

**2021 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（初赛）
暨 2021 全国高中数学联合竞赛
加试（A 卷）参考答案及评分标准**

说明：

1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分。
2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不得增加其他中间档次。

一.（本题满分 40 分）给定正整数 $k(k \geq 2)$ 与 k 个非零实数 a_1, a_2, \dots, a_k . 证明：至多有有限个 k 元正整数组 (n_1, n_2, \dots, n_k) ，满足 n_1, n_2, \dots, n_k 互不相同，且

$$a_1 \cdot n_1! + a_2 \cdot n_2! + \dots + a_k \cdot n_k! = 0.$$

证明：取定正整数 $N \geq \frac{|a_1| + |a_2| + \dots + |a_k|}{\min_{1 \leq i \leq k} |a_i|}$ （注意 $a_1, a_2, \dots, a_k \neq 0$ ）.

我们证明，当正整数 n_1, n_2, \dots, n_k 满足条件时，必有 $\max_{1 \leq i \leq k} n_i \leq N$.

假设不然，不妨设 $\max_{1 \leq i \leq k} n_i = n_1 > N$. 对 $i = 2, \dots, k$ ，由于正整数 $n_i < n_1$ ，故

$$n_i! \leq (n_1 - 1)! = \frac{n_1!}{n_1} < \frac{n_1!}{N}. \quad \dots\dots\dots 20 \text{ 分}$$

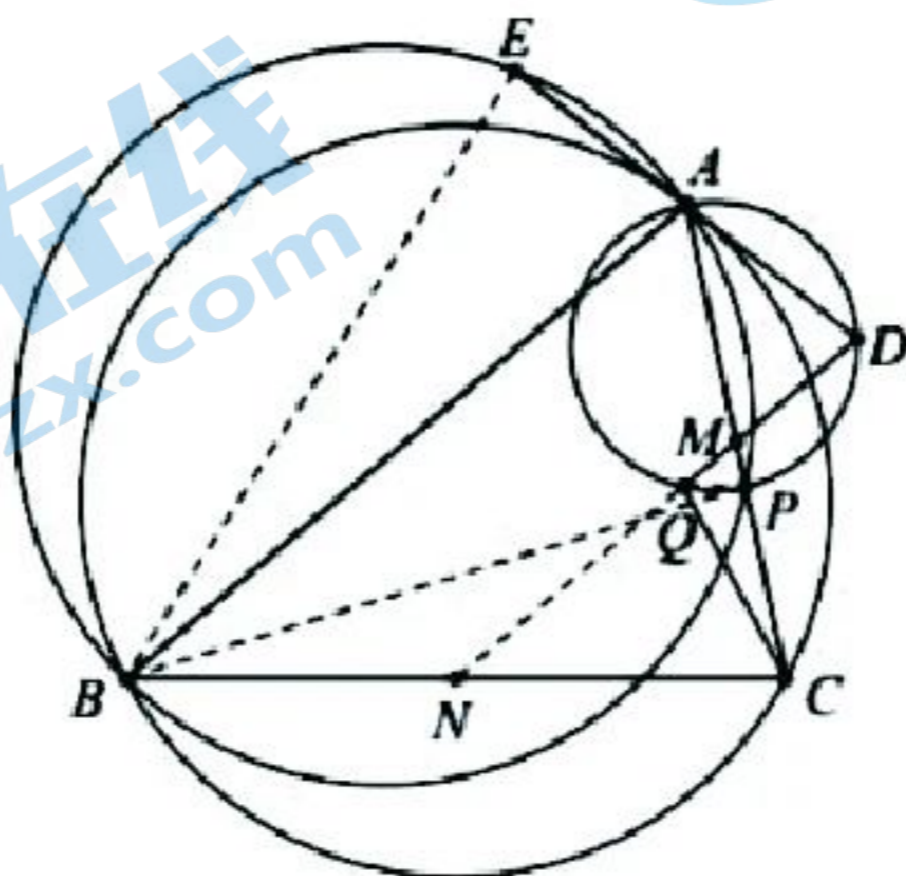
从而

$$\begin{aligned} |a_2 \cdot n_2! + \dots + a_k \cdot n_k!| &\leq \sum_{i=2}^k |a_i| \cdot n_i! < \frac{n_1!}{N} \sum_{i=2}^k |a_i| < \frac{n_1!}{N} \sum_{i=1}^k |a_i| \\ &\leq \min_{1 \leq i \leq k} |a_i| \cdot n_1! \leq |a_1| \cdot n_1!, \end{aligned}$$

但 $|a_2 \cdot n_2! + \dots + a_k \cdot n_k!| = |-a_1 \cdot n_1!| = |a_1| \cdot n_1!$ ，矛盾。

所以，满足条件的正整数组 (n_1, n_2, \dots, n_k) 至多有 N^k 组。本题得证。
.....40 分

二.（本题满分 40 分）如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， M 是边 AC 的中点， D, E 是 $\triangle ABC$ 的外接圆在点 A 处的切线上的两点，满足 $MD \parallel AB$ ，且 A 是线段 DE 的中点，过 A, B, E 三点的圆与边 AC 相交于另一点 P ，过 A, D, P 三点的圆与 DM 的延长线相交于点 Q . 证明： $\angle BCQ = \angle BAC$.



证明: 取 BC 边的中点 N , 则 D, M, Q, N 共线, 且 $MN \parallel AB$.

由弦切角定理可知 $\angle DAM = \angle CBA = \angle CNM$. 又 $\angle AMD = \angle NMC$, 故 $\triangle AMD \sim \triangle NMC$. 因此

$$\frac{NM}{NC} = \frac{AM}{AD}. \quad \text{①}$$

.....10分

由已知条件, A, D, P, Q 四点共圆, 故 $\angle APQ = \angle ADQ = \angle ADM = \angle ACB$, 因此 $PQ \parallel BC$. 于是

$$\frac{NQ}{NM} = \frac{CP}{CM}. \quad \text{②}$$

结合①、②以及 $AD = AE$ 可得

$$\frac{NQ}{NC} = \frac{NQ}{NM} \cdot \frac{NM}{NC} = \frac{CP}{CM} \cdot \frac{AM}{AD} = \frac{CP}{AD} = \frac{CP}{AE},$$

即有

$$\frac{NQ}{NC} = \frac{CP}{AE}. \quad \text{③}$$

.....20分

由弦切角定理可知 $\angle BAE = \angle BCA = \angle BCP$. 又 A, P, B, E 四点共圆, 故 $\angle BEA = \angle BPC$. 因此 $\triangle BAE \sim \triangle BCP$. 于是 $\frac{CP}{AE} = \frac{BC}{BA}$, 结合③可得

$$\frac{NQ}{NC} = \frac{BC}{BA}. \quad \text{.....30分}$$

又 $MN \parallel AB$, 故 $\angle CNQ = \angle ABC$. 所以 $\triangle CNQ \sim \triangle ABC$.

从而 $\angle NCQ = \angle BAC$, 即 $\angle BCQ = \angle BAC$40分

三. (本题满分 50 分) 设整数 $n \geq 4$. 证明: 若 n 整除 $2^n - 2$, 则 $\frac{2^n - 2}{n}$ 是合数.

证明: 将整数 $\frac{2^n - 2}{n}$ 记为 y .

若 n 为奇数, 则由 $2^n - 2$ 为偶数知 y 为偶数. 又 $n \geq 4$, 故 $\frac{2^n - 2}{n} > 2$, 从而 y 是合数.10分

以下考虑 n 为偶数的情形, 设 $n = 2m (m > 1)$.

因 $y = \frac{2^{2m} - 2}{2m} = \frac{2^{2m-1} - 1}{m}$ 为整数, 故 m 为奇数.

设 δ 是 2 模 m 的阶, 则 $\delta < m$, 且 $\delta | 2m - 1$ (因为 $m | 2^{2m-1} - 1$).

设 $2m - 1 = \delta r$, 由 $\delta < m < 2m - 1$ 知 $r > 1$.

(1) 若 $m \neq 2^{\delta} - 1$, 因 $m | 2^{\delta} - 1$, 故 $m < 2^{\delta} - 1$. 此时

$$y = \frac{2^{2m-1} - 1}{m} = \frac{2^{\delta r} - 1}{m} = \frac{2^{\delta r} - 1}{2^{\delta} - 1} \cdot \frac{2^{\delta} - 1}{m},$$

因 $r > 1$, 故这是两个大于 1 的整数之积, 为合数.20分

(2) 若 $m = 2^{\delta} - 1$, 则 $2(2^{\delta} - 1) - 1 = 2m - 1 = \delta r$. 由 $m > 1$ 知 $\delta > 1$, 故

$$r = \frac{2^{\delta+1} - 3}{\delta} > \delta. \quad \textcircled{1}$$

因 $2^{\delta} - 1 | 2^{2^{\delta}} - 1$, $2^r - 1 | 2^{2^r} - 1$, 故 $2^{2^{\delta r}} - 1$ 是 $[2^{\delta} - 1, 2^r - 1]$ 的倍数, 即

$$\frac{(2^{\delta} - 1)(2^r - 1)}{(2^{\delta} - 1, 2^r - 1)} \Big| 2^{2^{\delta r}} - 1,$$

注意到 $(2^{\delta} - 1, 2^r - 1) = 2^{(\delta, r)} - 1$, 故 $(2^{\delta} - 1)(2^r - 1) | (2^{2^{\delta r}} - 1)(2^{2^{(\delta, r)}} - 1)$. 因此

$$y = \frac{2^{2m-1} - 1}{m} = \frac{2^{2^{\delta r}} - 1}{2^{\delta} - 1} = \frac{(2^{2^{\delta r}} - 1)(2^{2^{(\delta, r)}} - 1)}{(2^{\delta} - 1)(2^r - 1)} \cdot \frac{2^r - 1}{2^{2^{(\delta, r)}} - 1}, \quad \textcircled{2}$$

为两个整数之积.40 分

因 $r > \delta$ (见①), 故 $\frac{2^r - 1}{2^{2^{(\delta, r)}} - 1} > \frac{2^r - 1}{2^{\delta} - 1} > 1$. 又 $\delta \geq 2$, 故

$$\frac{(2^{2^{\delta r}} - 1)(2^{2^{(\delta, r)}} - 1)}{(2^{\delta} - 1)(2^r - 1)} \geq \frac{(2^{2^{\delta r}} - 1) \cdot 1}{(2^{\delta} - 1)(2^r - 1)} > \frac{2^{2^{\delta r}} - 1}{(2^{\delta} - 1)(2^r - 1)} = \frac{2^r + 1}{2^r - 1} > 1.$$

因此②表明 y 是两个大于 1 的整数之积, 为合数.

综上, 结论得证.50 分

四. (本题满分 50 分) 求具有下述性质的最小正数 c : 对任意整数 $n \geq 4$, 以及集合 $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, 若 $|A| > cn$, 则存在函数 $f: A \rightarrow \{1, -1\}$, 满足

$$\left| \sum_{a \in A} f(a) \cdot a \right| \leq 1.$$

解: 所求最小的 $c = \frac{2}{3}$.

首先, 当 $n = 6, A = \{1, 4, 5, 6\}$ 时, 不存在满足要求的 f (因为 A 的元素和为 16, 且 A 不能划分为两个元素和均为 8 的子集的并). 此时 $|A| = \frac{2}{3}n$, 故 $c < \frac{2}{3}$ 不具有题述性质.10 分

下面证明 $c = \frac{2}{3}$ 符合要求, 即当 $|A| > \frac{2}{3}n$ 时, 存在满足要求的 f .

引理: 设 x_1, x_2, \dots, x_m 是正整数, 总和为 s , 且 $s < 2m$, 则对任意整数 $x \in [0, s]$, 存在指标集 $I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$, 满足 $\sum_{i \in I} x_i = x$ (对空指标集求和认为是零).

引理的证明: 对 m 归纳证明. $m = 1$ 时, 只能 $x_1 = s = 1$, 结论显然成立. 假设 $m > 1$, 且结论在 $m - 1$ 时成立. 不妨设 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m$, 则

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1} \leq \frac{m-1}{m} \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_m) < \frac{m-1}{m} \cdot 2m = 2(m-1). \quad \textcircled{1}$$

又由于 $x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1} \geq m - 1$, 因此

$$x_m \leq m \leq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1}. \quad \textcircled{2}$$

对任意整数 $x \in [0, s]$, 若 $x \leq x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1}$, 由①及归纳假设知存在指标集 $I \subseteq \{1, \dots, m-1\}$, 使得 $\sum_{i \in I} x_i = x$. 若 $x \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1}$, 则对 $x - x_m$ 用归

纳假设(由②知 $x-x_m \geq 0$), 存在指标集 $I \subseteq \{1, \dots, m-1\}$, 使得 $\sum_{i \in I} x_i = x - x_m$. 此时指标集 $I' = I \cup \{m\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ 满足 $\sum_{i \in I'} x_i = x$. 引理获证.20分

回到原问题. 注意到 $n \geq 4$, 分两种情形讨论.

(1) $|A|$ 为偶数, 设 $|A| = 2m$. 将 A 中元素从小到大依次记为

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_m < b_m.$$

令 $x_i = b_i - a_i > 0, 1 \leq i \leq m$, 则

$$s = \sum_{i=1}^m x_i = (b_m - a_1) - \sum_{i=1}^{m-1} (a_{i+1} - b_i) \leq n - 1 - (m - 1) = n - m < 2m$$

(这里利用了 $2m = |A| > \frac{2}{3}n$). 从而 x_1, x_2, \dots, x_m 满足引理的条件.

取 $x = \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \in [0, s]$, 利用引理可知存在 $I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$, 使得 $\sum_{i \in I} x_i = \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$, 令

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & i \in I, \\ -1, & i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus I, \end{cases}$$

则

$$\sum_{i=1}^m \varepsilon_i (b_i - a_i) = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i = \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor - \left(s - \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \right) = 2 \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor - s \in \{0, -1\},$$

从而结论成立(只需令 $f(a_i) = -\varepsilon_i, f(b_i) = \varepsilon_i$ 即可).30分

(2) $|A|$ 为奇数, 设 $|A| = 2m + 1$, 则 $m \geq 1$. 将 A 中元素从小到大依次记为

$$a < a_1 < b_1 < \dots < a_m < b_m.$$

令 $x_i = b_i - a_i > 0, 1 \leq i \leq m$, 同情形(1)可知 $s = x_1 + x_2 + \dots + x_m < 2m$, 又显然有 $s \geq m$. 由于 $2m + 1 = |A| > \frac{2}{3}n$, 故 $n \leq 3m + 1$. 从而

$$a \leq n - 2m \leq m + 1 \leq s + 1. \dots\dots\dots 40分$$

因 x_1, x_2, \dots, x_m 满足引理的条件, 对 x_1, x_2, \dots, x_m 及 $x = \left\lfloor \frac{a+s}{2} \right\rfloor \in [0, s]$ 用引理,

可知存在 $I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$, 使得 $\sum_{i \in I} x_i = x = \left\lfloor \frac{a+s}{2} \right\rfloor$. 令

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & i \in I, \\ -1, & i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus I, \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} \left| -a + \sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i \right| &= \left| -a + \sum_{i \in I} x_i - \sum_{i \notin I} x_i \right| = \left| -a + x - (s - x) \right| \\ &= \left| 2 \left\lfloor \frac{a+s}{2} \right\rfloor - (a+s) \right| \leq 1, \end{aligned}$$

从而结论成立(只需对 $i \in I$, 令 $f(a_i) = -1, f(b_i) = 1$, 对 $i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus I$, 令 $f(a_i) = 1, f(b_i) = -1$, 并令 $f(a) = -1$ 即可).50分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: bjkzx

官方网站: www.gaokzx.com

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018