

辽宁名校联考

2023~2024 学年度上学期高三 12 月联合考试卷

数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本卷命题范围：函数、导数、三角函数、平面向量、复数、数列、立体几何。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 z 满足 $(1+i)z=3-i$ ，则 $|z| =$
A. $\sqrt{5}$ B. 5 C. $2\sqrt{5}$ D. 20
2. 若角 α 的终边上有一点 $P(-2, m)$ ，且 $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，则 $m =$
A. 4 B. -1 C. ± 4 D. ± 1
3. 设 a, b 都是非零向量，下列四个条件中，能使 $\frac{a}{|a|} = \frac{b}{|b|}$ 一定成立的是
A. $a = -2b$ B. $a^2 = b^2$ C. $a = 2b$ D. $|a| = |b|$
4. 已知 l, m 是两条不同的直线， α, β 是两个不同的平面，则下列命题中正确的是
A. 若 $\alpha \perp \beta, l \subset \alpha, m \subset \beta$ ，则 $l \perp m$
B. 若 $m \perp \beta, \alpha \perp \beta$ ，则 $m \parallel \alpha$
C. 若 $l \parallel m, l \perp \alpha, m \perp \beta$ ，则 $\alpha \parallel \beta$
D. 若 $\alpha \parallel \beta$ ，且 l 与 α 所成的角和 m 与 β 所成的角相等，则 $l \parallel m$
5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $\frac{S_4}{S_8} = \frac{1}{4}$ ，则 $\frac{S_{16}}{S_4 + S_8} =$
A. 8 B. 9 C. 16 D. 17
6. 在三棱锥 $D-ABC$ 中，点 E, F, G, H 分别在 AB, BC, CD, DA 上，且 $EF \parallel GH$ ，则下列说法中正确的是
A. 直线 EH 与 FG 一定平行 B. 直线 EH 与 FG 一定相交
C. 直线 EH 与 FG 可能异面 D. 直线 EH 与 FG 一定共面
7. 若 $e^a = -\ln a, e^{-b} = \ln b, e^{-c} = -\ln c$ ，则
A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < c < a$ D. $b < a < c$

8. 已知 $a > 0$, 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \begin{cases} 3a-x, & x > 2, \\ |a^x - a|, & x \leq 2, \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = 1$ 有两个不相等的实数根, 则 a 的取值范围是

- A. $(0, 1)$ B. $(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ C. $(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ D. $(1, \sqrt{5}]$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \sin^2 x + \frac{1}{2}$, 则下列说法正确的是

- A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π
 B. 函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴方程为 $x = \frac{\pi}{6}$
 C. 函数 $f(x)$ 的图象可由 $y = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到
 D. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上单调递增

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 当且仅当 $n = 12$ 时 S_n 取得最大值, 则满足 $S_k > 0$ 的最大的正整数 k 可能为

- A. 22 B. 23 C. 24 D. 25

11. 已知 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的偶函数且 $f(x)$ 不是常函数, $F(x) = f(1-x) - 1$, $g(x) = f(x+1) - 1$, 若 $g(x)$ 是奇函数, 则

- A. $y = f(x)$ 的图象关于 $(1, 1)$ 对称 B. $f(x) = f(x+4)$
 C. $F(x)$ 是奇函数 D. $F(x)$ 与 $g(x)$ 关于原点对称

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 三个角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\sin A \sin B \sin C = \frac{1}{8}$, $abc = 16\sqrt{2}$, 则

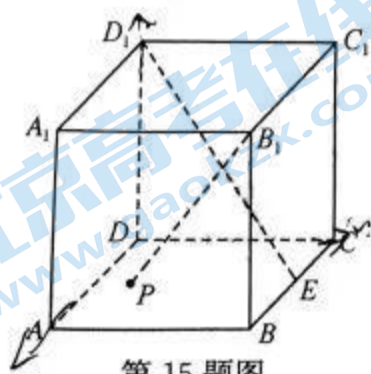
- A. $\triangle ABC$ 的面积为 2 B. $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $2\sqrt{2}$
 C. $ab \leq 4$ D. $(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B})^2 \geq 32 \sin C$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

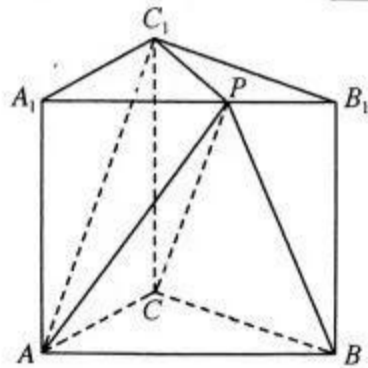
13. 圆心角为 2 的扇形的周长为 4, 则此扇形的面积为 _____.

14. 已知向量 a, b 满足 $a = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, $|b| = 1$, $|a+b| = \sqrt{3}$, 则 a, b 的夹角为 _____.

15. 如图, 在棱长为 4 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 BC 的中点, P 是底面 $ABCD$ 内的一点(包含边界), 且 $B_1P \perp D_1E$, 则线段 B_1P 的长度的取值范围是 _____.



第 15 题图



第 16 题图

16. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 = 3$, $BC = 6$, $AB = AC = 3\sqrt{2}$, P 为线段 A_1B_1 上的一点, 且二面角 $A - BC - P$ 的正切值为 3, 则三棱锥 $A - A_1C_1P$ 的外接球的体积为 _____.

四、解答题:本题共6小题,共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分10分)

$$\text{已知角 } \alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \tan \alpha = 2, \sin(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

(1) 求 $\cos 2\alpha$ 的值;

(2) 求角 β .

18. (本小题满分12分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a = 6\sqrt{2}$, $a \sin A - b \sin B = c(\sin B + \sin C)$.

(1) 证明: $\triangle ABC$ 是钝角三角形;

(2) AD 平分 $\angle BAC$, 且交 BC 于点 D , 若 $AD = 1$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

19. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = e^{x+1}$, 若函数 $y = f(x)$ 的图象上任意一点 P 关于原点对称的点 Q 都在函数 $g(x)$ 的图象上.

(1) 求函数 $g(x)$ 的解析式;

(2) 若存在 $x \in [0, 1)$, 使 $f(x) + g(x) \geq m$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

20. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, 且 $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & n=2k-1, k \in \mathbb{N}^* \\ a_n + 2, & n=2k, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

(1) 若 $b_n = a_{2n-1} + 2$, 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

21. (本小题满分 12 分)

如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别为 AB, AC 的中点, O 为 DE 的中点, $AB = AC = 2\sqrt{5}$, $BC = 4$. 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起到 $\triangle A_1DE$ 的位置, 使得平面 $A_1DE \perp$ 平面 $BCED$, 如图 2, 点 F 是线段 A_1B 上的一点 (不包含端点).

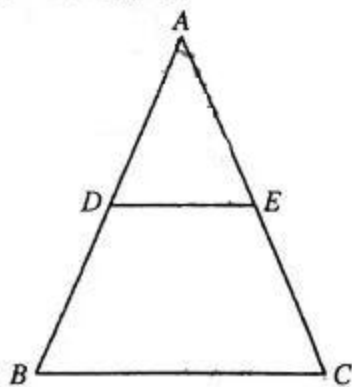


图 1

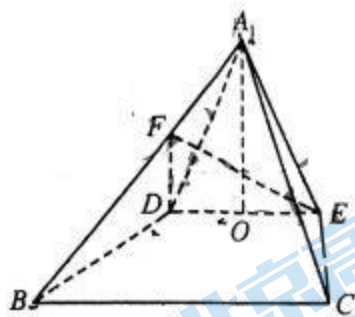


图 2

(1) 求证: $A_1O \perp BD$;

(2) 若直线 EC 和平面 DEF 所成角的正弦值为 $\frac{4}{5}$, 求三棱锥 $A_1 - DEF$ 的体积.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = ax - a - e \log_a x$, $a > 0$ 且 $a \neq 1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有且仅有两个零点, 求 a 的取值范围.