2024届新高三摸底联考

数学试题

本试卷共4页，22题。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $M=\{x\in\mathbf{Z}\mid x^2<15\}$，若 $N=\{x\mid 0\leqslant x<5\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{-3,-2\}$　　B. $\{-3,-2,-1\}$　　C. $\{0,1,2,3\}$　　D. $\{x\mid 0\leqslant x<5\}$

2. 若 $\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}=\mathrm{i}$，则 z 的虚部与实部之比为

A. -1　　B. 1　　C. $-\mathrm{i}$　　D. i

3. 已知平面单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2}=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $-\frac{7}{8}$

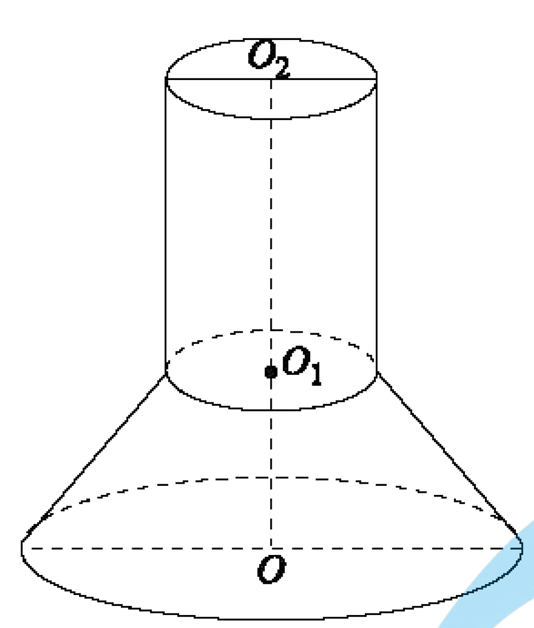
4. 汉代初年成书的《淮南万毕术》记载："取大镜高悬，置水盆于下，则见四邻矣". 这是中国古代人民利用平面镜反射原理的首个实例，体现了传统文化中的数学智慧. 在平面直角坐标系 xOy 中，一条光线从点 $(-2,0)$ 射出，经 y 轴反射后的光线所在的直线与圆 $x^2+y^2-2x-2y=0$ 相切，则反射光线所在直线的斜率为

A. -1　　B. -1 或 1　　C. 1　　D. 2

5. 设 S_n 为公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $2S_3=7a_2$，则 $q=$

A. $\frac{15}{2}$　　B. 2　　C. $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{15}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$ 或 2

6. 下图为某工厂内一手电筒最初模型的组合体，该组合体是由一圆台和一圆柱组成的，其中 O 为圆台下底面圆心，O_2，O_1 分别为圆柱上下底面的圆心，经实验测量得到圆柱上下底面圆的半径为 2 cm，$O_1O_2=5$ cm，$OO_1=4$ cm，圆台下底面圆半径为 5 cm，则该组合体的表面积为



A. 42π cm^2　　B. 84π cm^2

C. 36π cm^2　　D. 64π cm^2

7. 已知RL串联电路短接时，电流 I(mA)随时间 t(ms)的变化关系式为 $I=I_0\cdot \mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}$，电路的时间常数 $T=\frac{L}{R}$，当 I 由 I_0 减小到 $\frac{I_0}{2}$ 时，相应的时间间隔称为半衰期. 若某RL串联电路电流从 $\frac{I_0}{2}$ 减少到 $\frac{I_0}{\mathrm{e}}$ 的时间间隔为 6(ms)，则该电路的时间常数约为(参考数据：$\ln 2\approx 0.693$)

A. 10 ms　　B. 15 ms

C. 20 ms　　D. 30 ms

8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1,A_2，F 为 C 的右焦点，C 的离心率为2，若 P 为 C 右支上一点，满足 $PF\perp FA_2$，则 $\tan\angle A_1PA_2=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1

C. $\sqrt{3}$　　D. 2

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 有一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，由这组数据得到新样本数据 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，其中 $y_i=ax_i+b(i=1,2,\cdots,n,0<a<1)$，则

A. 新样本数据的样本平均数小于原样本数据的样本平均数

B. 新样本数据的标准差不大于原样本数据的标准差

C. 新样本数据的极差不大于原样本数据的极差

D. 新样本数据的上四分位数不小于原样本数据的上四分位数

10. 若随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，X 的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，则

A. X 的密度曲线与 y 轴只有一个交点

B. X 的密度曲线关于 $x=\sigma$ 对称

C. $2P(X>\mu+3\sigma)=P(|X-\mu|>3\sigma)$

D. 若 $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$，则 $E(Y)=0$

11. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 任一对称轴与其相邻的零点之间的距离为 $\frac{\pi}{4}$，若将曲线 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到的图象关于 y 轴对称，则

A. $\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{6}$

B. 直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一条对称轴

C. 若 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 单调递增，则 $0<a\leqslant\frac{\pi}{3}$

D. 曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{5\pi}{24}$ 有5个交点

12. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各顶点均在表面积为 12π 的球面上，P 为该球面上一动点，则

A. 存在无数个点 P，使得 $PA\mathbin{/\mkern-5mu/}$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$

B. 当平面 $PAA_1\perp$ 平面 CB_1D_1 时，点 P 的轨迹长度为 2π

C. 当 $PA\mathbin{/\mkern-5mu/}$ 平面 A_1B_1CD 时，点 P 的轨迹长度为 2π

D. 存在无数个点 P，使得平面 $PAD\perp$ 平面 PBC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{3}$，若 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{6}$，$\cos(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{2}$，则 $\alpha=$________.

14. 某学校准备举办一场运动会，其中运动会开幕式安排了 3 个歌舞类和 3 个语言类节目，所有节目依次出场，则恰有两个语言类节目相邻的概率为________.

15. 设函数 $f(x)=\lg\left(x^2-ax+\frac{1}{2}\right)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，则 a 的取值范围为________.

16. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点分别为 F_1,F_2. 若 P,Q 为 C 上关于坐标原点对称的两点，且 $|PQ|=|F_1F_2|$，$\triangle PF_2Q$ 的面积 $S\geqslant\frac{1}{8}|PQ|^2$，则 C 的离心率的取值范围为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{4}ab\tan C$.

(1)求 C；

(2)若 $c=1$，$S=\frac{\sqrt{3}}{6}$，求边 AB 上的中线 CD 的长度.

18.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax-\frac{x}{2}\ln^2 x$ 的图象在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=\frac{1}{2}x+b$.

(1)求 a,b；

(2)证明：$f(x)$ 只有一个极值点.

19.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $2(S_n-n)=na_n$.

(1)证明：$\{a_n\}$ 为等差数列；

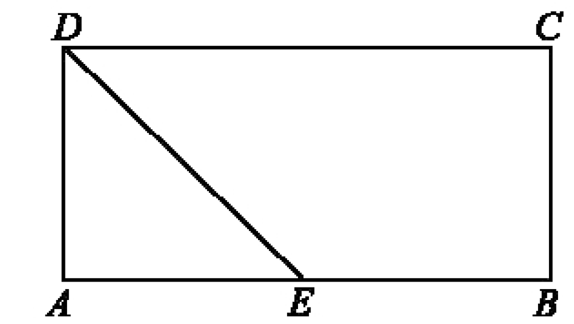
(2)若 $a_1+a_3+\cdots+a_{13}=98$，证明：$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}<1$.

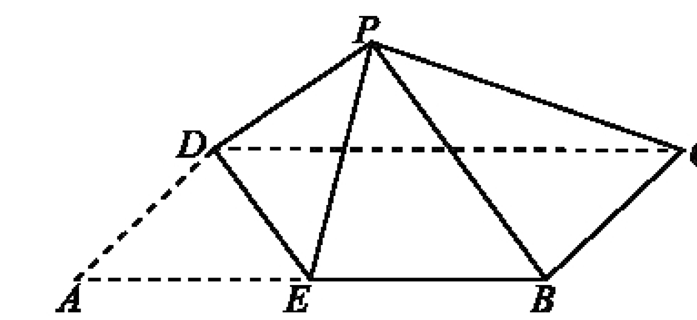
20.（本小题满分 12 分）

如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=2$，E 是线段 AB 上的一点. 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 翻折到 $\triangle PDE$ 位置，且点 P 不在平面 $BCDE$ 内.

(1)若平面 $PDE\perp$ 平面 PCD，证明：$PE\perp EB$；

(2)设 E 为 AB 的中点，当平面 $PDE\perp$ 平面 PBC 时，求此时二面角 $P-DE-C$ 的余弦值.





21.（本小题满分 12 分）

已知有甲，乙两个不透明盒子，甲盒子装有两个红球和一个绿球，乙盒子装有三个绿球，这些球的大小，形状，质地完全相同. 在一次球交换的过程中，甲盒子与乙盒子中各随机选择一个球进行交换，重复 n 次该过程，记甲盒中装有的红球个数为 Xn.

(1)求 X_2 的概率分布列；

(2)求 $E(X_n)$.

22.（本小题满分 12 分）

已知 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 三个顶点均在抛物线 $W:y=x^2$ 上，B 为直角顶点，且 $x_A<0<x_B<x_C$.

(1)记点 $B(m,m^2)$，直线 AB 的斜率 $k_{AB}=k\in[-1,0)$，试求 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 面积的解析式 $S(m,k)$；

(2)当 $m=\frac{k}{4}-\frac{1}{4k}$ 时，求函数 $f(k)$ 的最小值.

2024届新高三摸底联考

数学参考答案及解析

一、选择题

1. C 【解析】由题意可知 $M=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，故 $M\cap N=\{0,1,2,3\}$. 故选 C.

2. B 【解析】设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，故 $\frac{bi}{a}=i$，即 $\frac{b}{a}=1$. 故选 B.

3. D 【解析】由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2}=\boldsymbol{0}$ 可知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\frac{\boldsymbol{c}}{2}$，两边同时平方得 $2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{4}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{7}{8}$. 故选 D.

4. C 【解析】易知$(-2,0)$关于 y 轴的对称点为$(2,0)$，由平面镜反射原理，反射光线所在的直线过$(2,0)$且与该圆相切，又$(2,0)$在该圆上，故反射光线的斜率为 $\frac{-1}{\frac{0-1}{2-1}}=1$. 故选 C.

5. D 【解析】由题意得：$2\left(\frac{a_2}{q}+a_2+a_2q\right)=7a_2$，因为 $a_2\neq0$，所以 $\frac{1}{q}+q=\frac{5}{2}$，所以 $q^2-\frac{5}{2}q+1=0$，解得 $q=\frac{1}{2}$ 或 $q=2$. 故选 D.

6. B 【解析】圆柱的上底面面积为 4π；圆柱的侧面面积为 $4\pi\times5=20\pi$；圆台的下底面面积为 25π；圆台的母线长为 $\sqrt{4^2+(5-2)^2}=5$，所以圆台的侧面面积为 $\pi(2+5)\times5=35\pi$，则该组合体的表面积为 $4\pi+20\pi+25\pi+35\pi=84\pi\ \text{cm}^2$. 故选 B.

7. C 【解析】设半衰期为 t_1，依题意 $\frac{I_0}{2}=I_0\cdot e^{-\frac{R}{L}t_1}$，两边取对数得 $t_1=\frac{L}{R}\ln2=T\ln2$，由 $\frac{I_0}{e}=I_0\cdot e^{-\frac{R}{L}t_2}$ 得 $t_2=\frac{L}{R}$，即 $t_2=T$，所以 $t_2-t_1=(1-\ln2)T=6$，解得 $T\approx20$ ms. 故选 C.

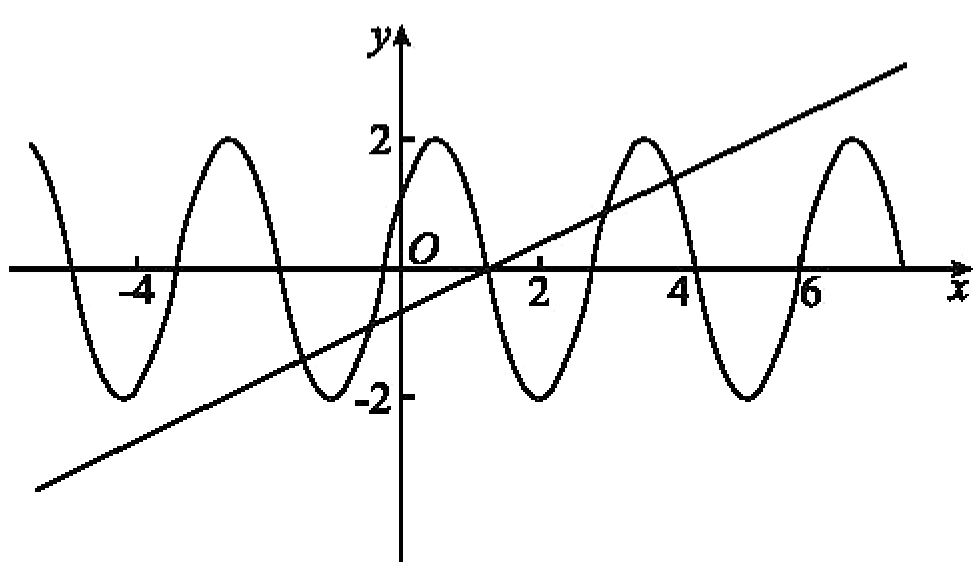
8. A 【解析】设 C 的焦距为 $2c$，点 $P(x_0,y_0)$，由 C 的离心率为 2 可知 $c=2a$，$b=\sqrt{3}a$，因为 $PF\perp FA_2$，所以 $x_0=c$，将 $P(c,y_0)$代入 C 的方程得 $\frac{c^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，即 $y_0=\pm\sqrt{3}b$，不妨取 $y_0=\sqrt{3}b$，所以 $\tan\angle PA_2F=\frac{\sqrt{3}b-0}{c-a}=3$，$\tan\angle PA_1F=\frac{\sqrt{3}b-0}{c-(-a)}=1$，故 $\tan\angle A_1PA_2=\tan(\angle PA_2F-\angle PA_1F)=\frac{3-1}{1+3\times1}=\frac{1}{2}$. 当 $y_0=-\sqrt{3}b$ 时，$\tan\angle A_1PA_2=\frac{1}{2}$. 故选 A.

二、选择题

9. BC 【解析】首先 $0<a<1$，设原样本数据的样本平均数为 x，故新样本数据的样本平均数为 $ax+b$，其中 x 与 $ax+b$ 大小无法判断，故 A 错；设原样本数据的标准差为 σ，故新样本数据的标准差为 $a\sigma<\sigma$，故 B 对；新样本数据的极差为 $a(x_{\max}-x_{\min})<(x_{\max}-x_{\min})$，故 C 对；设原样本数据的上四分位数为 x_0，故新样本数据的上四分位数为 ax_0+b，其中 x_0 与 ax_0+b 大小无法判断，故 D 错. 故选 BC.

10. ACD 【解析】若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则其密度函数 $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，因此 X 的密度曲线与 y 轴只有一个交点 $\left(0,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}\right)$，故 A 正确；$X$ 的密度曲线关于直线 $x=\mu$ 对称，故 B 错误；$P(|X-\mu|>3\sigma)=P(X<\mu-3\sigma)+P(X>\mu+3\sigma)=2P(X>\mu+3\sigma)$，故 C 正确；$E(Y)=\frac{E(X)-\mu}{\sigma}=0$，故 D 正确. 故选 ACD.

11. ABD 【解析】由题意 $\frac{\pi}{4}=\frac{T}{4}=\frac{2\pi}{4\omega}$，故 $\omega=2$，又 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{3}+\varphi)$，所以 $\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，且 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，故 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，A 对；因为 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，且 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=-2$ 为极小值，所以直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一条对称轴，B 对；易知 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$ 单调递增，故 $0<a\leqslant\frac{\pi}{6}$，C 错；直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{5\pi}{24}$ 与曲线 $y=f(x)$ 均过点 $\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$，且该直线与曲线 $y=f(x)$ 均关于该点中心对称，当 $x=\frac{7\pi}{6}$ 时，$y=\frac{3\pi}{8}<2$，当 $x=\frac{13\pi}{6}$ 时，$y=\frac{7\pi}{8}>2$，由对称性可知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{5\pi}{24}$ 有 5 个交点，故 D 对. 故选 ABD.



12. ACD 【解析】因为该球的表面积为 $4\pi r^2=12\pi$，故半径 $r=\sqrt{3}$，且正方体的棱长满足 $(2r)^2=3a^2=12$，故棱长为 2. 由题意可知平面 $ABCD$ // 平面 $A_1B_1C_1D_1$，且 PA // 平面 $A_1B_1C_1D_1$，故 $PA\subset$ 平面 $ABCD$，则 P 的轨迹为正方形 $ABCD$ 的外接圆，故有无数个点 P 满足，A 对；易知 $AC_1\perp$ 平面 CB_1D_1，且平面 $PAA_1\perp$ 平面 CB_1D_1，且 $PA\subset$ 平面 PAA_1，故 P 的轨迹为矩形 AA_1C_1C 的外接圆，其周长为 $2\pi r=2\sqrt{3}\pi$，故 B 错误；因为 PA // 平面 A_1B_1CD，设过 PA 且与平面 A_1B_1CD 平行的平面为 α，则 P 的轨迹为 α 与外接球的交线，其半径为 $\frac{a}{2}=1$，周长为 2π，故 C 正确；若平面 $PAD\perp$ 平面 PBC，则点 P 在以 $ABCD$ 为轴截面的某个圆柱面上，该圆柱面与球面交线为曲线，故有无数个点 P 满足，故 D 正确. 故选 ACD.

三、填空题

13. $\frac{\pi}{4}$ 【解析】因为 $\cos(2\alpha+2\beta)=1-2\sin^2(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}$，且 $\sin(\alpha+\beta)>0$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}\left(\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}\text{舍}\right)$，故 $\alpha=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{4}$. 故答案为 $\frac{\pi}{4}$.

14. $\frac{3}{5}$ 【解析】节目出场顺序总数为 A_6^6，两个语言类节目相邻：$A_3^3\times A_3^2\times A_4^2=36\times12$，所以恰有两个语言类节目相邻的概率为 $P=\frac{36\times12}{A_6^6}=\frac{3}{5}$. 故答案为 $\frac{3}{5}$.

15. $\left\{a\,\middle|\,a\leqslant\frac{3}{2}\right\}$ 【解析】已知二次函数 $y=x^2-ax+\frac{1}{2}$ 的对称轴为 $x=\frac{a}{2}$，由题意可知 $\begin{cases}\frac{a}{2}\leqslant1\\1-a+\frac{1}{2}\geqslant0\end{cases}$，即 $a\leqslant\frac{3}{2}$. 故答案为 $\left\{a\,\middle|\,a\leqslant\frac{3}{2}\right\}$.

16. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$ 【解析】不妨设 C 的离心率为 e，焦距为 $2c$，P，Q 分别位于第一、三象限，连接 PF_1，PF_2，QF_1，QF_2，并结合图形对称性，可知四边形为对角线长度相等的平行四边形，即矩形，因此 $\angle F_1PF_2$ 为直角，所以 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2$，且 $\triangle PF_2Q$ 的面积与 $\triangle F_1PF_2$ 的面积相等，若椭圆上存在点 P 使得 $\angle F_1PF_2$ 为直角，则上顶点 B 处应满足 $\angle F_1BF_2$

$\geqslant \frac{\pi}{2}$，也即 $\frac{c}{b} \geqslant 1$，解得 $e \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $(|PF_1|+|PF_2|)^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1||PF_2|=4a^2$，所以 $|PF_1||PF_2|=2b^2$，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 $\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|=b^2$，因此 $b^2 \geqslant \frac{1}{8}|PQ|^2=\frac{1}{2}c^2$，即 $e \leqslant \frac{\sqrt{6}}{3}$. 所以 e 的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$. 故答案为 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$.

四、解答题

17. **解**：(1) 由题意 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{4}ab\tan C$，所以 $\frac{\sin C}{\tan C}=\cos C=\frac{1}{2}$，因为 $C \in (0,\pi)$，

所以 $C=\frac{\pi}{3}$. （4 分）

(2) 由余弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab$，又 $S=\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab$，所以 $ab=\frac{2}{3}$， （6 分）

因为 D 为边 AB 的中点，所以 $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$， （8 分）

所以 $|\overrightarrow{CD}|^2=\frac{1}{4}(b^2+a^2+ab)=\frac{1}{4}(c^2+2ab)=\frac{7}{12}$，

$CD=\frac{\sqrt{21}}{6}$. （10 分）

18. **解**：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，因为 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\ln^2 x-\ln x$，

所以 $f'(1)=1-\frac{a}{2}=\frac{1}{2}$，$a=1$；

所以 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x-\frac{x}{2}\ln^2 x$，$f(1)=-\frac{1}{2}$，

将 $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ 代入 $y=\frac{1}{2}x+b$，

故 $b=-1$，则 $a=1$，$b=-1$. （5 分）

(2) $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1+\ln^2 x+2\ln x}{2}=\frac{2-x(\ln x+1)^2}{2x}$， （6 分）

设 $h(x)=2-x(\ln x+1)^2$，则 $h'(x)=-(\ln x+1)\cdot(\ln x+3)$，令 $h'(x)=0$，故 $x=e^{-3}$ 或 e^{-1}， （8 分）

当 $x \in (0,e^{-3})$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x \in (e^{-3},e^{-1})$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

当 $x \in (e^{-1},+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

又 $h(e^{-3})=2-\frac{4}{e^3}>0$，$h(e^{-1})=2>0$，$h(e)=2-4e<0$， （11 分）

故存在 $x_0 \in (e^{-1},e)$ 使得 $h(x_0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 只有一个极值点. （12 分）

19. **解**：(1) 因为 $2(S_n-n)=na_n$，所以 $2[(S_{n-1}-(n-1)]=(n-1)a_{n-1}(n \geqslant 2)$，

作差得 $(n-2)a_n-(n-1)a_{n-1}=-2$ ①，

同理 $(n-1)a_{n+1}-na_n=-2$ ②， （2 分）

②−①得 $a_n-a_{n-1}=a_{n+1}-a_n$，$n \geqslant 2$，

所以 $\{a_n\}$ 为等差数列. （5 分）

(2) 令 $n=1$，则 $2(S_1-1)=a_1$，解得 $a_1=2$，

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，故 $a_n=2+(n-1)d$，

所以 $a_1+a_3+\cdots+a_{13}=7\times 2+2d(1+2+\cdots+5+6)=14+42d=98$，故 $d=2$， （8 分）

$S_n=\frac{2+2n}{2}n=n^2+n$，$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

所以 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}=1-\frac{1}{n+1}<1$. （12 分）

20. **解**：(1) 因为平面 $PDE \perp$ 平面 PCD，$PD \perp PE$，

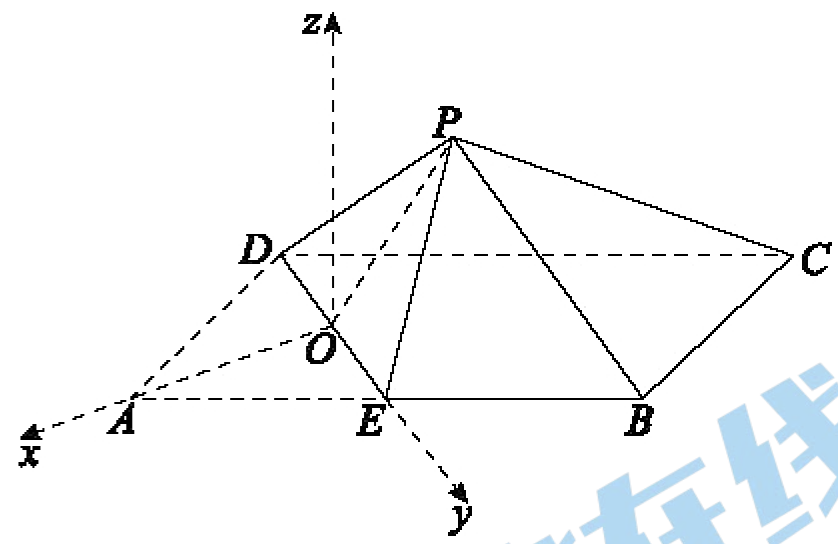
且平面 $PDE \cap$ 平面 $PCD=PD$，$PE \subset$ 平面 PDE，所以 $PE \perp$ 平面 PCD， （3 分）

因为 $CD \subset$ 平面 PCD，所以 $PE \perp CD$，$EB // CD$，

所以 $PE \perp EB$. （5 分）

(2) 设 DE 的中点为 O，连接 AO，则 $AO \perp DE$，过 O

作直线 m 垂直于平面 $DEBC$，如图所示，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE},\overrightarrow{Om}$ 分别为 x,y,z 轴的正方向建立空间直角坐标系，



易知 $D(0,-\sqrt{2},0),E(0,\sqrt{2},0),B(-\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$，$C(-2\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，设二面角 $P-DE-C$ 为 θ，则 $P(-\sqrt{2}\cos\theta,0,\sqrt{2}\sin\theta)$，则 $\overrightarrow{DE}=(0,2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{DP}=(-\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2},\sqrt{2}\sin\theta)$，$\overrightarrow{CB}=(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，

$\overrightarrow{CP}=(-\sqrt{2}\cos\theta+2\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{2}\sin\theta)$，　　（7 分）

设平面 PDE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}=2\sqrt{2}y_1=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DP}=-\sqrt{2}\cos\theta x_1+\sqrt{2}y_1+\sqrt{2}\sin\theta z_1=0\end{cases}$，

令 $x_1=\sin\theta$，解得 $z_1=\cos\theta,y=0$，

即 $\boldsymbol{m}=(\sin\theta,0,\cos\theta)$，　　（9 分）

设平面 PBC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=\sqrt{2}x_2+\sqrt{2}y_2=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CP}=(-\sqrt{2}\cos\theta+2\sqrt{2})x_2-\sqrt{2}y_2+\sqrt{2}\sin\theta z_2=0\end{cases}$，

令 $x_2=\sin\theta$，解得 $y_2=-\sin\theta,z_2=\cos\theta-3$，

即 $\boldsymbol{n}=(\sin\theta,-\sin\theta,\cos\theta-3)$，　　（11 分）

因为平面 $PDE\perp$ 平面 PBC，所以 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\sin^2\theta+\cos^2\theta-3\cos\theta=0$，解得 $\cos\theta=\frac{1}{3}$，则二面角 $P-DE-C$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$.　　（12 分）

21. 解：(1)由题意可知 X_2 的所有可能取值为 0,1,2，　　（1 分）

且 $P(X_2=0)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$，　　（2 分）

$P(X_2=1)=1-P(X_2=0)-P(X_2=2)=1-\frac{4}{27}-\frac{7}{27}=\frac{16}{27}$，　　（3 分）

或 $P(X_2=1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{7}{27}$，

$P(X_2=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{27}$，　　（4 分）

所以 X_2 的分布列为

X_2	0	1	2
P	$\frac{4}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{7}{27}$

（5 分）

(2)X_n 的所有可能取值为 0,1,2，

且 $P(X_n=2)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times P(X_{n-1}=1)+\frac{1}{3}P(X_{n-1}=2)+0\times P(X_{n-1}=0)$

$=\frac{2}{9}P(X_{n-1}=1)+\frac{1}{3}P(X_{n-1}=2)$，　　（6 分）

又 $P(X_n=1)=\frac{2}{3}P(X_{n-1}=0)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)P(X_{n-1}=1)+\frac{2}{3}P(X_{n-1}=2)$

$=\frac{2}{3}[1-P(X_{n-1}=1)-P(X_{n-1}=2)]+\frac{5}{9}P(X_{n-1}=1)+\frac{2}{3}P(X_{n-1}=2)$

$=-\frac{1}{9}P(X_{n-1}=1)+\frac{2}{3}$，　　（7 分）

又 $E(X_n)=0\times P(X_n=0)+1\times P(X_n=1)+2\times P(X_n=2)=P(X_n=1)+2P(X_n=2)$，　　（8 分）

且 $P(X_n=1)+2P(X_n=2)=-\frac{1}{9}P(X_{n-1}=1)+\frac{2}{3}+2\times\left[\frac{2}{9}P(X_{n-1}=1)+\frac{1}{3}P(X_{n-1}=2)\right]$

$=\frac{1}{3}P(X_{n-1}=1)+\frac{2}{3}P(X_{n-1}=2)+\frac{2}{3}$，　　（9 分）

即 $E(X_n)=\frac{1}{3}E(X_{n-1})+\frac{2}{3}$，（10 分）

故 $E(X_n)-1=\frac{1}{3}[E(X_{n-1})-1]$，即 $\frac{E(Xn)-1}{E(X_{n-1})-1}=\frac{1}{3}$，

即 $\{E(X_n)-1\}$ 为等比数列，（11 分）

且 $E(X_1)=P(X_1=1)+2P(X_1=2)=\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$，

所以 $E(X_n)=\left(\frac{4}{3}-1\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+1=1+\left(\frac{1}{3}\right)^n$.（12 分）

22.解：(1)由题意可得 AC 为斜边，B 为直角顶点，设 AB：$y=k(x-m)+m^2$，$k\in[-1,0)$，联立

$$\begin{cases}AB:y=k(x-m)+m^2\\W:y=x^2\end{cases},\Rightarrow x^2-kx+km-m^2=0$$

则 $x_Am=km-m^2$，$x_A=k-m$，（3 分）

$|AB|=|m-x_A|\sqrt{1+k^2}=(m-x_A)\sqrt{1+k^2}=(2m-k)\sqrt{1+k^2}$，（4 分）

同理 $|BC|=\left(-\frac{1}{k}-2m\right)\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$，（5 分）

则 $|AB|\cdot|BC|$

$=(2m-k)\sqrt{1+k^2}\cdot\left(-\frac{1}{k}-2m\right)\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$

$=(2m-k)\left(-\frac{1}{k}-2m\right)\sqrt{(1+k^2)\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}$

$=-(2m-k)\left(2m+\frac{1}{k}\right)\sqrt{(1+k^2)\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}$

$=-4\left(m-\frac{k}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2k}\right)\sqrt{\frac{(1+k^2)^2}{k^2}}$

$=-4\left(m-\frac{k}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2k}\right)\frac{(1+k^2)}{-k}$

$=4\left(m-\frac{k}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2k}\right)\frac{(1+k^2)}{k}$，（7 分）

则 $S(m,k)=\frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|$

$=2\left(m-\frac{k}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2k}\right)\frac{(1+k^2)}{k}$.（8 分）

(2) $S\left(\frac{k}{4}-\frac{1}{4k},k\right)=2\left(\frac{k}{4}-\frac{1}{4k}-\frac{k}{2}\right)\left(\frac{k}{4}-\frac{1}{4k}+\frac{1}{2k}\right)\frac{(1+k^2)}{k}=-2\left(\frac{1}{4k}+\frac{k}{4}\right)^2\frac{(1+k^2)}{k}$

$=-\frac{(1+k^2)^3}{8k^3}$，（9 分）

$f(k)=-\frac{(1+k^2)^3}{8k^3}$ 是奇函数，

则求 $f(k)(-1\leqslant k<0)$ 的最小值等价于求 $g(x)=\frac{(1+x^2)^3}{8x^3}(x\in(0,1])$ 的最小值.

$g(x)=\frac{(1+x^2)^3}{8x^3}=\frac{1}{8}\left(\frac{1+x^2}{x}\right)^3=\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{x}\right)^3\geqslant\frac{2^3}{8}=1$，当且仅当 $x=1$ 时取等号.

综上，当且仅当 $k=-1$ 时，$f(k)_{\min}=1$.（12 分）