九师联盟

2019～2020学年高三10月质量检测

数　学(理科)

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：集合、常用逻辑用语、函数、导数及其应用、三角函数、三角恒等变换、解三角形、平面向量、数列。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 集合$A=\{x|x^2(x-1)=0\}$的子集个数是

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

2. 命题“若$3^x-9=0$，则$x=2$”的否命题为

A. 若$x\neq2$，则$3^x-9\neq0$　　B. 若$3^x-9\neq0$，则$x\neq2$

C. 若$x=2$，则$3^x-9=0$　　D. 若$3^x-9=0$，则$x\neq2$

3. “$x>4$”是“$\log_3x>1$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 既不充分也不必要条件　　D. 充要条件

4. 计算$\int_1^2\left(\frac{3}{x}+1\right)dx$的值为

A. $\ln2+1$　　B. $2\ln2+1$

C. $3\ln2+3$　　D. $3\ln2+1$

5. 已知$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}$，则$\cos\left(2\alpha+\frac{5\pi}{3}\right)=$

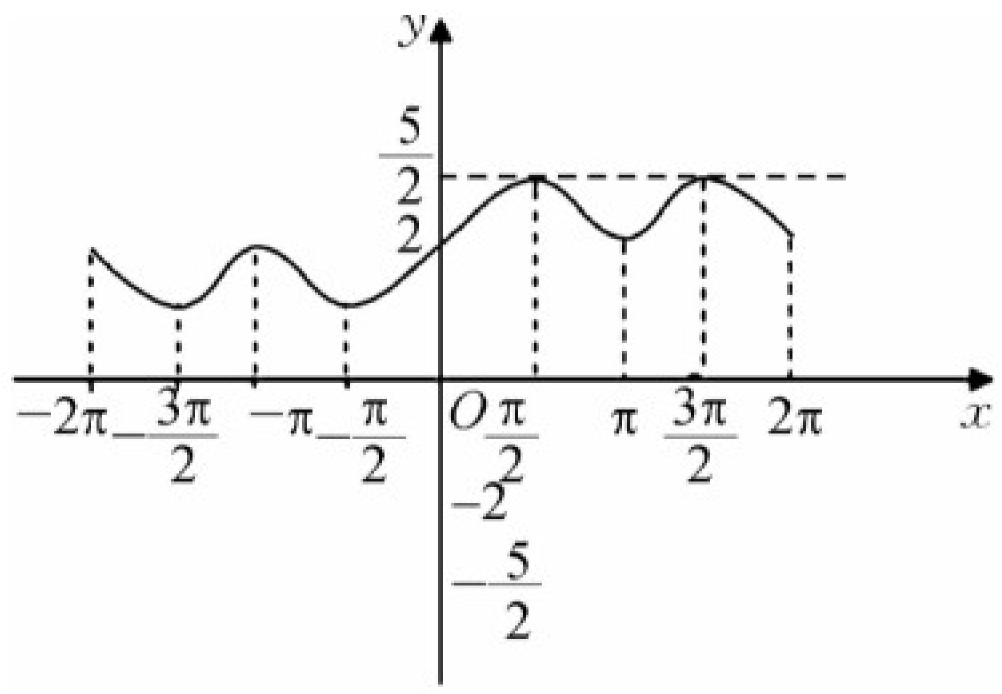
A. $\frac{1}{3}$　　B. $\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　C. $-\frac{7}{9}$　　D. $\frac{7}{9}$

6. 已知向量$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{51}{7},\frac{68}{7}\right)$，$\overrightarrow{AC}=\left(\frac{6}{7},\frac{8}{7}\right)$，$D,E$是线段$BC$上两点，且$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$，则向量$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{AE}$的关系是

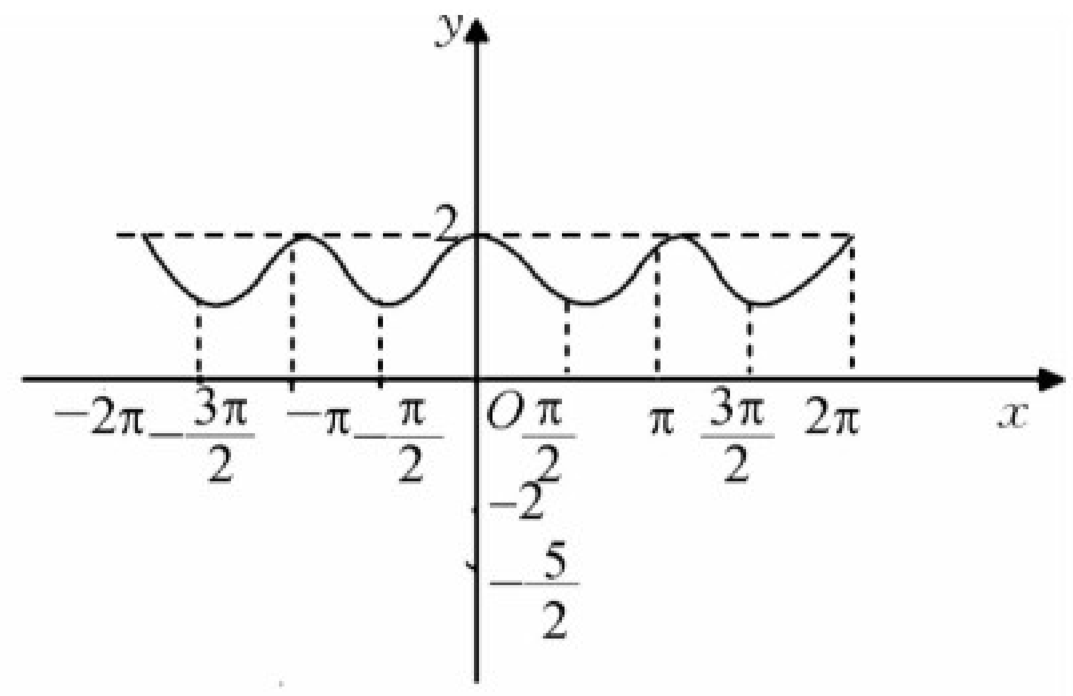
A. $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AE}$　　B. $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

C. $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AE}$　　D. $\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{AE}$成60°夹角

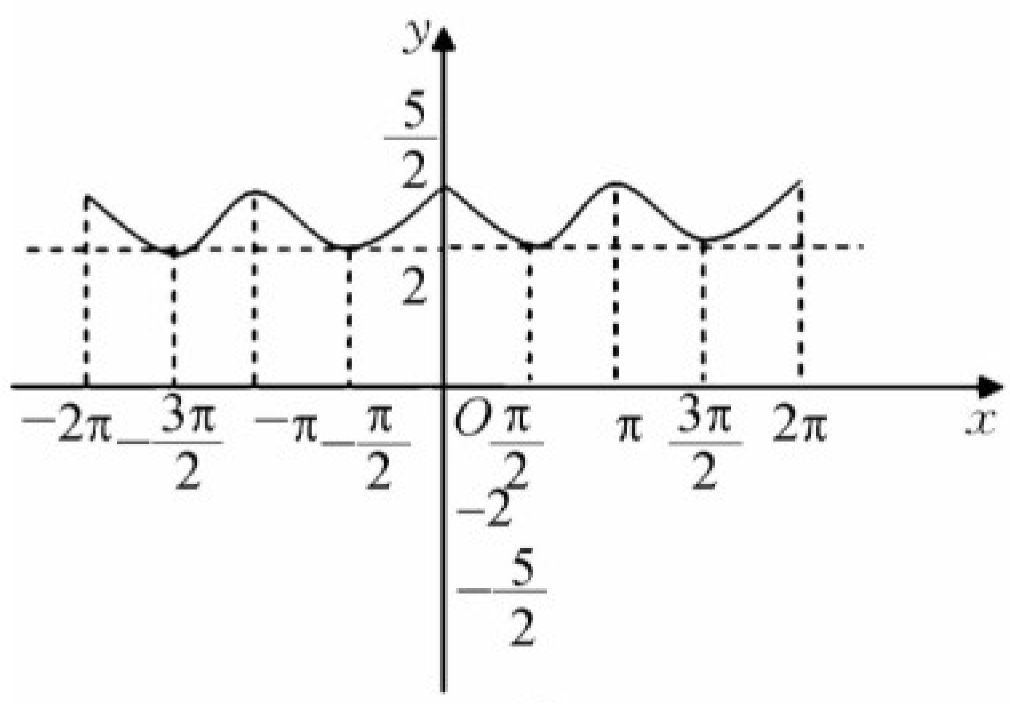
7. 函数 $y=2^{\sin x}+\dfrac{1}{2^{\sin x}}$ 的大致图象是



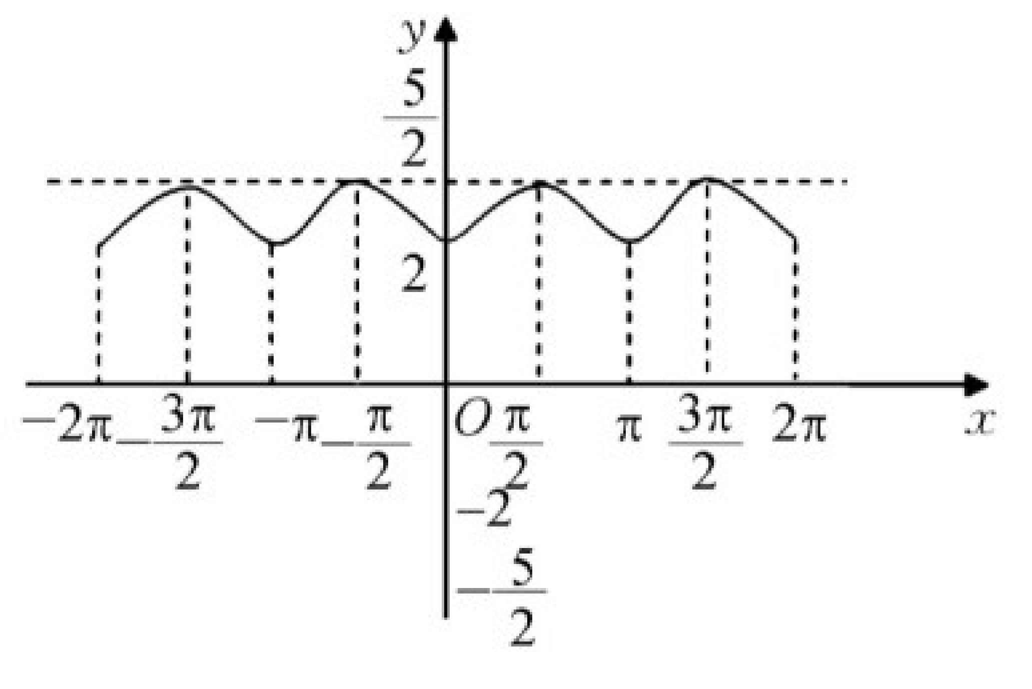
A



B



C



D

8. 在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,\cos B)$，$\boldsymbol{\beta}=(\cos A,-b)$，若 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$，则△$ABC$ 一定是

A. 锐角三角形　　B. 等腰三角形

C. 直角三角形　　D. 等腰三角形或直角三角形

9. 已知奇函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)-\cos(\omega x+\varphi)\left(|\varphi|<\dfrac{\pi}{2},\omega>0\right)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)+f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，则当 ω 取最小值时，$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值为

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_n=2S_{n-1}+1(n\geqslant 2$，且 $n\in\mathbf{N}^*)$ 且 $S_2=3$，则 $\dfrac{S_5}{a_5}=$

A. $\dfrac{63}{32}$　　B. $\dfrac{31}{16}$　　C. $\dfrac{123}{64}$　　D. $\dfrac{127}{128}$

11. 如图所示，矗立于伦敦泰晤士河畔的伦敦眼(The London Eye)是世界上首座、也曾经是世界最大的观景摩天轮. 已知其旋转半径 60 米，最高点距地面 135 米，运行一周大约 30 分钟. 某游客在最低点的位置坐上摩天轮，则第 10 分钟时他距地面大约为

A. 95 米　　B. 100 米　　C. 105 米　　D. 110 米

12. 已知各项都为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_1=1$，$S_3=7$. 若 $f(x)=S_nx+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n(n\geqslant 2)$，$f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数，则 $f'(1)-f'(0)=$

A. $(n-1)\cdot 2^n$　　B. $2n(n-1)$　　C. $n\cdot 2^{n+1}$　　D. $2n(n+1)$

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2k,1)$,$\boldsymbol{b}=(k+1,-3)$,若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则实数 k 的值为__________.

14. 已知函数 $f(x)=x^3+2f'(1)x-3$,则 $f'(2)=$__________.

15. 规定$[t]$为不超过 t 的最大整数,如$[3.1]=3$,$[-2.9]=-3$. 若函数 $f(x)=[x]^2-[x](x\in\mathbf{R})$,则方程 $f^2(x)-f(x)=2$ 的解集是__________.

16. 设 A 是由满足下列性质的函数 $f(x)$ 构成的集合:在函数 $f(x)$ 的定义域内存在 x_0,使得 $f(2x_0)=f\left(\frac{x_0}{2}\right)$成立. 已知下列函数:① $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$;② $f(x)=\ln\frac{1}{x^2}$;③ $f(x)=-\frac{1}{x}$;④ $f(x)=x^{-2}$. 其中属于集合 A 的函数是__________.(写出所有满足要求的函数的序号)

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=4\cos^2x+m\sin x\cos x(m\in\mathbf{R})$,且满足 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=4$.

(1)求 m 的值及 $f(x)$的最小正周期;

(2)若 $x\in\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$,求 $f(x)$的单调区间.

18.(本小题满分 12 分)

已知 a,b,c 分别是$\triangle ABC$ 的角 A,B,C 的对边,且 $c=2$,$a^2+b^2-4=ab$.

(1)求角 C;

(2)若 $\sin^2B-\sin^2A=\sin C(2\sin 2A-\sin C)$,求$\triangle ABC$ 的面积.

19.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x-2x^2+bx$,且曲线 $y=f(x)$在点 $x=0$ 处的切线方程是 $y=2x+2$.

(1)求 a,b 的值.

(2)(ⅰ)求函数 $f(x)$的单调区间;

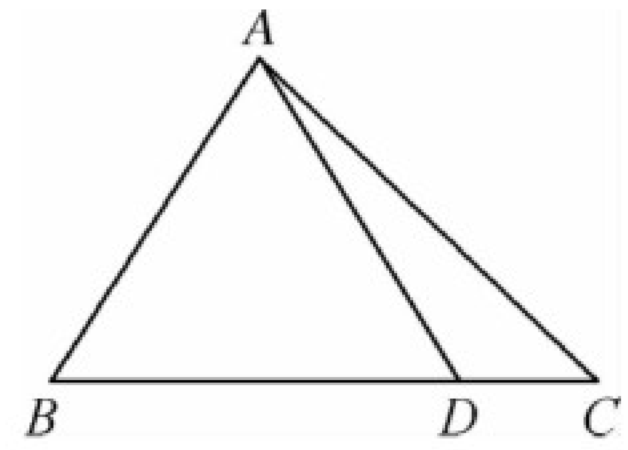
(ⅱ)求 $f(x)\geqslant 2$ 的解集.

20.(本小题满分 12 分)

如图,在△ABC 中,$C=\frac{\pi}{4}$,$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=48$,点 D 在 BC 边上,且 $AD=5\sqrt{2}$,$\cos\angle ADB=\frac{3}{5}$.

(1)求 AC,CD 的长;

(2)求 $\cos\angle BAD$.



21.(本小题满分 12 分)

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=0$,$a_2=1$,$a_{n+2}=\lambda a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n(n\in\mathbf{N}^*,\lambda\in\mathbf{R})$.

(1)若 $b_n=a_{n+1}+a_n$,试问是否存在实数 λ,使得数列$\{b_n\}$是等比数列?若存在,求出 λ 的值;若不存在,请说明理由;

(2)在(1)的条件下,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x(x^2-a)+\frac{1}{x}$.

(1)证明:对任意 $a\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)$的导函数 $f'(x)$是偶函数;

(2)若 $a<0$,$g(x)=f(x)-\frac{1}{x}-\frac{1}{9}\ln x$,讨论函数 $g(x)$的零点个数.

2019～2020学年高三10月质量检测·数学(理科)

参考答案、提示及评分细则

1. C　因为 $A=\{0,1\}$,所以其子集个数是 $2^2=4$. 故选 C.

2. B　否命题是既否定条件、也否定结论,所以命题"若 $3^x-9=0$,则 $x=2$"的否命题为"若 $3^x-9\neq0$,则 $x\neq2$". 故选 B.

3. A　当 $x>4$ 时,有 $\log_3 x>1$,充分性成立;当"$\log_3 x>1$"时,有 $x>3$,不能推出"$x>4$",必要性不成立,因此,"$x>4$"是"$\log_3 x>1$"的充分不必要条件. 故选 A.

4. D　$\int_1^2\left(\frac{3}{x}+1\right)\mathrm{d}x=(3\ln x+x)|_1^2=(3\ln 2+2)-(3\ln 1+1)=3\ln 2+1$. 故选 D.

5. C　因为 $\cos\left(2\alpha+\frac{5\pi}{3}\right)=\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}+\pi\right)=-\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-1=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2-1=-\frac{7}{9}$. 故选 C.

6. A　$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{4}{5}\left(\frac{51}{7},\frac{68}{7}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{6}{7},\frac{8}{7}\right)=(6,8)$,$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\left(\frac{51}{7},\frac{68}{7}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{6}{7},\frac{8}{7}\right)=(3,4)$,所以 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AE}$. 故选 A.

7. D　因为 $f(-x)=2^{\sin(-x)}+\frac{1}{2^{\sin(-x)}}=2^{-\sin x}+\frac{1}{2^{-\sin x}}=(2^{\sin x})^{-1}+\frac{1}{(2^{\sin x})^{-1}}=\frac{1}{2^{\sin x}}+2^{\sin x}=f(x)$,且函数 $y=2^{\sin x}+\frac{1}{2^{\sin x}}$的定义域为 $\mathbf{R}$,所以函数 $y=2^{\sin x}+\frac{1}{2^{\sin x}}$是偶函数,排除 A 项;又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2^{\sin\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2^{\sin\frac{\pi}{2}}}=2^1+\frac{1}{2^1}=\frac{5}{2}$,排除 B,C 项. 故选 D.

8. D　因 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$,所以 $a\cos A-b\cos B=0$,所以 $b\cos B=a\cos A$,由正弦定理可知 $\sin B\cos B=\sin A\cos A$,所以 $\sin 2A=\sin 2B$. 又 $A,B\in(0,\pi)$,且 $A+B\in(0,\pi)$,所以 $2A=2B$,或 $2A+2B=\pi$,所以 $A=B$,或 $A+B=\frac{\pi}{2}$. 则△ABC 是等腰三角形或直角三角形. 故选 D.

9. B　因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)-\cos(\omega x+\varphi)=2\sin\left(\omega x+\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$,又 $f(x)$为奇函数,所以 $f(0)=2\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)=0$,所以 $\varphi-\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$. 所以 $f(x)=2\sin\omega x$. 又因为对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)+f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0$,所以 $\sin\left(\omega x+\frac{\pi\omega}{2}\right)=-\sin\omega x$,所以 $\frac{\pi}{2}\omega=(2k-1)\pi(k\in\mathbf{Z})$,所以 $\omega=4k-2(k\in\mathbf{Z})$. 又 $\omega>0$,故 ω 的最小值为 2,此时 $f(x)=2\sin 2x$,所以 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$. 故选 B.

10. B　由 $S_2=3$ 及 $S_n=2S_{n-1}+1(n\geqslant2$,且 $n\in\mathbf{N}^*)$,得 $S_2=2S_1+1$,得 $3=2S_1+1$,得 $S_1=1$. 因为 $S_n=2S_{n-1}+1$,所以 $S_n+1=2(S_{n-1}+1)$. 则数列$\{S_n+1\}$是以 $S_1+1=2$ 为首项、2 为公比的等比数列. 所以 $S_n+1=2\times2^{n-1}$. 则 $S_n=2^n-1$,即$\frac{S_5}{a_5}=\frac{2^5-1}{S_5-S_4}=\frac{2^5-1}{2^5-1-(2^4-1)}=\frac{31}{16}$. 故选 B.

11. C　设人在摩天轮上离地面高度(米)与时间 t(分钟)的函数关系为 $f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+$

$B(A>0,\omega>0,\varphi\in[0,2\pi))$. 由题意可知 $A=60$，$B=135-60=75$，$T=\frac{2\pi}{\omega}=30$，所以 $\omega=\frac{\pi}{15}$，即 $f(t)=60\sin\left(\frac{\pi}{15}t+\varphi\right)+75$. 又因为 $f(0)=135-120=15$，解得 $\sin\varphi=-1$，故 $\varphi=\frac{3\pi}{2}$，所以 $f(t)=60\sin\left(\frac{\pi}{15}t+\frac{3\pi}{2}\right)+75=-60\cos\frac{\pi}{15}t+75$，所以 $f(10)=-60\times\cos\frac{2\pi}{3}+75=105$. 故选 C.

12. A　设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q>0)$. 由 $a_1=1$，$S_3=7$ 知 $q\neq1$，所以 $\begin{cases}a_1=1,\\ S_3=\frac{1\cdot(1-q^3)}{1-q}=7,\end{cases}$ 解得 $q=2$ 或 $q=-3$（舍）. 所以 $a_n=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$. 因为 $f(x)=S_nx+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$，所以 $f'(x)=S_n+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}$. 所以 $f'(0)=S_n$，$f'(1)=S_n+2a_2+3a_3+\cdots+na_n$，所以 $f'(1)-f'(0)=2a_2+3a_3+\cdots+na_n=2\times2+3\times2^2+\cdots+n\cdot2^{n-1}$. 令 $T=2\times2+3\times2^2+\cdots+n\times2^{n-1}$，①　则 $2T=2\times2^2+3\times2^3+\cdots+(n-1)\cdot2^{n-1}+n\cdot2^n$，②

由①－②，得 $-T=2\times2+(2^2+2^3+\cdots+2^{n-1})-n\cdot2^n=4+\frac{2^2(1-2^{n-2})}{1-2}-n\cdot2^n$

$=4+2^n-4-n\cdot2^n=(1-n)\cdot2^n$，

所以 $T=(n-1)\cdot2^n$. 即 $f'(1)-f'(0)=(n-1)\cdot2^n$. 故选 A.

13. $-\frac{1}{7}$　由题意，$2k\times(-3)-(k+1)\times1=0$，解得 $k=-\frac{1}{7}$.

14. 6　由 $f(x)=x^3+2f'(1)x-3$，得 $f'(x)=3x^2+2f'(1)$，令 $x=1$，得 $f'(1)=3+2f'(1)$，解得 $f'(1)=-3$. 所以 $f'(x)=3x^2-6$. 所以 $f'(2)=6$.

15. $[-1,0)\cup[2,3)$　由 $f^2(x)-f(x)=2$，得 $[f(x)-2][f(x)+1]=0$，解得 $f(x)=2$ 或 $f(x)=-1$. 当 $f(x)=2$ 时，$[x]^2-[x]=2$，解得 $[x]=2$ 或 $[x]=-1$. 当 $[x]=2$ 时，解得 $x\in[2,3)$；当 $[x]=-1$ 时，解得 $x\in[-1,0)$；当 $f(x)=-1$ 时，$[x]^2-[x]=-1$，无解. 综上，方程 $f^2(x)-f(x)=2$ 的解集是 $[-1,0)\cup[2,3)$.

16. ①　先求得函数 $f(x)$ 的定义域，然后对每一个函数，验证 $f(2x_0)=f\left(\frac{x_0}{2}\right)$ 是否有实数解. 若方程有实数解，则该函数就是属于集合 A 的函数；若方程没有实数解，则该函数就是不属于集合 A 的函数. 对于①，对于函数 $f(x)=e^x+e^{-x}$，其定义域为 $\mathbf{R}$. 令 $f(2x_0)=f\left(\frac{x_0}{2}\right)$，得 $e^{2x_0}+e^{-2x_0}=e^{\frac{x_0}{2}}+e^{-\frac{x_0}{2}}$，显然 $x_0=0$ 是其一解，故函数 $f(x)=e^x+e^{-x}$ 是属于集合 A 的函数；对于②，对于函数 $f(x)=\ln\frac{1}{x^2}$，其定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 令 $f(2x_0)=f\left(\frac{x_0}{2}\right)$，得方程 $\ln\frac{1}{(2x_0)^2}=\ln\frac{1}{\left(\frac{x_0}{2}\right)^2}$，得 $\frac{1}{4x_0^2}=\frac{4}{x_0^2}$，解得 $x_0\in\varnothing$. 故函数 $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ 是不属于集合 A 的函数；对于③，对于函数 $f(x)=-\frac{1}{x}$，其定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 令 $f(2x_0)=f\left(\frac{x_0}{2}\right)$，得方程 $-\frac{1}{2x_0}=-\frac{1}{\frac{x_0}{2}}$，化简得 $\frac{1}{2x_0}=\frac{2}{x_0}$，得 $\frac{1}{2x_0}=\frac{4}{2x_0}$，显然此方程无实数解，故函数 $f(x)=-\frac{1}{x}$ 是不属于集合 A 的函数；对于④，对于函数 $f(x)=x^{-2}$，其定义域

为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 令$f(2x_0)=f\left(\frac{x_0}{2}\right)$,得方程$(2x_0)^{-2}=\left(\frac{x_0}{2}\right)^{-2}$,得$\frac{1}{(2x_0)^2}=\frac{1}{\left(\frac{x_0}{2}\right)^2}$,得$\frac{1}{4x_0{}^2}=\frac{4}{x_0{}^2}$,显然

此方程也无实数解,故函数$f(x)=x^{-2}$是不属于集合A的函数.综上,属于集合A的函数是①.

17.解:(1)由$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=4$,得$4\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+m\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4$,

解得$m=4$. ………………………………………………………………………………… 2分

$f(x)=4\cos^2x+4\sin x\cos x$

$=4\times\frac{1+\cos 2x}{2}+2\sin 2x$

$=2+2\cos 2x+2\sin 2x$

$=2\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+2$, ………………………………………………… 4分

所以函数$f(x)$的最小正周期$T=\pi$. ……………………………………………………… 5分

(2)由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得$-\frac{3\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{8}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

又$x\in\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$时,所以$x\in\left[0,\frac{\pi}{8}\right]$,或$x\in\left[\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right]$,即$f(x)$的单调递增区间为$\left[0,\frac{\pi}{8}\right]$和$\left[\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right]$; ……… 8分

由$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得$\frac{\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{8}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,又$x\in\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$,

所以$f(x)$的单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right]$. ………………………………………………… 10分

18.解:(1)由余弦定理,得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-2^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$, ……………………………… 2分

又$C\in(0,\pi)$,所以$C=\frac{\pi}{3}$. …………………………………………………………… 4分

(2)由$\sin^2B-\sin^2A=\sin C(2\sin 2A-\sin C)$,得$\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A=2\sin 2A\sin C$,

得$\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A=4\sin A\cos A\sin C$, ………………………………………… 5分

再由正弦定理得$b^2+c^2-a^2=4ac\cos A$,所以$2bc\cos A=4ac\cos A$. ……………………… 6分

所以$b=2a$或$\cos A=0$. ………………………………………………………………… 7分

①当$b=2a$时,因为$a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{3}=4$,联立可得$a=\frac{2}{\sqrt{3}}$,$b=\frac{4}{\sqrt{3}}$, ……………………… 8分

所以$b^2=a^2+c^2$,所以$B=\frac{\pi}{2}$,所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ac=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\times 2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ……………………… 9分

②当$\cos A=0$时,因$A\in(0,\pi)$,所以$A=\frac{\pi}{2}$,所以$b=\frac{2}{\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$,

所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times 2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, ………………………………………… 11分

综上，$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1) $f'(x)=ae^x-4x+b$，

则切线的斜率为 $f'(0)=a+b$. ………………………………………………………………………… 1 分

又 $f(0)=a$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处的切线方程是 $y-a=(a+b)(x-0)$，即 $y=(a+b)x+a$. ……… 2 分

又因为切线方程是 $y=2x+2$，

对比系数得$\begin{cases}a+b=2,\\a=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=0,\\a=2.\end{cases}$ ……………………………………………………………… 4 分

(2)(ⅰ)由(1)得 $f(x)=2e^x-2x^2$，

则 $f'(x)=2e^x-4x$. …………………………………………………………………………………… 5 分

令 $h(x)=f'(x)\Rightarrow h'(x)=2e^x-4$.

当 $h'(x)>0\Rightarrow x>\ln 2$ 时，$f'(x)$为增函数；

当 $h'(x)<0\Rightarrow x<\ln 2$ 时，$f'(x)$为减函数，

所以 $f'(x)_{\min}=f'(\ln 2)=4-4\ln 2>0$. ……………………………………………………………… 7 分

所以对 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,+\infty)$，无单调递减区间. ……………………………………… 8 分

(ⅱ) $f(x)\geqslant 2\Leftrightarrow 2e^x-2x^2\geqslant 2\Leftrightarrow e^x-x^2-1\geqslant 0$. ……………………………………………… 9 分

令 $g(x)=e^x-x^2-1$.

因为 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$为增函数，

所以 $g(x)$在$(-\infty,+\infty)$为增函数. ……………………………………………………………… 10 分

因为 $g(0)=e^0-0-1=0$，

所以不等式 $f(x)\geqslant 2$ 的解集为$[0,+\infty)$. ………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)在$\triangle ABD$ 中，因为 $\cos\angle ADB=\frac{3}{5}$，且$\angle ADB\in(0,\pi)$，所以 $\sin\angle ADB=\frac{4}{5}$. ……………………… 2 分

又$\angle CAD=\angle ADB-\frac{\pi}{4}$，

所以 $\sin\angle CAD=\sin\left(\angle ADB-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sin\angle ADB\cos\frac{\pi}{4}-\cos\angle ADB\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{10}$. …………………………………………………………………………………………… 4 分

在$\triangle ADC$中，由正弦定理得$\dfrac{AC}{\sin(\pi-\angle ADB)}=\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}$，即$\dfrac{AC}{\frac{4}{5}}=\dfrac{CD}{\frac{\sqrt{2}}{10}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，

解得$AC=8$，$CD=\sqrt{2}$. ………………………………………………………………………… 6分

(2)因为$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=48$，

所以$8\cdot CB\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=48$，解得$CB=6\sqrt{2}$.

所以$BD=CB-CD=5\sqrt{2}$. ………………………………………………………………………… 8分

在$\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C}=\sqrt{8^2+(6\sqrt{2})^2-2\times8\times6\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

$=2\sqrt{10}$. ………………………………………………………………………… 10分

在$\triangle ABD$中，$\cos\angle BAD=\dfrac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}=\dfrac{(2\sqrt{10})^2+(5\sqrt{2})^2-(5\sqrt{2})^2}{2\times2\sqrt{10}\times5\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ………………………………………………………………………… 12分

21. 解：(1)由$a_{n+2}=\lambda a_{n+1}+\dfrac{1}{2}a_n$，得$a_{n+2}+a_{n+1}=(\lambda+1)(a_{n+1}+a_n)-\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)a_n$，

因为$b_n=a_{n+1}+a_n$，所以$b_{n+1}=(\lambda+1)b_n-\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)a_n$. ……………………………… 2分

要使数列$\{b_n\}$是等比数列，需使$-\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)a_n=0$对任意$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，

所以$-\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)=0$，解得$\lambda=-\dfrac{1}{2}$. ………………………………………………… 3分

此时$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n$，且首项$b_1=a_1+a_2=0+1=1$. ……………………………………… 4分

所以存在$\lambda=-\dfrac{1}{2}$，使得数列$\{b_n\}$是首项为1，公比为$\dfrac{1}{2}$的等比数列. ………………… 5分

(2)由(1)知，$b_n=a_{n+1}+a_n=1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，

所以$2^na_{n+1}+2^na_n=2$. ………………………………………………………………………… 6分

令$c_n=2^na_n$，得$\dfrac{1}{2}c_{n+1}+c_n=2$，即$c_{n+1}=-2c_n+4$，

所以$c_{n+1}-\dfrac{4}{3}=-2\left(c_n-\dfrac{4}{3}\right)$. ………………………………………………………… 8分

因为$a_1=0$，所以$c_1-\dfrac{4}{3}=2a_1-\dfrac{4}{3}=-\dfrac{4}{3}$，

所以数列$\left\{c_n-\dfrac{4}{3}\right\}$是以$-\dfrac{4}{3}$为首项，$-2$为公比的等比数列，……………………………… 10分

所以$c_n-\dfrac{4}{3}=-\dfrac{4}{3}\cdot(-2)^{n-1}$，

即 $2^n a_n=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\cdot(-2)^{n-1}$，

所以 $a_n=\frac{4}{3\cdot 2^n}-\frac{4}{3}\cdot\frac{(-2)^{n-1}}{2^n}=\frac{2^{2-n}}{3}-(-1)^{n-1}\cdot\frac{2}{3}$.

即 $a_n=\frac{2^{2-n}}{3}-(-1)^{n-1}\cdot\frac{2}{3}(n\in\mathbf{N}^*)$. …………………………………………………………………… 12 分

22.(1)证明：函数 $f(x)=x(x^2-a)+\frac{1}{x}$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. …………………………………… 1 分

则 $f'(x)=3x^2-a-\frac{1}{x^2}$，函数 $f'(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. …………………………………… 2 分

因为对任意 $a\in\mathbf{R}$，都有 $3(-x)^2-a-\frac{1}{(-x)^2}=3x^2-a-\frac{1}{x^2}$，

即 $f'(-x)=f'(x)$.

因此，对任意 $a\in\mathbf{R}$，导函数 $f'(x)$ 是偶函数. ………………………………………………………………… 4 分

(2)解：$g(x)=x^3-ax-\frac{1}{9}\ln x(x>0)$，$g'(x)=3x^2-a-\frac{1}{9x}=\frac{27x^3-9ax-1}{9x}$，…………………………………… 5 分

令 $h(x)=27x^3-9ax-1(x\geqslant 0)$，则 $h'(x)=81x^2-9a$.

因为 $a<0$，所以 $h'(x)>0$.

所以 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………………………………………………… 6 分

因为 $h\left(\frac{1}{3}\right)=27\times\left(\frac{1}{3}\right)^3-9a\cdot\frac{1}{3}-1=-3a>0$，$h(0)=-1<0$，

所以一定存在 $x_0\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$，使得 $h(x_0)=27x_0^3-9ax_0-1=0$. ………………………………………… 8 分

所以在 $(0,x_0)$ 上，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 单调递减；

在 $(x_0,+\infty)$ 上，$h(x)>0$，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(x_0)$. ……………………… 10 分

又 $g(x_0)=x_0^3-ax_0-\frac{1}{9}\ln x_0$ 中，$x_0^3>0$，$-ax_0>0$，$-\frac{1}{9}\ln x_0>0$，

所以 $g(x_0)>0$，即 $g(x)_{\min}>0$，

所以函数 $g(x)$ 的零点个数为 0. …………………………………………………………………………………… 12 分