2023 北京西城高三二模
数　　学

2023.5

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）复数 $z=\mathrm{i}\cdot(1+\mathrm{i})$ 的虚部为

（A）1　　（B）-1

（C）i　　（D）$-\mathrm{i}$

（2）已知集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x\mid 3^x<1\}$，则 $A\cup B=$

（A）$[-1,0)$　　（B）$(-\infty,0)$

（C）$[-1,1]$　　（D）$(-\infty,1]$

（3）已知抛物线 C 与抛物线 $y^2=4x$ 关于 y 轴对称，则 C 的准线方程是

（A）$x=-2$　　（B）$x=2$

（C）$x=-1$　　（D）$x=1$

（4）在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=1$，$\angle A=90^\circ$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$

（A）1　　（B）-1

（C）$\sqrt{2}$　　（D）$-\sqrt{2}$

（5）设 $a=\lg\dfrac{2}{3}$，$b=\sqrt{\lg 3\cdot\lg 2}$，$c=\dfrac{1}{2}\lg 6$，则

（A）$a<b<c$　　（B）$b<a<c$

（C）$a<c<b$　　（D）$b<c<a$

（6）将边长为2 的正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起，折起后点 D 记为 D'．若 $BD'=2$，则四面体 $ABCD'$ 的体积为

（A）$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

（C）$2\sqrt{2}$　　（D）$\sqrt{2}$

（7）已知数轴上两点 O,P 的坐标为 $O(0),P(70)$，现 O,P 两点在数轴上同时相向运动．点 O 的运动规律为第一秒运动 2 个单位长度，以后每秒比前一秒多运动1 个单位长度；点 P 的运动规律为每秒运动 5 个单位长度．则点 O,P 相遇时在数轴上的坐标为

（A）(40)　　（B）(35)

（C）(30)　　　　（D）(20)

（8）已知函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)$．则“$f(-1)=f(1)$”是“$f(x)$ 为偶函数”的

（A）充分而不必要条件　　　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　　　（D）既不充分也不必要条件

（9）某放射性物质的质量每年比前一年衰减 5%，其初始质量为 m_0，10 年后的质量为 m'，则下列各数中与 $\dfrac{m'}{m_0}$ 最接近的是

（A）70%　　　　（B）65%

（C）60%　　　　（D）55%

（10）在坐标平面内，横、纵坐标均为整数的点称为整点．点 P 从原点出发，在坐标平面内跳跃行进，每次跳跃的长度都是 5 且落在整点处．则点 P 到达点 $Q(33,33)$ 所跳跃次数的最小值是

（A）9　　　　（B）10

（C）11　　　　（D）12

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

（11）函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\sqrt{x-1}$ 的定义域为____．

（12）设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_2=\dfrac{1}{4}$，则 $a_5=$____；使 $S_n\geqslant\dfrac{99}{100}$ 成立的 n 的最小值为____．

（13）在△ABC 中，若 $a=2$，$\tan A=-\dfrac{4}{3}$，$\cos B=\dfrac{4}{5}$，则 $b=$____．

（14）已知两点 $F_1(-1,0),F_2(1,0)$．点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 满足 $|PF_1|-|PF_2|=\sqrt{2}$，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积是____；θ 的一个取值为____．

（15）已知直线 $l:y=kx+b$ 和曲线 $C:y=\dfrac{1}{1+x^2}$，给出下列四个结论：

① 存在实数 k 和 b，使直线 l 和曲线 C 没有交点；

② 存在实数 k，对任意实数 b，直线 l 和曲线 C 恰有 1 个交点；

③ 存在实数 b，对任意实数 k，直线 l 和曲线 C 不会恰有 2 个交点；

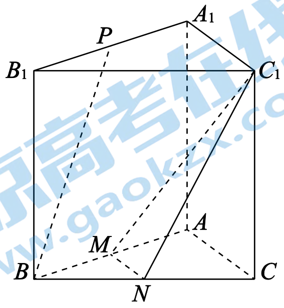
④ 对任意实数 k 和 b，直线 l 和曲线 C 不会恰有 3 个交点．

其中所有正确结论的序号是____．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，M,N,P 分别为 AB,BC,A_1B_1 的中点.



（Ⅰ）求证：$BP//$ 平面 C_1MN；

（Ⅱ）若 $AB\perp AC, AA_1=AB=AC=2$，求直线 B_1C_1 与平面 C_1MN 所成角的正弦值.

（17）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)+\cos 2x$，其中 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$. 再从条件①、条件②、条件③中选择一个作为已知，使 $f(x)$ 存在，并完成下列两个问题.

（Ⅰ）求 φ 的值；

（Ⅱ）当 $x\in[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}]$ 时，若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=m$ 恰有一个公共点，求 m 的取值范围.

条件①：$f(\dfrac{\pi}{6})=-1$；

条件②：$-\dfrac{\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 的一个零点；

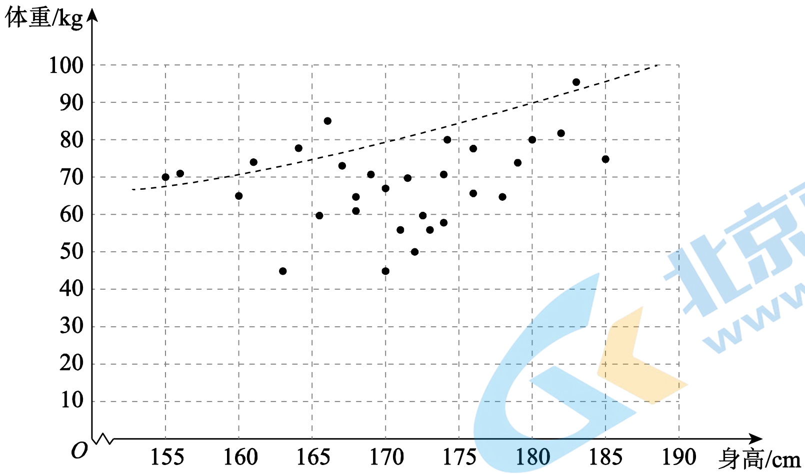
条件③：$f(0)=f(\dfrac{\pi}{3})$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 13 分）

体重指数（Body Mass Index，简称 BMI）是国际上衡量人体胖瘦程度的一项常用指标. 已知 $\mathrm{BMI}=\dfrac{W}{H^2}$，其中 W 表示体重（单位：kg），H 表示身高（单位：m）. 对成人，若 $\mathrm{BMI}\geqslant 28$，则身体处于肥胖状态.

某企业为了解员工的身体状况，从全体员工中随机抽取 30 人，测量他们的体重（单位：kg）和身高（单位：cm），得到如下散点图（图中曲线表示 $\mathrm{BMI}=28$ 时体重和身高的关系）.



假设用频率估计概率.

（Ⅰ）该企业员工总数为1500人，试估计该企业员工身体处于肥胖状态的人数；

（Ⅱ）从该企业身体处于肥胖状态的员工中随机抽取3人，设其中体重在80kg以上的人数为 X，估计 X 的分布列和数学期望 EX；

（Ⅲ）从样本中身高大于或等于 a（$a\in\{155,160,165,170,175,180\}$）的员工中随机抽取1人，若其身体处于肥胖状态的概率小于10%，写出 a 的所有可能取值.（结论不要求证明）

(19)（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的短轴长为 $2\sqrt{2}$，一个焦点为 $F_1(-2,0)$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程和离心率；

（Ⅱ）设直线 $l:x-my-2=0$ 与椭圆 E 交于两点 A,B，点 M 在线段 AB 上，点 F_1 关于点 M 的对称点为 C. 当四边形 AF_1BC 的面积最大时，求 m 的值.

(20)（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=x^2+\ln(x+1)$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 在区间 $[-\dfrac{1}{2},0]$ 上的最大值和最小值；

（Ⅱ）若 $(e^x+a\cos x)f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的值.

(21)（本小题 15 分）

给定奇数 $n\geqslant 3$，设 A_0 是 $n\times n$ 的数阵. a_{ij} 表示数阵第 i 行第 j 列的数，$a_{ij}=\begin{cases}1\text{或}-1, & i\neq j,\\ 0, & i=j,\end{cases}$ 且 $a_{ij}=a_{ji}$ $(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$. 定义变换 φ_t 为“将数阵中第 t 行和第 t 列的数都乘以 -1”，其中 $t\in\{1,2,\cdots,n\}$.

设 $T=(t_1,t_2,\cdots,t_s),\ t_r\in\{1,2,\cdots,n\},\ r=1,2,\cdots,s\ (s\in\mathbf{N}^*)$. 将 A_0 经过 φ_{t_1} 变换得到 A_1，A_1 经过 φ_{t_2} 变换得到 A_2，$\cdots$，A_{s-1} 经过 φ_{t_s} 变换得到 A_s. 记数阵 A_r 中1的个数为 $T_{A_0}(r)$.

（Ⅰ）当 $n=3$ 时，设 $A_0=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，$T=(1,3)$，写出 A_1,A_2，并求 $T_{A_0}(1),T_{A_0}(2)$；

（Ⅱ）当 $n=5,\ s\geqslant 2$ 时，对给定的数阵 A_0，证明：$T_{A_0}(2)-T_{A_0}(1)$ 是4的倍数；

（III）证明：对给定的数阵 A_0，总存在 T，使得 $T_{A_0}(s) \leqslant \frac{(n-1)^2}{2}$．

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）A　　（2）D　　（3）D　　（4）B　　（5）A

（6）A　　（7）B　　（8）C　　（9）C　　（10）B

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$[1,2)\cup(2,+\infty)$　　　　（12）$\frac{1}{32}$　7

（13）$\frac{3}{2}$　　　　（14）$\frac{1}{2}$　$\frac{\pi}{6}$（答案不唯一）

（15）①②③（注：选对 1 个给 2 分，选对 2 个给 3 分，全对给 5 分；错选 0 分）

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）连接 A_1M．

因为 M,N 分别为 AB,BC 的中点，所以 $MN/\!/AC$．

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AC/\!/A_1C_1$．

所以 $MN/\!/A_1C_1$， M,N,C_1,A_1 四点共面．　　　　………1 分

因为 $AB/\!/A_1B_1$， $AB=A_1B_1$， M,P 分别为 AB,A_1B_1 的中点，

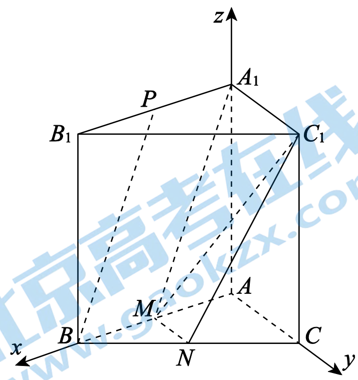
所以 $BM/\!/A_1P$， $BM=A_1P$．

所以四边形 BMA_1P 为平行四边形．　　　　………4 分

所以 $BP/\!/MA_1$．　　　　………5 分

因为 $BP\not\subset$ 平面 C_1MN， $MA_1\subset$ 平面 C_1MN，

所以 $BP/\!/$ 平面 C_1MN．　　　　………6 分



（Ⅱ）由题设 $AA_1\perp$ 平面 ABC，所以 $AA_1\perp AB$， $AA_1\perp AC$．

因为 $AB\perp AC$，所以 AB,AC,AA_1 两两垂直．

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$．　　　　………7 分

所以 $A(0,0,0),B(2,0,0),C(0,2,0),M(1,0,0),N(1,1,0),B_1(2,0,2),C_1(0,2,2)$．

$\overrightarrow{MN}=(0,1,0)$， $\overrightarrow{NC_1}=(-1,1,2)$， $\overrightarrow{B_1C_1}=(-2,2,0)$．

设平面 MNC_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{MN}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{NC_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y=0,\\ -x+y+2z=0.\end{cases}$

令 $x=2$，则 $y=0$， $z=1$．于是 $\boldsymbol{m}=(2,0,1)$．　　　　………10 分

设直线 B_1C_1 与平面 C_1MN 所成角为 α，则

$$\sin\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{B_1C_1}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{B_1C_1}|}=\frac{\sqrt{10}}{5}.$$　　　　………13 分

（17）（共 14 分）

解：选条件②.

（Ⅰ）由题设 $f(-\frac{\pi}{12})=\sin(-\frac{\pi}{6}+\varphi)+\cos(-\frac{\pi}{6})=0$． ………1 分

所以 $\sin(\varphi-\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$． ………2 分

因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$， 所以 $-\frac{2\pi}{3}<\varphi-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$． ………3 分

所以 $\varphi-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}$． ………4 分

所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$． ………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ） $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})+\cos 2x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x$ ………7 分

$=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$． ………8 分

因为 $-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$， 所以 $-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$． ………9 分

于是，当且仅当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$， 即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时， $f(x)$ 取得最大值1； ………11 分

当且仅当 $2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$， 即 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时， $f(x)$ 取得最小值 $-\frac{1}{2}$． ………12 分

又 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$， 即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时， $f(\frac{\pi}{3})=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$． ………13 分

所以 m 的取值范围是 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\cup\{1\}$． ………14 分

选条件③.

（Ⅰ）由题设 $\sin\varphi+\cos 0=\sin(\frac{2\pi}{3}+\varphi)+\cos\frac{2\pi}{3}$． ………1 分

整理得 $\sin(\varphi-\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$． ………2 分

以下同选条件②.

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为样本中身体处于肥胖状态的员工共 6 人， ………2 分

所以估计该企业员工身体处于肥胖状态的人数为 $1500\times\frac{6}{30}=300$． ………4 分

（Ⅱ）因为样本中身体处于肥胖状态的员工共 6 人，且其中恰有 2 人体重在 80kg 以上，所以从该企业身体处于肥胖状态的员工中随机抽取1人，估计其体重在 80kg 以上的概率为 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$． ………5 分

由题设， $X\sim B(3,\frac{1}{3})$； X 的所有可能取值为 $0,1,2,3$．

$P(X=0)$ 估计为 $(1-\frac{1}{3})^3=\frac{8}{27}$； $P(X=1)$ 估计为 $C_3^1\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{3})^2=\frac{4}{9}$；

$P(X=2)$ 估计为 $C_3^2\times(\frac{1}{3})^2\times(1-\frac{1}{3})=\frac{2}{9}$； $P(X=3)$ 估计为 $(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27}$. ……9 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

估计 X 的数学期望 $EX=0\times\frac{8}{27}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{27}=1$. ………11 分

（Ⅲ） $a=165$ 或 170. ………13 分

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由题设 $\begin{cases}c=2,\\2b=2\sqrt{2},\\a^2=b^2+c^2.\end{cases}$ ………3 分

解得 $\begin{cases}a=\sqrt{6},\\b=\sqrt{2}.\end{cases}$

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$. ………4 分

E 的离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. ………5 分

（Ⅱ）设椭圆 E 的另一个焦点为 $F_2(2,0)$，则直线 l 过点 F_2. ………6 分

由 $\begin{cases}x=my+2,\\x^2+3y^2=6\end{cases}$ 得 $(m^2+3)y^2+4my-2=0$. ………7 分

设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\frac{-4m}{m^2+3}$， $y_1y_2=\frac{-2}{m^2+3}$. ………9 分

由题设，点 M 为线段 F_1C 的中点，所以点 F_1 和点 C 到直线 AB 的距离相等.

所以四边形 AF_1BC 的面积为 $\triangle F_1AB$ 面积的 2 倍. ………10 分

又 $y_1y_2=\frac{-2}{m^2+3}<0$，

所以 $S_{四边形AF_1BC}=2S_{\triangle F_1AB}=2\times\frac{1}{2}\times|F_1F_2|\times(|y_1|+|y_2|)$

$=4|y_1-y_2|=4\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$. ………12 分

所以 $S_{四边形AF_1BC}=4\sqrt{\frac{16m^2}{(m^2+3)^2}+\frac{8}{m^2+3}}=8\sqrt{6}\sqrt{\frac{m^2+1}{(m^2+3)^2}}$. ………13 分

设 $t=m^2+1$，则 $t\geqslant 1$.

所以 $S_{四边形AF_1BC}=8\sqrt{6}\sqrt{\frac{t}{(t+2)^2}}=8\sqrt{6}\sqrt{\frac{1}{t+\frac{4}{t}+4}}\leqslant 4\sqrt{3}$. ………14 分

当且仅当 $t=2$，即 $m=\pm1$ 时，$S_{四边形AF_1BC}=4\sqrt{3}$.

所以四边形 AF_1BC 的面积最大时，$m=\pm1$. ………15 分

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $f'(x)=2x+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}}{x+1}>0$， ………2 分

所以 $f(x)$ 在区间 $[-\dfrac{1}{2},0]$ 上单调递增. ………3 分

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{4}-\ln 2$；$f(x)$ 的最大值为 $f(0)=0$. ……5 分

（Ⅱ）$f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$.

由（Ⅰ）知 $f(0)=0$，且 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x>0$ 时，$f(x)>0$；当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$. ………7 分

设 $g(x)=\mathrm{e}^x+a\cos x$.

若 $g(x)f(x)\geqslant 0$ 恒成立，则当 $x>0$ 时，$g(x)\geqslant 0$；当 $-1<x<0$ 时，$g(x)\leqslant 0$.

所以 $g(0)=0$，即 $\mathrm{e}^0+a\cos 0=0$，解得 $a=-1$. ………9 分

下面证明：当 $a=-1$ 时，$g(x)f(x)\geqslant 0$ 恒成立.

此时，$g(x)=\mathrm{e}^x-\cos x$，$g'(x)=\mathrm{e}^x+\sin x$.

当 $x>0$ 时，$g'(x)>1+\sin x\geqslant 0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)>g(0)=0$. ………11 分

当 $-1<x<0$ 时，设 $h(x)=g'(x)$.

因为 $h'(x)=\mathrm{e}^x+\cos x>0$，所以 $g'(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增.

又 $g'(-1)=\mathrm{e}^{-1}+\sin(-1)<\mathrm{e}^{-1}+\sin(-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<0$，$g'(0)=1>0$，

所以存在唯一的 $x_0\in(-1,0)$，使得 $g'(x_0)=0$. ………13 分

所以 $g(x)$ 在 $(-1,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,0)$ 上单调递增.

因为 $g(-1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\cos(-1)<\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\dfrac{1}{2}<0$，且 $g(0)=0$，

所以当 $-1<x<0$ 时，$g(x)<0$ 恒成立.

综上，$a=-1$. ………15 分

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由题设 $A_1=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$. ………2 分

所以 $T_{A_0}(1)=4$，$T_{A_0}(2)=0$． ………4 分

（Ⅱ）设数阵 A_1 中第 t_2 行和第 t_2 列中 1 的个数均为 x_{t_2}，-1 的个数均为 $4-x_{t_2}$．

经过 φ_{t_2} 变换，A_1 的第 t_2 行和第 t_2 列均有 x_{t_2} 个 1 变为 -1，有 $4-x_{t_2}$ 个 -1 变为 1．

所以 $T_{A_0}(2)-T_{A_0}(1)=2\times(4-x_{t_2}-x_{t_2})=4(2-x_{t_2})$．

即 $T_{A_0}(2)-T_{A_0}(1)$ 是 4 的倍数． ………9 分

（Ⅲ）数阵 A_m 经过 $\varphi_{t_{m+1}}$ 变换得到数阵 A_{m+1}，设 A_m 第 t_{m+1} 行和第 t_{m+1} 列中 1 的个数均为 $y_{t_{m+1}}$．

由（Ⅱ）可知，$T_{A_0}(m+1)=T_{A_0}(m)+2\times[(n-1)-2y_{t_{m+1}}]=T_{A_0}(m)+2n-2-4y_{t_{m+1}}$．

………10 分

设当 $T=T'$ 时，$T_{A_0}(s)$ 取得最小值 $T'_{A_0}(s)$，其中 $T'=(t_1,t_2,\cdots,t_s)$．

记 A_s 每行中 1 的个数为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，则必有 $z_i\leqslant\dfrac{n-1}{2}(i=1,2,\cdots,n)$．

否则，若存在 j 使得 $z_j>\dfrac{n-1}{2}$，则令 $T''=(t_1,t_2,\cdots,t_s,j)$，有

$T''_{A_0}(s+1)=T''_{A_0}(s)+2n-2-4z_j<T''_{A_0}(s)=T'_{A_0}(s)$，与 $T'_{A_0}(s)$ 为最小值矛盾．…11 分

在 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 中，① 若等于 $\dfrac{n-1}{2}$ 的个数不超过 $\dfrac{n+1}{2}$，

则 $T'_{A_0}(s)\leqslant\dfrac{n+1}{2}\times\dfrac{n-1}{2}+(n-\dfrac{n+1}{2})\times(\dfrac{n-1}{2}-1)=\dfrac{(n-1)^2}{2}$． ………12 分

②若等于 $\dfrac{n-1}{2}$ 的个数大于 $\dfrac{n+1}{2}$，则必存在 i,j 满足 $a_{ij}=-1$，且 $z_i=z_j=\dfrac{n-1}{2}$．

否则，不妨设 $z_1=\dfrac{n-1}{2}$，则共有 $n-1-\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{n-1}{2}$ 个 j 满足 $a_{1j}=-1$，且 $z_j<\dfrac{n-1}{2}$，

所以 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 中至多有 $n-\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{n+1}{2}$ 个等于 $\dfrac{n-1}{2}$，矛盾．

故存在 i,j 满足 $a_{ij}=-1$，且 $z_i=z_j=\dfrac{n-1}{2}$． ………13 分

取 $T'''=(t_1,t_2,\cdots,t_s,j,i)$，因为 $z_j=\dfrac{n-1}{2}$，所以 $T'''_{A_0}(s+1)=T'''_{A_0}(s)$．

由 A_s 变换为 A_{s+1} 时，a_{ij} 从 -1 变为 1，故数阵 A_{s+1} 第 i 行中 1 的个数为 $\dfrac{n-1}{2}+1=\dfrac{n+1}{2}$．

故 $T'''_{A_0}(s+2)=T'''_{A_0}(s+1)+2n-2-4\times\dfrac{n+1}{2}=T'''_{A_0}(s+1)-4<T'''_{A_0}(s+1)=T'''_{A_0}(s)=T'_{A_0}(s)$，

这与 $T'_{A_0}(s)$ 为最小值矛盾．

综上，对给定的数阵 A_0，总存在 T，使得 $T_{A_0}(s)\leqslant\dfrac{(n-1)^2}{2}$． ………15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘‘ 精益求精、专业严谨 ’’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。