# 天一大联考

# 2023—2024 学年高中毕业班阶段性测试(三)

# 数学 · 答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. D　　2. B　　3. B　　4. A　　5. C　　6. C

7. D　　8. B

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. BCD　　10. AD　　11. ACD　　12. ACD

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 9　　14. $\{x\mid x\leqslant -1\}$

15. $\frac{4}{3}$　　16. $\left(-\infty,\frac{7}{4}\right]$

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. **解析** (Ⅰ)依题意,$f'(x)=3x^2-3a$,则 $f'(1)=3-3a=-9$,解得 $a=4$. ………………(2 分)

故 $f(1)=1^3-12\times1+2=-9$,故所求切线方程为 $y+9=-9(x-1)$,即 $y=-9x$. ………………(4 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知,$f'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)=3(x+2)(x-2)$,

令 $f'(x)=0$,解得 $x=\pm2$. ………………(5 分)

则当 $x\in(-\infty,-2)$时,$f'(x)>0$,当 $x\in(-2,2)$时,$f'(x)<0$,当 $x\in(2,+\infty)$时,$f'(x)>0$,即函数 $f(x)$在区间$(-\infty,-2)$上单调递增,在区间$(-2,2)$上单调递减,在区间$(2,+\infty)$上单调递增. ………………(8 分)

故 $f(x)$的极大值为 $f(-2)=(-2)^3-12\times(-2)+2=18$, ………………(9 分)

极小值为 $f(2)=2^3-12\times2+2=-14$. ………………(10 分)

18. **解析** (Ⅰ)设$\{a_n\}$的公差为 $d$,依题意得$\frac{S_2}{a_2+1}-\frac{S_1}{a_1+1}=\frac{1}{2}$, ………………(1 分)

所以$\frac{2a_3-3d}{a_3-d+1}-\frac{a_3-2d}{a_3-2d+1}=\frac{1}{2}$,即$\frac{18-3d}{10-d}-\frac{9-2d}{10-2d}=\frac{1}{2}$,

解得 $d=4$ 或$\frac{10}{3}$(舍去), ………………(4 分)

故 $a_1=a_3-2d=1$, ………………(5 分)

$a_n=1+4(n-1)=4n-3$. ………………(6 分)

(Ⅱ)依题意,$b_n=a_{2n-1}-80=8n-87$. ………………(7 分)

当 $n\leqslant10$ 时,$|b_n|=87-8n$,故 $T_n=\frac{(79+87-8n)n}{2}=83n-4n^2$; ………………(8 分)

当 $n\geqslant11$ 时,$|b_n|=8n-87$,

故 $T_n=-b_1-b_2-\cdots-b_{10}+b_{11}+b_{12}+\cdots+b_n=-2(b_1+b_2+\cdots+b_{10})+(b_1+b_2+\cdots+b_n)=4n^2-83n+860$.

……………………………………………………………………………………………………………（11 分）

故 $T_n=\begin{cases}83n-4n^2, n\leqslant 10,\\ 4n^2-83n+860, n\geqslant 11.\end{cases}$ ……………………………………………………（12 分）

19. **解析**　（Ⅰ）由已知得 $\sin C=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{bc}\left(\dfrac{1}{2}\sin B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)$， ……………………………（1 分）

所以 $\sin(A+B)=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2bc}(\sin B+\sqrt{3}\cos B)$， ……………………………………………（2 分）

得 $\sin A\cos B+\cos A\sin B=\cos A(\sin B+\sqrt{3}\cos B)$，

得 $\sin A\cos B=\sqrt{3}\cos A\cos B$， ……………………………………………………………………（4 分）

因为△$ABC$ 为锐角三角形，所以 $B$ 为锐角，所以 $\cos B\neq 0$，

所以 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$，即 $\tan A=\sqrt{3}$， ………………………………………………………………（5 分）

所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. ………………………………………………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）由余弦定理知 $36=b^2+c^2-2bc\cos\dfrac{\pi}{3}=b^2+c^2-bc$， ……………………………………………（8 分）

所以 $36=(b+c)^2-3bc$，即 $bc=\dfrac{(b+c)^2-36}{3}\leqslant\dfrac{(b+c)^2}{4}$，

所以 $(b+c)^2\leqslant 144$，解得 $b+c\leqslant 12$，当且仅当 $b=c=6$ 时取等号， ……………………………（10 分）

所以 $a+b+c\leqslant 6+12=18$，

即△$ABC$ 周长的最大值为 18. ………………………………………………………………………………（12 分）

20. **解析**　（Ⅰ）依题意得 $g(x)=\sin(\omega x+\varphi)-\sqrt{3}\cos(\omega x+\varphi)=2\sin\left(\omega x+\varphi-\dfrac{\pi}{3}\right)$， ……………………（1 分）

因为 $g(x)$ 为偶函数，所以 $\varphi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，故 $\varphi=\dfrac{5\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$. ………………（2 分）

因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$，$f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{5\pi}{6}\right)$. ……………………………………………（3 分）

令 $\omega x+\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 $x=-\dfrac{\pi}{3\omega}+\dfrac{k\pi}{\omega}(k\in\mathbf{Z})$， …………………………………（4 分）

则 $-\dfrac{\pi}{3\omega}+\dfrac{4\pi}{\omega}<3\pi\leqslant-\dfrac{\pi}{3\omega}+\dfrac{5\pi}{\omega}$，解得 $\dfrac{11}{9}<\omega\leqslant\dfrac{14}{9}$，

即 $\omega$ 的取值范围为 $\left(\dfrac{11}{9},\dfrac{14}{9}\right]$. ……………………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）依题意得 $f(x)=\sin\left(\dfrac{14}{9}x+\dfrac{5\pi}{6}\right)$，

将 $f(x)$ 的图象上所有点的横坐标缩小为原来的 $\dfrac{7}{9}$，得到 $y=\sin\left(\dfrac{14}{9}\times\dfrac{9}{7}x+\dfrac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\dfrac{5\pi}{6}\right)$ 的图象，

……………………………………………………………………………………………………………（8 分）

再将所得图象向右平移 $\dfrac{7\pi}{12}$ 个单位长度，得到 $h(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象. ……………………………（10 分）

当 $\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$时，$\frac{5\pi}{3}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{8\pi}{3}$，

故 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的值域为$\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，

即 $h(x)$在区间$\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$上的值域为$\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$. ……………………………………………………（12 分）

21. **解析** （Ⅰ）当 $n=1$ 时，$4S_1=S_1+3$，解得 $S_1=1$； …………………………………………………………（1 分）

当 $n\geqslant 2$ 时，$4S_n=S_n-S_{n-1}+3$，$3S_n=-S_{n-1}+3$，则 $S_n-\frac{3}{4}=-\frac{1}{3}\left(S_{n-1}-\frac{3}{4}\right)$，

因为 $S_1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\neq 0$，所以数列$\left\{S_n-\frac{3}{4}\right\}$是以$\frac{1}{4}$为首项，$-\frac{1}{3}$为公比的等比数列，……………………（3 分）

所以 $S_n=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{3}{4}$. ……………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）依题意 $c_n=\frac{1-S_{2n}}{1+S_{2n}}=\frac{1+\frac{1}{3^{2n-1}}}{7-\frac{1}{3^{2n-1}}}$，…………………………………………………………………（6 分）

易知 $c_n>\frac{1}{7}$，即 $Q_n>\frac{n}{7}$； ……………………………………………………………………………（7 分）

因为 $c_n-\frac{1}{7}=\frac{1+\frac{1}{3^{2n-1}}}{7-\frac{1}{3^{2n-1}}}-\frac{1}{7}=\frac{\frac{8}{3^{2n-1}}}{7\left(7-\frac{1}{3^{2n-1}}\right)}<\frac{\frac{8}{3^{2n-1}}}{7(7-1)}=\frac{4}{21}\cdot\frac{1}{3^{2n-1}}$，

所以$\left(c_1-\frac{1}{7}\right)+\left(c_2-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(c_n-\frac{1}{7}\right)<\frac{4}{21}\times\left(\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{2n-1}}\right)$，

而$\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{2n-1}}=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)}{1-\frac{1}{9}}<\frac{3}{8}$， ………………………………………………………（10 分）

故 $Q_n-\frac{n}{7}<\frac{4}{21}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{14}$，即 $Q_n<\frac{n}{7}+\frac{1}{14}$.

综上所述，$\frac{n}{7}<Q_n<\frac{n}{7}+\frac{1}{14}$. ……………………………………………………………………（12 分）

22. **解析** （Ⅰ）令 $f(x)=0$，解得 $m=\frac{x^2}{e^{2x}}-x$，令 $\varphi(x)=\frac{x^2}{e^{2x}}-x$，

则 $\varphi'(x)=\frac{2x-2x^2}{e^{2x}}-1=\frac{2x-2x^2-e^{2x}}{e^{2x}}$，……………………………………………………………（1 分）

当 $x\geqslant 0$ 时，$2x-2x^2\leqslant\frac{1}{2}$，$e^{2x}\geqslant 1$，故 $\varphi'(x)<0$， ………………………………………………（2 分）

则 $\varphi(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递减，

因为 $\varphi(0)=0$，当 $x\to+\infty$ 时，$\varphi(x)\to-\infty$，

故实数 $m$ 的取值范围为$(0,+\infty)$. ………………………………………………………………………（4 分）

（Ⅱ）依题意$(x+m)e^{2x}-x^2\geqslant(x+m)\ln(x+m)$在 $x\in[0,+\infty)$时恒成立，

令 $x=0$,解得 $0<m\leqslant e$. ……………………………………………………………………………（5 分）

下证当 $0<m\leqslant e$ 时,不等式 $e^{2x}\geqslant\dfrac{x^2}{x+m}+\ln(x+m)$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 时恒成立.

先证明:当 $x\in[0,+\infty)$ 时,$e^{2x}\geqslant 1+2x+2x^2$.

令 $g(x)=e^{2x}-1-2x-2x^2(x\geqslant 0)$,则 $g'(x)=2e^{2x}-2-4x$,

令 $h(x)=2e^{2x}-2-4x(x\geqslant 0)$,则 $h'(x)=4e^{2x}-4(x\geqslant 0)$, ……………………………………（6 分）

易知 $h'(x)\geqslant 0$,所以 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,$h(x)\geqslant h(0)=0$,即 $g'(x)\geqslant 0$, ………………（7 分）

所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,得 $g(x)\geqslant g(0)=0$,即当 $x\geqslant 0$ 时,$e^{2x}\geqslant 1+2x+2x^2$. ……………（8 分）

再证明:当 $x\in[0,+\infty)$ 时,$1+2x+2x^2\geqslant\ln(x+m)+\dfrac{x^2}{x+m}$,$(*)$

因为当 $0<m\leqslant e$ 时,$x\geqslant\dfrac{x^2}{x+m}$,故只需证明 $1+x+2x^2-\ln(x+m)\geqslant 0$.

令 $p(x)=1+x+2x^2-\ln(x+m)(x\geqslant 0)$,

则 $p'(x)=1+4x-\dfrac{1}{x+m}=\dfrac{4x^2+(4m+1)x+m-1}{x+m}$. ……………………………………………（9 分）

①当 $1\leqslant m\leqslant e$ 时,$p'(x)\geqslant 0$,$p(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,

$p(x)\geqslant p(0)=1-\ln m\geqslant 0$; ……………………………………………………………………（10 分）

②当 $0<m<1$ 时,由 $\ln x\leqslant x-1$ 知 $\ln(x+m)\leqslant x+m-1$,

所以 $p(x)\geqslant 1+x+2x^2-(x+m-1)=2-m+2x^2>0$,

所以 $(*)$ 成立.

综上所述,实数 $m$ 的取值范围为 $(0,e]$. ……………………………………………………………（12 分）