1|+|-x_1|=2|x_1|=1$，

解得 $x_1=\dfrac{1}{2}$ 或 $-\dfrac{1}{2}$，

故 $\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}\\ x_2=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}\\ x_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$；

【小问 2 详解】

解法一：

当 $n=3$ 时，有 $x_1+x_2+x_3=0$，$|x_1|+|x_2|+|x_3|=1$，

则 $|3x_1+2x_2+x_3|=|2x_1+x_2|=|x_1-x_3|\le|x_1|+|x_3|=1-|x_2|\le 1$，所以 $|3x_1+2x_2+x_3|\le 1$，

当且仅当$x_2=0$时，等号成立；

解法二：当$n=3$时，有$x_1+x_2+x_3=0$，$|x_1|+|x_2|+|x_3|=1$，

则$|3x_1+2x_2+x_3|=|2x_1+x_2|=|x_1-x_3|\le|x_1|+|x_3|\le|x_1|+|x_2|+|x_3|=1$，当且仅当$x_2=0$时，等号成立；

【小问 3 详解】

解法一（一般解法）：

依题意，得$\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，$\sum_{i=1}^{n}|x_i|=1$，由于$a_1\ge a_2\ge a_3\ge\cdots\ge a_n$，且$a_1>a_n$，

$|(a_1-a_i)-(a_i-a_n)|\le|(a_1-a_i)+(a_i-a_n)|=|a_1-a_n|(i=1,2,3,\cdots,n)$，

即$|a_1+a_n-2a_i|\le|a_1-a_n|$，因为$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i-\frac{1}{2}a_1\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{2}a_n\sum_{i=1}^{n}x_i\right|$

$=\frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}(2a_i-a_1-a_n)x_i\right|\le\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(|a_1+a_n-2a_i||x_i|)\le\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(|a_1-a_n||x_i|)=\frac{1}{2}(a_1-a_n)$.

解法二（阿贝尔恒等式证法）：

根据$\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，$\sum_{i=1}^{n}|x_i|=1$，可知正项之和为$\frac{1}{2}$，负项之和为$-\frac{1}{2}$.

令$S_i=\sum_{k=1}^{i}x_k\ (i=1,2,\cdots,n)$，则$-\frac{1}{2}\le S_i\le\frac{1}{2}$，$S_n=0$.

由阿贝尔变换，得$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right|\le|S_na_n|+\sum_{i=1}^{n-1}|S_i||a_i-a_{i+1}|\le0+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2}(a_i-a_{i+1})=\frac{1}{2}(a_1-a_n)$.

【点睛】方法点睛：阿贝尔恒等式：对于实数序列$(a_1,a_2,\cdots a_n),(b_1,b_2,\cdots b_n)$，在计算过程中，我们可以采用如下的变换过程：

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=(a_1-a_2)b_1+(a_2-a_3)(b_1+b_2)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1})+a_n(b_1+b_2+\cdots+b_n),$$

若记$S_k=b_1+b_2+\cdots+b_k$，则上式可简记为：$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})S_k+a_nS_n$，

阿贝尔恒等式可推导出排序不等式，是证明不等式中的利器之一.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！