

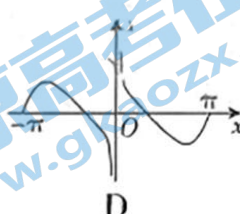
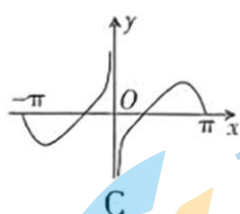
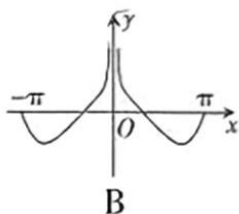
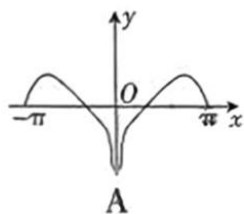
## 高三数学考试

## 注意事项:

1. 答题前, 考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。来源: 高三标答公众号
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容: 集合与常用逻辑用语, 函数与导数, 不等式, 三角函数与解三角形, 平面向量, 复数, 数列, 立体几何初步。

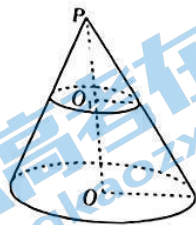
一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{1, 5, a^2\}$ ,  $B = \{1, 2a+3\}$ , 且  $B \subseteq A$ , 则  $a =$   
A. -1                                      B. 1                                      C. -3                                      D. 3
2. 命题“ $\forall x \in (0, 1), \sin x > -x^2 + 2x - 1$ ”的否定为  
A.  $\exists x \notin (0, 1), \sin x \leq -x^2 + 2x - 1$                                       B.  $\exists x \in (0, 1), \sin x \leq -x^2 + 2x - 1$   
C.  $\forall x \notin (0, 1), \sin x > -x^2 + 2x - 1$                                       D.  $\forall x \in (0, 1), \sin x \leq -x^2 + 2x - 1$
3. 函数  $f(x) = (e^{\log_2 |x|} - e^{-\log_2 |x|}) \cdot \sin x$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上的图象大致为



4. 若  $p: x^2 - 9 \leq 0, q: \log_{0.5}(x-1) > -1$ , 则  $p$  是  $q$  的  
A. 充分不必要条件                                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                                      D. 既不充分也不必要条件
5. 在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 已知  $AA_1 = 2AD = 2CD$ , 点  $E$  是线段  $CD$  的中点, 则异面直线  $D_1E$  与  $BC_1$  所成角的余弦值为  
A.  $\frac{8\sqrt{85}}{85}$                                       B.  $\frac{8}{9}$                                       C.  $\frac{2}{5}$                                       D.  $\frac{\sqrt{85}}{85}$
6. 当强度为  $x$  的声音对应的等级为  $f(x)$  分贝时, 有  $f(x) = 10 \lg \frac{x}{A_0}$  (其中  $A_0$  为常数), 某挖掘机的声音约为 90 分贝, 普通室内谈话的声音约为 50 分贝, 则该挖掘机的声音强度与普通室内谈话的声音强度的比值为  
A.  $e^4$                                       B.  $10^4$                                       C.  $\frac{9}{5}$                                       D.  $10^{\frac{2}{5}}$

7. 如图,在圆锥  $PO$  中,用一个平行于底面的平面去截圆锥  $PO$ ,可得一个圆锥  $PO_1$  和一个圆台  $O_1O$ ,若圆锥  $PO_1$  的体积是圆锥  $PO$  体积的  $\frac{1}{8}$ ,则圆锥  $PO_1$  与圆台  $O_1O$  的侧面积的比值为



A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{1}{4}$

C.  $\frac{2}{3}$

D.  $\frac{1}{3}$

8. 已知函数  $f(x) = \sin x - 2ax - ax \cos x, \forall x \geq 0, f(x) \leq 0$ , 则实数  $a$  的取值范围是

A.  $[\frac{1}{4}, +\infty)$

B.  $(0, \frac{1}{4}]$

C.  $[\frac{1}{3}, +\infty)$

D.  $(0, \frac{1}{3}]$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 已知  $z(2+i) = i^2$ , 则下列说法正确的是

A.  $z$  在复平面内对应的点的坐标为  $(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$

B.  $\bar{z} = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$

C.  $z$  在复平面内对应的点与点  $(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$  关于原点对称

D.  $|z| = \frac{\sqrt{5}}{5}$

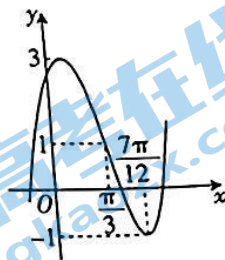
10. 如图,这是函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + b (A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$  的部分图象,则

A.  $f(x) = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + 1$

B.  $f(x) = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{3}) + 1$

C.  $f(x) = 1 - 2 \cos(2x + \frac{5\pi}{6})$

D.  $f(x) = 1 - 2 \cos(2x + \frac{\pi}{3})$



11. 已知  $m > 1, n > 1$ , 且  $m + n = 3$ , 则

A.  $\log_3 m + \log_3 n \leq 2 - \log_3 4$

B.  $\ln \frac{e^m}{e^{\frac{1}{n}}} \geq \ln(2e^{\frac{m}{2}} - e^{\frac{1}{2}})$

C.  $\frac{2}{2m-1} + \frac{1}{n-1} \geq \frac{8}{3}$

D.  $m^2 + n^2 \geq 9$

12. 意大利数学家斐波那契在研究兔子繁殖问题时,发现了这样一个数列:1, 1, 2, 3, 5, 8, ... 这个数列的前两项均是 1, 从第三项开始, 每一项都等于前两项之和. 人们把这样的一列数组成的数列  $\{F_n\}$  称为斐波那契数列. 现将数列  $\{F_n\}$  中的各项除以 3 所得余数按原顺序构成的数列记为  $\{G_n\}$ , 则下列说法正确的是

A.  $\sum_{i=1}^{2024} F_i = F_{3026} - 1$

B.  $\sum_{i=1}^{2024} F_i^2 = F_{2023} F_{2024}$

C.  $G_{2024} = 0$

D.  $\sum_{i=1}^{2024} G_i = 2277$





三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知向量  $a, b$  的夹角为  $\frac{\pi}{3}$ , 且  $|a|=1, a \cdot (a-2b)=-2$ , 则  $|b| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 若  $\tan(\theta + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$ , 则  $\tan \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ .

15. 已知正项等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_3=13$ , 且  $a_5=a_1+6a_3$ , 则满足  $S_n < 41$  的  $n$  的最大值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

16. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且满足  $f(x)+f(x+4)=f(21), f(8-x)=f(x-4), f(0)=1$ , 则  $\sum_{k=1}^{2025} f(k) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

四、解答题:本题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)

记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\cos A = \frac{2c-a}{2b}$ .

(1) 求  $B$ ;

(2) 若  $c=3, b=\sqrt{13}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

18. (12分)

设函数  $f(x) = x^2 - 3x + \ln x$ .

(1) 求  $f(x)$  在  $(0, 1]$  上的最大值;

(2) 设函数  $g(x) = f(x) - 3x + 3\ln x$ , 关于  $x$  的方程  $g(x) = 2m - 1$  有3个不同的根, 求  $m$  的取值范围.

19. (12分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_n = 2a_n - 2$ , 数列  $\{b_n\}$  为等差数列,  $b_3 + b_4 + b_5 = 21$ ,  $b_6 = 11$ .

(1) 求  $\{a_n\}, \{b_n\}$  的通项公式;

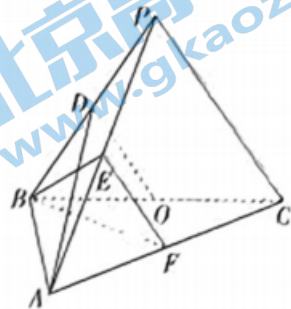
(2) 求数列  $\{\frac{b_n}{a_n}\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

20. (12分)

如图,在三棱锥  $P-ABC$  中,  $AB \perp BC$ ,  $AB=2$ ,  $BC=2\sqrt{2}$ ,  $\triangle PBC$  为等边三角形,  $BP, AP, BC$  的中点分别为  $D, E, O$ , 且  $AD = \sqrt{3}DO$ .

(1)证明:平面  $ABC \perp$  平面  $PBC$ .

(2)若  $F$  为  $AC$  的中点,求点  $C$  到平面  $BEF$  的距离.



21. (12分)

近期随着某种国产中高端品牌手机的上市,我国的芯片技术迎来了重大突破.某企业原有 1000 名技术人员,年人均投入  $a$  万元 ( $a > 0$ ),现为加强技术研发,该企业把原有技术人员分成技术人员和研发人员,其中技术人员  $x$  名 ( $x \in \mathbb{N}$  且  $100 \leq x \leq 500$ ),调整后研发人员的年人均投入增加  $(0.2x)\%$ ,技术人员的年人均投入调整为  $a(m - \frac{3x}{1000})$  万元.

(1)若要使调整后研发人员的年总投入不低于调整前 1000 名技术人员的年总投入,则调整后的研发人员的人数最少为多少?

(2)为了激发研发人员的工作热情和保持技术人员的工作积极性,企业决定在投入方面要同时满足以下两个条件:①研发人员的年总投入始终不低于技术人员的年总投入;②技术人员的年人均投入始终不减少.请问是否存在这样的实数  $m$ ,满足以上两个条件?若存在,求出  $m$  的取值范围;若不存在,说明理由.

22. (12分)

已知函数  $f(x) = e^{4x-1} - 4a \ln(2x)$ .

(1)当  $a=1$  时,求曲线  $y=f(x)$  在点  $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$  处的切线方程;

(2)当  $a > 0$  时,若关于  $x$  的不等式  $f(x) \geq a + a \ln(2a)$  恒成立,求实数  $a$  的取值范围.