2022 年普通高等学校招生全国统一考试

新高考数学 I 卷参考答案

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分，考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角"条形码粘贴处"。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1. 若集合 $M=\{x\mid\sqrt{x}<4\}$，$N=\{x\mid 3x\geqslant 1\}$，则 $M\cap N=$（　）。

A：$\{x\mid 0\leqslant x<2\}$　　B：$\{x\mid \frac{1}{3}\leqslant x<2\}$　　C：$\{x\mid 3\leqslant x<16\}$　　D：$\{x\mid \frac{1}{3}\leqslant x<16\}$

答案：D.

解析：因为 $\sqrt{x}<4$，所以 $0\leqslant x<16$，又因为 $3x\geqslant 1$，所以 $x\geqslant\frac{1}{3}$，取交集：$\frac{1}{3}\leqslant x<16$，故选 D.

2. 若 $\mathrm{i}(1-z)=1$，则 $z+\bar{z}=$（　）。

A：-2　　B：-1　　C：1　　D：2

答案：D.

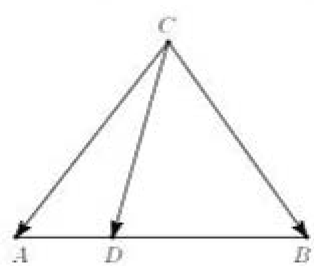
解析：因为 $\mathrm{i}(1-z)=1$，两边同乘以 i，则原式变为 $\mathrm{i}^2(1-z)=\mathrm{i}$，即 $-1+z=\mathrm{i}$，$z=1+\mathrm{i}$，那么 $\bar{z}=1-\mathrm{i}$，则 $z+\bar{z}=1+\mathrm{i}+1-\mathrm{i}=2$，故选 D.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上，$BD=2DA$。记 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{n}$，则 $\overrightarrow{CB}=$（　）。

A：$3\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$　　B：$-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$　　C：$3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$　　D：$2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$

答案：B

解析：$\overrightarrow{CD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$，即 $\overrightarrow{CB}=-2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CD}=-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$，故选 B.



4. 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题, 其中一部分水蓄入某水库. 已知该水库水位为海拔 148.5 m 时, 相应水面的面积为 140.0 km^2; 水位为海拔 157.5 m 时, 相应水面的面积为 180.0 km^2. 将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台, 则该水库水位从海拔 148.5 m 上升到 157.5 m 时, 增加的水量约为 $(\sqrt{7}\approx 2.65)$( ).

A: 1.0×10^9 m^3　　B: 1.2×10^9 m^3　　C: 1.4×10^9 m^3　　D: 1.6×10^9 m^3

答案: C.

解析: 考察台体体积公式, 注意单位换算.

台体体积公式为 $\frac{1}{3}(S_上+\sqrt{S_上\times S_下}+S_下)\times H$, 由条件可得, $S_上=180\times10^6$ m^2, $S_下=140\times10^6$ m^2, $H=157.5-148.5=9$ m, 代入可得台体体积为 $3\times10^6\times(320+60\sqrt{7})=1.437\times10^9\approx1.4\times10^9$ m^3, 故选 C.

5. 从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数, 则这 2 个数互质的概率为( ).

A: $\frac{1}{6}$　　B: $\frac{1}{3}$　　C: $\frac{1}{2}$　　D: $\frac{2}{3}$

答案: D.

解析: 所有取法一共有 $C_7^2=21$, 不互质的有 (2,4), (2,6), (2,8), (4,6), (4,8), (6,8), (3,6).

故互质概率为 $\frac{21-7}{21}=\frac{2}{3}$.

6. 记函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})+b\ (\omega>0)$ 的最小正周期为 T. 若 $\frac{2\pi}{3}<T<\pi$, 且 $y=f(x)$ 的图像关于点 $(\frac{3\pi}{2},2)$ 中心对称, 则 $f(\frac{\pi}{2})=$( ).

A: 1　　B: $\frac{3}{2}$　　C: $\frac{5}{2}$　　D: 3

答案: A.

解析: 由题意可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{3}\pi<T<\pi\\ T=\frac{2\pi}{\omega}\end{aligned}\right\}\Rightarrow 3>\omega>2\Rightarrow\frac{19}{4}\pi>\omega\cdot\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{4}>\frac{13}{4}\pi.\quad ①$$

注意到 $f(x)$ 关于 $(\frac{3}{2}\pi,2)$ 中心对称, 故 $b=2$, 从而 $\sin(\omega\cdot\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{4})=0$.

结合①, 可知 $\omega\cdot\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{4}=4\pi$, 解得 $\omega=\frac{5}{2}$. 故 $f(\frac{\pi}{2})=\sin(\frac{5}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})+2=1$.

7. 设 $a=0.1e^{0.1}$, $b=\frac{1}{9}$, $c=-\ln0.9$, 则( ).

A: $a<b<c$　　B: $c<b<a$　　C: $c<a<b$　　D: $a<c<b$

答案: C.

解析: $f(x)=x\cdot e^x=x(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2))$.

$a=f(0.1)=0.1\times(1+0.1+\frac{0.01}{2}+o(10^{-3}))\approx0.1105$, $b=0.111\cdots$.

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$.

$c=\ln(1.1)=0.1-\frac{0.01}{2}+o(10^{-3})=0.905+o(10^{-3})$.

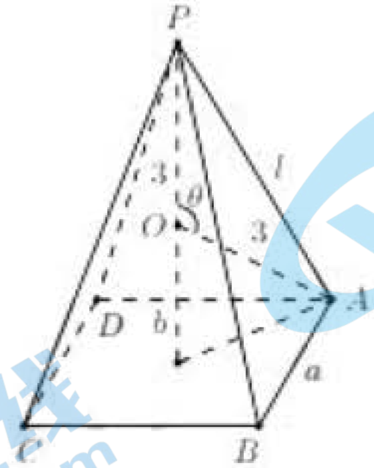
故 $c<a<b$.

8. 已知正四棱锥的侧棱长为 l, 其各顶点都在同一球面上. 若该球的体积为 36π, 且 $3\leqslant l\leqslant3\sqrt{3}$, 则该正四棱锥体积的取值范围是( ).

A: $[18,\frac{81}{4}]$ B: $[\frac{27}{4},\frac{81}{4}]$ C: $[\frac{27}{4},\frac{64}{3}]$ D: $[18,27]$

答案： C.

解： 易知 $R=3$.



设底面边长 a, $AP=l$, $\theta=\angle POA$, 易知 $OP=OA=3$, 从而有 $\frac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\frac{2}{3}\pi$.

易知 $b=3\cdot\cos(\pi-\theta)$, $a=3\sqrt{2}\sin\theta$, 则 $V=\frac{1}{3}a^2\cdot(3+b)=6\cdot\sin^2\theta(3-3\cos\theta)=18\sin^2\theta(1-\cos\theta)$.

求得 $f(\theta)=18\sin^2\theta(1-\cos\theta)$ 在 $\theta\in[\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi]$ 的值域为 $[\frac{27}{4},\frac{64}{3}]$.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 则（ ）.

A: 直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 $90°$

B: 直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 $90°$

C: 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 $45°$

D: 直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$

答案： ABD.

解析： 不妨设正方体棱长为 1.

直线 $DA_1\parallel CB_1$, $BC_1\perp CB_1$, 从而 $BC_1\perp DA_1$, A 正确.

延长 DA 至点 E, 使得 $DA=AE=1$, 连接 A_1E.

此时 $A_1E\parallel BC_1$, $CE=\sqrt{5}$, $A_1C=\sqrt{3}$, 因此 $A_1E\perp A_1C$, 即 $BC_1\perp CA_1$, B 正确.

记 B_1D_1 中点为 O, 连接 C_1O, BO, 此时 $C_1O\perp$ 平面 BB_1D_1D, 即 BO 是 BC_1 的投影, 因此, $\angle C_1BO$ 即直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 的夹角, 此时 $BC_1=\sqrt{2}$, $C_1O=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\angle C_1BO=30°$, C 错误.

$\angle C_1BC=45°$ 即所求, D 正确.

综上, 选 ABD.

10. 已知函数 $f(x)=x^3-x+1$, 则（ ）.

A: $f(x)$ 有两个极值点

B: $f(x)$ 有三个零点

C: 点 $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心

D: 直线 $y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

答案： AC.

解析： 由题意可得 $f'(x)=3x^2-1$, 两个极值点分别为 $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$, A 正确.

$f(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{\sqrt{3}}{9}-\frac{\sqrt{3}}{3}+1=1-\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$ 为极小值, 因此 $f(x)$ 只有一个零点, B 错误.

$f(x)+f(-x)=x^3-x+1+(-x)^3-(-x)+1=2$, 对称中心为 $(0,1)$, C 正确.

若 $y=2x$ 是 $f(x)$ 的切线，则 $f(x)-2x=x^3-3x+1$ 与 x 轴只有两个交点，然而 $g(x)=x^3-3x+1$，$g'(x)=3x^2-3$，$g(1)=1-3+1<0$，D 错误.

综上，选 AC.

11. 已知 O 为坐标原点，点 $A(1,1)$ 在抛物线 $C:x^2=2py\ (p>0)$ 上，过点 $B(0,-1)$ 的直线交 C 于 P,Q 两点，则（ ）.

A：C 的准线为 $y=-1$

B：直线 AB 与 C 相切

C：$|OP|\cdot|OQ|>|OA|^2$

D：$|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$

答案： BCD.

解析： 由题意得 $y=x^2$，$p=\frac{1}{2}$，准线为 $y=-\frac{1}{4}$，A 错误.

AB 斜率为 2，$f'(1)=2$，因此 AB 与 C 相切，B 正确.

$|OA|=\sqrt{2}$，设 PQ 方程为 $y=kx-1$，$k\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$，与 $y=x^2$ 联立，得 $x^2-kx+1=0$. 设 $P(x_1,x_1^2)$，$Q(x_2,x_2^2)$，则 $x_1+x_2=k$，$x_1x_2=1$. 若 $|OP|\cdot|OQ|>|OA|^2=2$，即

$$(x_1^2+x_1^4)\cdot(x_2^2+x_2^4)=(x_1x_2)^2+(x_1x_2)^2\cdot(x_1^2+x_2^2)+(x_1x_2)^4=1+k^2-2+1=k^2>4.$$

成立，C 正确.

由几何关系可知，AB 不可能是 $\triangle PAB$ 外接圆的切线，因此由切割线定理可知 $|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$，D 正确.

综上所述，选 BCD.

12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 **R**，记 $g(x)=f'(x)$. 若 $f(\frac{3}{2}-2x)$，$g(2+x)$ 均为偶函数，则（ ）.

A：$f(0)=0$

B：$g(-\frac{1}{2})=0$

C：$f(-1)=f(4)$

D：$g(-1)=g(2)$

答案： BC.

解： 此题的关键点在于：若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f'(x)$ 为奇函数，且若 $f'(x)$ 在 R 上连续，则 $f'(0)=0$.

对 A 选项采用特殊值法，设 $f(x)=1$，满足题意，但 $f(0)\neq 0$，故 A 错误.

$f(\frac{3}{2}-2x)$ 为偶函数，则 $-2f'(\frac{3}{2}-2x)$ 为奇函数，即 $g(\frac{3}{2}-2x)$ 为奇函数，此时 $g(\frac{3}{2})=0$.

结合 $g(2+x)$ 为偶函数，则 $g(-\frac{1}{2})=-g(\frac{7}{2})=-g(\frac{1}{2})=g(\frac{5}{2})=g(\frac{3}{2})=0$，故 B 正确.

$f(\frac{3}{2}-2x)$ 为偶函数，取 $x=\frac{5}{4}$，则 $f(-1)=f(4)$，故 C 正确.

$g(-1)=-g(4)=-g(0)=g(3)=g(1)=-g(2)$，$g(2)$ 不恒为 0，故 D 错误.

综上，选 BC.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $(1-\frac{y}{x})(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为________(用数字作答).

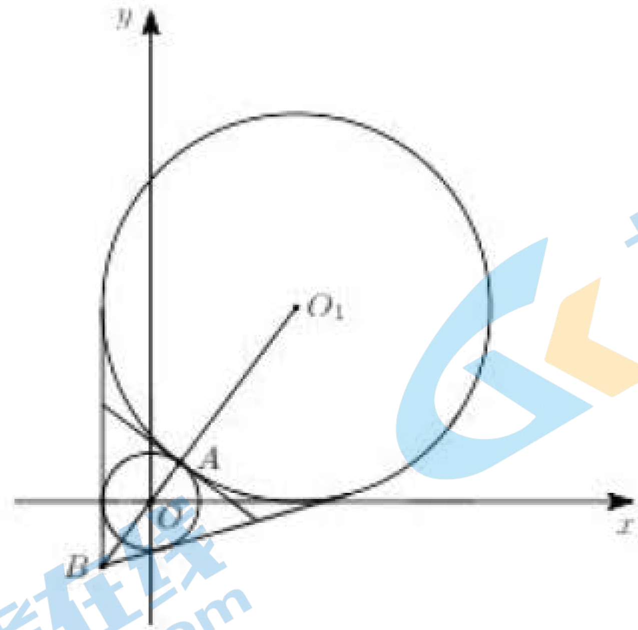
答案： -28.

解析： 展开式中含有 x^2y^6 的项为 $1\cdot C_8^2x^2y^6-\frac{y}{x}\cdot C_8^3x^3y^5=-28x^2y^6$.

14. 写出与圆 $x^2+y^2=1$ 和 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 都相切的一条直线的方程________.

答案： $3x+4y-5=0$，$x=-1$，$24y-7x+25=0$.

解析： 如图所示.



显然两个圆都与直线 $x=-1$ 相切. 由于题目只要求填一个答案, 填这个答案即可满分. 下面考虑其他情况:

注意到两个圆外切, 故它们还有一条内公切线. 设切点为 A, 则 $OA=1$, OA 斜率为 $\frac{4}{3}$, 故 $A(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$. 而内公切线与 OA 垂直, 其斜率为 $-\frac{3}{4}$, 故内公切线方程为 $3x+4y-5=0$.

另一条外公切线比较不好求. 首先将连心线 $y=\frac{4}{3}x$ 与外公切线 $x=-1$ 相交, 得点 $B(-1,-\frac{4}{3})$. 然后, 由连心线的为这两条外公切线的角平分线, 可以用二倍角公式计算两条外公切线夹角的正切值, 并由此计算其斜率, 具体过程如下: 设连心线与外公切线夹角为 θ, 则 $\tan\theta=\frac{3}{4}$,

$$\tan 2\theta=\frac{2\times\frac{3}{4}}{1-(\frac{3}{4})^2}=\frac{24}{7}.$$

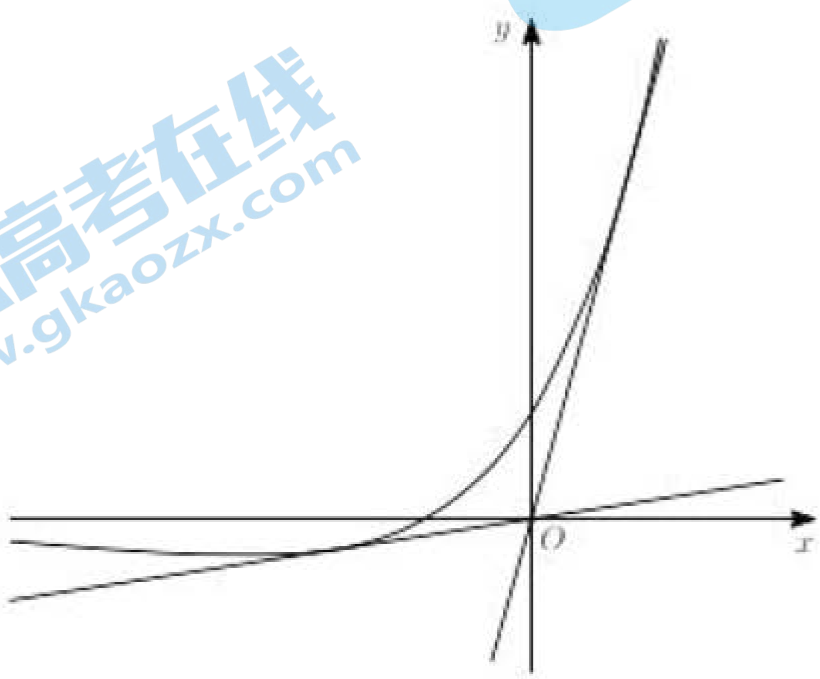
于是下一条外公切线斜率为 $\frac{7}{24}$, 代入 $B(-1,-\frac{4}{3})$, 得其方程 $24y-7x+25=0$.

综上, 共有三个答案 $3x+4y-5=0$, $x=-1$, $24y-7x+25=0$.

15. 若曲线 $y=(x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线, 则 a 的取值范围是______.

答案： $(0,+\infty)$.

解析： 如图所示.



设 $f(x)=(x+a)e^x$ 与 $g(x)=kx$ 切于点 (m,n)，则 $n=km=(x+a)e^x$.

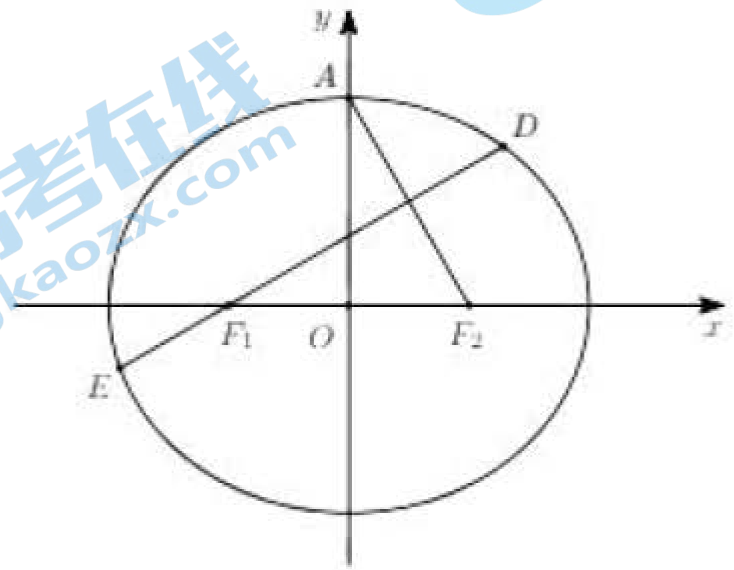
由它们的导数相等，知 $k=(x+a+1)e^x$. 两式相除，得 $m=\dfrac{m+a}{m+a+1}$，即 $m^2+am-a=0$.

要使这个关于 m 的一元二次方程有解，则 $a>0$ 或 $a<-4$.

16. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，$C$ 的上顶点为 A，两个焦点为 F_1，F_2，离心率为 $\dfrac{1}{2}$. 过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D，E 两点，$|DE|=6$，则 $\triangle ADE$ 的周长是________

答案： 13.

解析： 如图所示.



由离心率知 $a=2c$，$b=\sqrt{3}c$，于是 $\angle AF_2O=60^\circ$.

由垂直知 $\angle DF_1O=30^\circ$，代入焦点弦公式 $DE=\dfrac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}$，得 $\dfrac{48c}{13}=6$，于是 $c=\dfrac{13}{8}$，点 $A(\dfrac{13\sqrt{3}}{8},0)$.

注意到 $AF_1=F_1F_2$，且 $DE\perp AF_2$，故 DE 为 AF_2 垂直平分线，$AD=F_2D$，$AE=F_2E$，于是 $\triangle ADE$ 周长为 $DE+AD+AE=DE+F_2D+F_2E=DE+2a-F_1D+2a-F_1E=DE+4a-DE=4a=13$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=1$，$\{\dfrac{S_n}{a_n}\}$ 是公差为 $\dfrac{1}{3}$ 的等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 证明：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<2$.

解： (1) 因为 $\dfrac{s_n}{a_n}$ 是以首项为 1，公差为 $\dfrac{1}{3}$ 的等差数列，所以 $\dfrac{s_n}{a_n}=1+\dfrac{1}{3}(n-1)=\dfrac{n+2}{3}$，故

$$s_n=\frac{n+2}{3}a_n. \quad ①$$

当 $n\geqslant 2$ 时，

$$s_{n-1}=\frac{n+1}{3}a_{n-1}. \quad ②$$

由 ② − ① 可知：$a_n=\dfrac{n+2}{3}a_n-\dfrac{n+1}{3}a_{n-1}$，所以 $(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}$，即 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n+1}{n-1}$.

由累加法可知：

$$a_n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

(2) 因为 $\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}$，所以

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{2}{1}-\frac{2}{2}+\frac{2}{2}-\frac{2}{3}+\cdots+\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}=2-\frac{2}{n+1}$$

故原不等式得证.

18. (12 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$.

(1) 若 $C=\frac{2\pi}{3}$，求 B;

(2) 求 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值.

解：(1) 因为

$$\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}=\frac{2\sin B\cos B}{1+2\cos^2 B-1}=\frac{\sin B}{\cos B}.$$

由题目条件 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$，知 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin B}{\cos B}$，所以 $\cos A\cos B=\sin B+\sin A\sin B$，即

$$\cos A\cos B-\sin A\sin B=\sin B\Rightarrow\cos(A+B)=\sin B.$$

又因为 $A+B+C=\pi$，所以 $-\cos C=\sin B$.

因为 $C=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\sin B=\frac{1}{2}$；又 $B\in(0,\frac{\pi}{3})$，所以 $B=\frac{\pi}{6}$.

(2) 由 (1) 知 $\cos C=-\sin B$，所以 $\cos C=\cos(\frac{\pi}{2}+B)$.

又 $A+B+C=\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{2}+B$，$A=\pi-B-C=\frac{\pi}{2}-2B$.

由正弦定理知

$$\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}=\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}-2B)+\sin^2 B}{\sin^2(\frac{\pi}{2}+B)}=\frac{\cos^2 2B+1-\cos^2 B}{\cos^2 B}=\frac{(2\cos^2 B-1)^2+1-\cos^2 B}{\cos^2 B}.$$

所以，

$$\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{4\cos^4 B-5\cos^2 B+2}{\cos^2 B}=4\cos^2 B+\frac{2}{\cos^2 B}-5\geq 4\sqrt{2}-5.$$

当且仅当 $\cos B=2^{-\frac{1}{4}}$ 时等号成立.

19. (12 分)

如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4，$\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求 A 到平面 A_1BC 的距离;

(2) 设 D 为 A_1C 的中点，$AA_1=AB$，平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值.

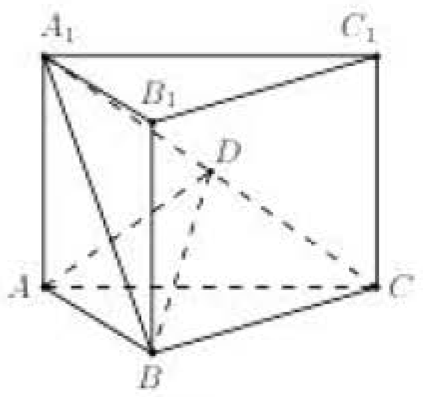
解：(1) $V_{A-A_1BC}=\frac{1}{3}V_{柱}=\frac{4}{3}$，所以 $\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BC}\cdot h=\frac{4}{3}$，解得 $h=\sqrt{2}$.

(2) 取 A_1B 中点 M，由 $AA_1=AB$，得 $AM\perp A_1B$. 由面 $A_1BC\perp$ 面 ABB_1A_1 及两个面交线为 A_1B，则 $AM\perp$ 面 A_1BC，进而 $AM\perp BC$. 由 $AA_1\perp BC$，得 $BC\perp$ 面 A_1AB，故 $AB\perp BC$.

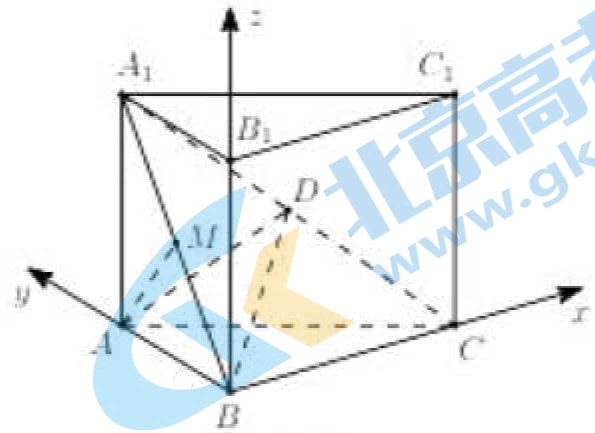
故 BA, BC, BB_1 三条直线两两垂直，建立如图坐标系.

易得 $A_1B=2AM=2\sqrt{2}$，$AA_1=AB=2$，又 $S_{\triangle A_1BC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC=2\sqrt{2}$，所以 $BC=2$. 则 $A(0,2,0)$,

$B(0,0,0)$, $C(2,0,0)$, $A_1(0,2,2)$, $D(1,1,1)$. 故 $\overrightarrow{BA}=(0,2,0)$, $\overrightarrow{BD}=(1,1,0)$.



题图



解析图

设 $\boldsymbol{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$ 为面 ABD 的法向量, 则 $\begin{cases}2y_1=0,\\ x_1+y_1+z_1=0.\end{cases}$ 令 $x_1=1$, 则 $z_1=-1$. 故 $\boldsymbol{n_1}=(1,0,-1)$.

同理, $\boldsymbol{n_2}=(0,1,-1)$.

故 $\cos\langle \boldsymbol{n_1},\boldsymbol{n_2}\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$, 设所求角为 θ, 则 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

20. (12 分)

一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯(卫生习惯分为良好和不够良好两类)的关系, 在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例(称为病例组), 同时在未患该疾病的人群中随机调查了 100 人(称为对照组), 得到如下数据:

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

(1) 能否有 99% 的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异?

(2) 从该地的人群中任选一人, A 表示事件 "选到的人卫生习惯不够良好", B 表示事件 "选到的人患有该疾病". $\dfrac{P(B\mid A)}{P(\overline{B}\mid A)}$ 与 $\dfrac{P(B\mid \overline{A})}{P(\overline{B}\mid \overline{A})}$ 的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标, 记该指标为 R.

(i) 证明: $R=\dfrac{P(A\mid B)}{P(\overline{A}\mid B)}\cdot\dfrac{P(\overline{A}\mid \overline{B})}{P(A\mid \overline{B})}$;

(ii) 利用该调查数据, 给出 $P(A\mid B)$, $P(A\mid \overline{B})$ 的估计值, 并利用 (i) 的结果给出 R 的估计值.

附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

解: (1) 列表:

	不够良好	良好	
病例组	40	60	100
对照组	10	90	100
合计	50	150	200

$$\chi^2=\frac{200\times(40\times90-60\times10)^2}{50\times150\times100\times100}=\frac{2(4\times9-6\times1)^2}{5\times15}=24>6.635,$$ 故有 99% 把握.

(2) (i) 由题意 $R=\dfrac{\frac{P(B|A)}{P(\overline{B}|A)}}{\frac{P(B|\overline{A})}{P(\overline{B}|\overline{A})}}=\dfrac{\frac{P(AB)}{P(A)}}{\frac{P(A\overline{B})}{P(A)}}\div\dfrac{\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}}{\frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{A})}}=\dfrac{P(AB)}{P(A\overline{B})}\times\dfrac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{A}B)}$，而

$$\frac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)}\cdot\frac{P(\overline{A}|\overline{B})}{P(A|\overline{B})}=\frac{\frac{P(AB)}{P(B)}}{\frac{P(\overline{A}B)}{P(B)}}\cdot\frac{\frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{B})}}{\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}}=\frac{P(AB)}{P(\overline{A}B)}\cdot\frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(A\overline{B})},$$

故相等.

	A	$\overline{A}$	
B	40	60	
$\overline{B}$	10	90	

(ii) 易得

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{40}{100}=\frac{2}{5},\quad P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{10}{100}=\frac{1}{10},$$

$$P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}B)}{P(B)}=\frac{60}{100}=\frac{3}{5},\quad P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{90}{100}=\frac{9}{10}.$$

所以，$R=\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}\cdot\dfrac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{10}}=\dfrac{2}{3}\times 9=6.$

21. (12 分)

已知点 $A(2,1)$ 在双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2-1}=1\ (a>1)$ 上，直线 l 交 C 于 P,Q 两点，直线 AP,AQ 的斜率之和为 0.

(1) 求 l 的斜率；

(2) 若 $\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$，求 $\triangle PAQ$ 的面积.

解：(1) 将点 A 的坐标代入双曲线 C 的方程有 $\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{1}{a^2-1}=1$，去分母、变形可得 $a^4-4a^2+4=0$，解得 $a^2=2$. 故 $a=\sqrt{2}$，双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$.

设直线 l 的方程为 $y=kx+h$，另设 P,Q 两点的坐标分别为 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2).

联立直线 l 和双曲线 C 的方程消去 y 可得 $\dfrac{x^2}{2}-(kx+h)^2=1$，整理得到

$$(k^2-\frac{1}{2})x^2+2khx+(h^2+1)=0.$$

这个方程的两根为 x_1 和 x_2，根据韦达定理有 $x_1+x_2=-\dfrac{2kh}{k^2-\frac{1}{2}}$，$x_1x_2=\dfrac{h^2+1}{k^2-\frac{1}{2}}$.

直线 AP 的斜率为 $k_{AP}=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}$，由于点 $P(x_1,y_1)$ 在直线 $l:y=kx+h$ 上，知 $y_1=kx_1+h$，因此

$$k_{AP}=\frac{kx_1+h-1}{x_1-2}=k+\frac{2k+h-1}{x_1-2}.$$

同理可得，$k_{AQ}=k+\dfrac{2k+h-1}{x_2-2}$. 根据已知条件 $k_{AP}+k_{AQ}=0$，而

$$k_{AP}+k_{AQ}=2k+(2k+h-1)(\frac{1}{x_1-2}+\frac{1}{x_2-2})=2k+(2k+h-1)\cdot\frac{(x_1+x_2)-4}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$$

$$=2k+(2k+h-1)\cdot\frac{-\dfrac{2kh}{k^2-\frac{1}{2}}-4}{\dfrac{h^2+1}{k^2-\frac{1}{2}}+\dfrac{4kh}{k^2-\frac{1}{2}}+4}=2k+(2k+h-1)\frac{-2kh-4k^2+2}{h^2+4kh+4k^2-1}$$

$$=2k+\frac{-2kh-4k^2+2}{2k+h+1}=\frac{2k+2}{2k+h+1}.$$

因此，$\dfrac{2k+2}{2k+h+1}=0$，得 $k=-1$，即 l 的斜率为 -1.

(2) 由于直线 l 的斜率 $k=-1$，其方程为 $y=-x+h$，直线 l 和双曲线 C 的联立方程简化为

$$\frac{1}{2}x^2-2hx+(h^2+1)=0.$$

相应的韦达定理结论简化为

$$x_1+x_2=-\frac{2kh}{k^2-\frac{1}{2}}=4h,\quad x_1x_2=\frac{h^2+1}{k^2-\frac{1}{2}}=2h^2+2.$$

点 P 的坐标满足 $y_1=-x_1+h$ 和 $\frac{1}{2}x_1^2-2hx_1+(h^2+1)=0$，后者可变形为 $x_1^2=4hx_1-2(h^2+1)$.

考虑向量 $\overrightarrow{AP}=(x_1-2,y_1-1)=(x_1-2,-x_1+h-1)$，它的模等于

$$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{(x_1-2)^2+(-x_1+h-1)^2}=\sqrt{2x_1^2-4hx_1+h^2-2h+5}=\sqrt{4hx_1-3h^2-2h+1}.$$

同理，向量 $\overrightarrow{AQ}=(x_2-2,y_2-1)=(x_2-2,-x_2+h-1)$ 的模等于 $|\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{4hx_2-3h^2-2h+1}$.

考虑到直线 l 的斜率 $k=-1$，直线 AP 和 AQ 的斜率分别为

$$k_{AP}=k+\frac{2k+h-1}{x_1-2}=-1+\frac{h-3}{x_1-2},\quad k_{AQ}=-1+\frac{h-3}{x_2-2}.$$

它们夹角的正切值为

$$\left|\frac{k_{AP}-k_{AQ}}{1+k_{AP}k_{AQ}}\right|=\left|\frac{(-1+\frac{h-3}{x_1-2})-(-1+\frac{h-3}{x_2-2})}{1+(-1+\frac{h-3}{x_1-2})(-1+\frac{h-3}{x_2-2})}\right|=\left|\frac{\frac{h-3}{x_1-2}-\frac{h-3}{x_2-2}}{2-\frac{h-3}{x_1-2}-\frac{h-3}{x_2-2}+\frac{h-3}{x_1-2}\cdot\frac{h-3}{x_2-2}}\right|$$

$$=\left|\frac{(h-3)(x_2-x_1)}{2(x_1-2)(x_2-2)-(h-3)(x_1+x_2-4)+(h-3)^2}\right|.$$

直线 l 和双曲线 C 的联立方程简化为 $\frac{1}{2}x^2-2hx+(h^2+1)=0$，相应的韦达定理结论简化为

$$x_1+x_2=-\frac{2kh}{k^2-\frac{1}{2}}=4h,\quad x_1x_2=\frac{h^2+1}{k^2-\frac{1}{2}}=2h^2+2.$$

故有

$$(x_1-2)(x_2-2)=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4=2h^2-8h+6.$$

另外, 两根之差

$$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{(2h)^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot(h^2+1)}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2h^2-2}.$$

因此, AP 和 AQ 的夹角正切值为

$$\begin{aligned}\left|\frac{k_{AP}-k_{AQ}}{1+k_{AP}k_{AQ}}\right|&=\left|\frac{(h-3)(x_2-x_1)}{2(x_1-2)(x_2-2)-(h-3)(x_1+x_2-4)+(h-3)^2}\right|\\&=\left|\frac{(h-3)\cdot2\sqrt{2h^2-2}}{2(2h^2-8h+6)-(h-3)(4h-4)+(h-3)^2}\right|\\&=\left|\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{h^2-1}}{h-3}\right|.\end{aligned}$$

依题意, 这个正切值等于 $2\sqrt{2}$, 因此 $\left|\frac{\sqrt{h^2-1}}{h-3}\right|=1$, 解得 $h=\frac{5}{3}$.

所以, 直线 l 的方程为 $y=-x+\frac{5}{3}$ 或 $x+y-\frac{5}{3}=0$, 点 A 到它的距离 (亦即 A 到 PQ 的距离) 为

$$\frac{\left|2+1-\frac{5}{3}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

P,Q 两点之间的距离为

$$\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot2\sqrt{2h^2-2}=\frac{16}{3}.$$

因此, $\triangle PAQ$ 的面积为 $\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{16\sqrt{2}}{9}$.

22. (12 分)

已知函数 $f(x)=e^x-ax$ 和 $g(x)=ax-\ln x$ 有相同的最小值.

(1) 求 a;

(2) 证明: 存在直线 $y=b$, 其与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点, 并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

解: (1) $f'(x)=e^x-a$, $g'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$.

当 $a\leqslant0$ 时, $e^x>0$, 所以, $f'(x)>0$ 即 $f(x)$ 在 R 上递增, 无最小值, 不合题意.

当 $a>0$ 时,

$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 递减, $(\ln a,+\infty)$ 递增, 所以 $f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a\ln a$;

$g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 递减, $(\frac{1}{a},+\infty)$ 递增, 所以 $g(x)_{\min}=g(\frac{1}{a})=1+\ln a$.

由题, $a-a\ln a=1+\ln a$, 即 $(a+1)\ln a=a-1$, 所以

$$\ln a-\frac{a-1}{a+1}=0 \qquad (*)$$

令 $h(a)=\ln a-\frac{a-1}{a+1}$, 则 $h'(a)=\frac{1}{a}-\frac{2}{(a+1)^2}=\frac{a^2+1}{a(a+1)^2}>0$. 所以 $h(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增.

又 $h(1)=0$，由 (*) 式解得 $a=1$. 所求 $a=1$.

(2) 由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 递减，$(0,+\infty)$ 递增；$g(x)$ 在 $(0,1)$ 递减，$(1,+\infty)$ 递增.

设 $y=b$ 与 $f(x)$，$g(x)$ 三个交点横坐标为 $x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$，所以，$x_1<0$，$0<x_2<1$，$x_3>1$.

所以，

$$f(x_1)=f(x_2)=e^{x_1}-x_1=e^{x_2}-x_2=b.$$

因为 $g(x_2)=g(x_3)=b$，所以 $\begin{cases} x_2-\ln x_2=x_3-\ln x_3=b, \\ e^{\ln x_2}-\ln x_2=e^{\ln x_3}-x_3=b, \\ f(\ln x_2)=f(\ln x_3)=b. \end{cases}$ 又 $\ln x_2<0$，$\ln x_3>0$，所以

$$x_1=\ln x_2, x_2=\ln x_3, \quad ①$$

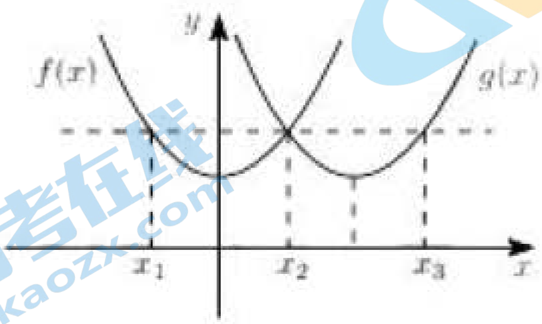
且 $e^{x_2}-x_2=x_2-\ln x_2$，即

$$e^{x_2}+\ln x_2=2x_2. \quad ②$$

由 ①、② 得

$$x_1+x_3=\ln x_2+e^{x_2}=2x_2.$$

所以，存在直线 $y=b$，其与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.



关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。